第8卷 第2期 复合材料学报 Vol.8 No.2
1991年 4 月 ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA April 1991

短纤维复合材料刚度特性的有限元随机能量法预报

陈浩然 张占平

大连理工大学力学所，大连116023 大连海运学院材料所，大连116024

摘要：本文基于能量等效原理，采用有限元法和随机统计试验的Monte-Carlo方法相结合的随机分析数值方法，提出了可用于短纤维复合材料刚度预报的有限元随机能量法。文中还以碳纤维/AG3合金、碳纤维/GA321合金和钢纤维/尿烷复合材料为例，用本文方法对其刚度特性进行理论预报，所得理论预报与试验值吻合很好，说明本文提出的分析模型和方法是有效的。

关键词：短纤维复合材料，机械性质，预报，随机样本。

一、前 言

根据多相材料的组分力学性质推断该材料的力学性质是近代细观力学的重要研究分支，目前这一研究领域已得到材料和力学工作者极大地关注，并已取得了很多有价值的研究成果。

细观力学将多相材料视为结构，为此首先必须建立分析模型，分析模型可以是理想多相材料的直观模型，也可以是概念化的抽象模型。目前细观力学研究模型都采用后者，例如空心圆球模型、独立模型、薄片模型、矩形模型、夹杂模型、自洽模型和接触模型等。分析方法大致可分为直接法、近似法和变分法三种[1]。不同的模型和分析方法将导致不同的材料刚度预报值，因此细观分析模型和方法的实验验证是十分重要的。

多年来，各国学者应用上述方法和模型做了大量的研究工作，得到了许多有益的结果。最基本的结论是在大量假设条件下应用薄片模型，推出单向纤维增强复合材料的表观正交各向异性弹性模量的材料力学表达式，在此基础上，Ekvall[2]研究并给出了考虑纤维约束和纤维产生应力集中等各种特点的修正式。Paul[3]首次明确地用线弹性力学的变分方法讨论了多相材料弹性模量的上下限；随后，Hashin[4]等人用一同心球模型来处理不均匀材料，并推广应用同心圆柱体讨论纤维复合材料；Tsai[5]等人研究了六角形和正方形随机阵列纤维的情形，并提出了接触模型；Whitney[6]等人提出了所谓独立模型，后来又把这一模型推广到横观各向同性和扭曲纤维；其他人提出了一些更为复杂的独立模型；

本文1990年9月5日收到，国家自然科学基金会资助项目

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

1969年HalPin和Tsai[7]提出了一种近似地表达比较复杂的细观力学结果的内插法。

除了上述工作外，近几十年应用数值计算方法在复合材料刚度特性预报方面也做了大量的工作。Tsai[8]等以及Adams和Doner[9]分别在与Whitney—Riley模型相同的理论基础上，应用了有限差分方法以确定复合材料的弹性模量；Agarwal[10]等和Zybert[11]等分别应用有限元方法来确定各向异性复合材料的弹性模量；Foye[12]应用有限元方法与正交各向异性应力应变关系式以确定正交各向异性复合材料的弹性模量。Zhang和Evans[13]对各向异性复合材料力学性能进行了数值预测，他们把纤维增强复合材料处理为各向异性的均匀连续体，并用一种能量等效方法确定复合材料的弹性模量。

在我国，薛元德[14]等人提出了一种复合材料剪切时的细观力学模型，并应用有限元方法进行了分析；王殿富[15]等利用随机介质细观力学方法，对短纤维的大小、方向随机分布的随机短纤维复合材料弹性模量进行了计算，给出了与微观性能相联系的复合材料弹性模量计算公式；茅人杰[16]提出了单向短纤维增强复合材料纤维方向模量的一个计算模型，该模型考虑了横向相邻纤维间以及纵向相接纤维间的作用；顾震隆[17]等针对三相碳/碳复合材料建立模型，并结合细观结构力学和有限元分析，预报了该材料的弹性常数。所有这些成果都对进一步的复合材料模量预报研究工作产生积极的推动作用。

一般来说，理论预测的各种模型和方法不可能顾及很多复杂的因素，譬如相几何和各相材料的非均匀特征，故总带有一定局限性。如果通过试验将这些不能顾及的影响因素用多种参数进行宏观假设性的描写，往往会使预测结果更接近于实测结果。本文提出的随机细观等效模型和有限元与随机统计试验的Monte-Carlo法相结合的有限元随机能量法就是在这一方面所作的一次初步尝试。

一、随机细观等效模型〔18〕

在细观层次上，多相介质的随机性质决定了多相材料整体的宏观性质，细观层次上随机性主要来自材料各相的相几何（位置、状态等）的随机性。假设材料是由元胞堆积而成，在外力作用下各元胞弹性场是统计均匀随机场，且各态历经，为此我们研究整体力学性质可用研究元胞来代替。

完全正确描述元胞内各相材料的相几何分布特征也是很困难的，我们假设采用体分比函数来综合反映材料各相的几何分布平均特征。

设增强相体分比函数：

$$V_f(\bar{x}) = \lim_{V\to 0} V_f/V \qquad \bar{x}\in V$$

根据现有材料刚度预报公式，譬如混合律，就可得到相应的随机弹性模量场。

假设元胞由有限个足够小的细观单元组成。若已知体分比函数，则采用混合律公式，通过插值就可得到各细观单元的弹性场。

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

二、弹性模量场的离散

短纤维复合材料从细观角度上来看是一种典型的非均匀随机场介质，但从宏观角度看，是各向同性材料，故独立的弹性常数只有两个。

假设所研究材料及其组分材料均是线弹性且各向同性，令在元胞内离散的细观单元i中弹性模量和泊松比分别表示为：

$$E_i=K_{iE}(E_f V_{if}+E_m V_{im}) \qquad \nu_i=K_{i\nu}(\nu_f V_{if}+\nu_m V_{im}) \qquad (1)$$

其中

$$V_{if}+V_{im}+V_{iv}=1 \qquad (2)$$

在（1）、（2）式中，K_{iE}、$K_{i\nu}$分别为细观单元i内弹性模量和泊比的随机修正系数，V_{if}、V_{im}和V_{iv}分别为细观单元i内纤维、基体和空隙的体分比。

（1）和（2）式实质上是一种修正的混合律表达式，在表达式内既考虑了单元内各组分体分比和组分材料力学特性对单元弹性常数的影响，同时通过半经验修正系数K_E、$K_{i\nu}$考虑了各细观单元弹性特性的不均匀性。

三、蒙特卡洛法(Monte Carlo法)

蒙特卡洛法亦称为随机模拟方法，有时也称作随机抽样技术或统计试验方法。

蒙特卡洛法的具体过程为，首先根据提出的问题构造一简单适用的概率模型（概型），使问题的解对应于该概型中随机变量的某些特征；然后在电子计算机上生成伪随机数，并对该概型进行大量的统计试验；最后利用统计试验得到的结果，求出这些统计特征的估计值，作为问题的近似解。

短纤维复合材料由于制造过程中多种因素的影响，纤维在基体中是随机均匀分布的。因此，本文中假设各细观单元内和宏观尺度上，纤维和缺陷等在基体中是均匀分布的，而细观单元间纤维和缺陷等在基体中的形态却存在着差别。这些差别由细观单元的弹性常数反映出来，我们假定宏观上弹性常数是均匀分布的，利用（0,1）内均匀分布的伪随机数，产生半经验随机修正系数K_{iE}、$K_{i\nu}$，得到每个细观单元的弹性模量和泊松比，进行大量的统计试验，最后用统计分析的均值和方差给出短纤维复合材料的理论预报值。

四、能量等效原理

我们所研究的元胞是非均质体，在外力作用下其平均应力和平均应变间的关系可表示为

$$\bar{\sigma}_{ij}=C^{\circ}_{ijkl}\bar{\varepsilon}_{kl} \qquad (3)$$

式中C°_{ijKL}为表观刚度张量。若元胞边界上给定一位移场为$u_i=\varepsilon^0_{ij}X_j$，则元胞的平均应变能表达式可写为[19]

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\bar{U}=\frac{1}{2}\bar{\sigma}_{ij}\varepsilon^{0}_{ij}V=\frac{1}{2}C^{0}_{ijkl}\bar{\varepsilon}_{ij}\bar{\varepsilon}_{kl}V \tag{4}$$

式中V为元胞体积，ε^{0}_{ij}为将元胞视为均质材料时其均匀应变场张量。

若元胞划分成n个细观单元，在给定边界位移条件$u_i=\varepsilon^{0}_{ij}x_j$下，由有限元分析得到的元胞由第i个细观单元的应变能可写为

$$U_K=\frac{1}{2}\int_{V_K}C^{K}_{ijkl}\ \varepsilon^{K}_{ij}\varepsilon^{K}_{kl}dV \tag{5}$$

则整个元胞总应变能为

$$U_t=\frac{1}{2}\sum_{K=1}^{n}\int_{V}C^{K}_{ijkl}\varepsilon^{K}_{ij}\varepsilon^{K}_{kl}dV \tag{6}$$

采用有限元随机能量法得到的元胞总应变能的数学期望值可表达为

$$\bar{U}_t=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}U_t \tag{7}$$

式中N为随机抽样样本元胞总个数。根据能量等效原理则$\bar{U}=\bar{U}_t$

五、刚度特性的分离与预报公式

若假定不同均匀应变场所对应的位移边界条件，则可得不同的元胞平均应变能表达式，根据能量等效原理可得相应的表观刚度表达式。例如$u=\varepsilon^{0}_{11}x$，即除$\varepsilon_{11}=\varepsilon^{0}_{11}$，而其它$\varepsilon_{ij}=0$，则由（4）式可得

$$\bar{U}=\frac{1}{2}C^{0}_{1111}\ \varepsilon^{0}_{11}\varepsilon^{0}_{11}V\quad 则C^{0}_{1111}=\frac{2\bar{U}}{(\varepsilon^{0}_{11})^2V}=\frac{2\bar{U}_t}{(\varepsilon^{0}_{11})^2V} \tag{8}$$

其中$\bar{U}_t$为相同位移边界条件下由有限元随机能量法所得的总应变能的数学期望值。

六、有限元分析列式

根据细观非均匀性材料是连续体的假定，细观单元e内的位移$u^{(e)}$可写为

$$u^{(e)}=Nu_e \tag{9}$$

其中：u_e为单元e内节点位移向量。

N为位移插值函数，在等参元中N为形函数。

由应变位移关系式，对（10）式求导得单元e内的应变为：

$$\varepsilon_e=B_e\ u_e \tag{10}$$

式中B_e为应变-节点位移阵，

单元e内的应力σ_e可写为：

$$\sigma_e=D_e\varepsilon_e \tag{11}$$

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

式中D_e为单元e的弹性阵。弹性常数可根据不同情况而定。

对于本文所讨论的短纤维复合材料具有宏观各向同性，故其模量预报问题可采用平面应力问题模型来求解，则所对应的弹性阵可写为：

$$D_e=\frac{E_e}{1-\nu_e^2}\begin{bmatrix}1 & \nu_e & 0\\ \nu_e & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_e}{2}\end{bmatrix} \tag{12}$$

式中：E_e为单元e的杨氏模量，ν_e为单元e的泊松比，E_e、ν_e由（1）式确定。

由有限元理论可得单元e的刚度阵K_e为：

$$K_e=\int_{v_e}B_e^T D_e B_e dv \tag{13}$$

将各单元的刚度阵按一定规律组装得到总刚度阵K。因此所研究问题的控制方程可写为：

$$KU=F \tag{14}$$

式中：U为所分析结构的节点位移向量，

F为外荷载向量。

七、数值算例

算例1.　碳纤维/金属基复合材料

已知纤维与基体的性能参数分别为：纤维AC型，其弹性模量和泊松比分别为$E_f=196.2GPa$，$\nu_f=0.25$；基体为GA321型（GA321是一种含有96%镁、3%铝和1%锌的合金），该材料弹性模量和泊松比分别为$E_m=42.183GPa$，$\nu_m=0.3$。由本文法所得复合材料理论预测值与试验值[20]分别列于表1

表1. C/GA321复合材料弹性模量的比较

项目 \ E(GPa) \ V_f(%)		30	45	70
实验值[20]		79.46	94.18	136.36
混合律值		82.39	111.49	149.90
本文法	均值	80.01	93.60	137.38
	均方差	1.28	2.71	5.43
差值*(%)		0.69	0.61	0.75

注：差值*为文法均值与实验值[20]的相对差

由表1可以看出，短纤维复合材料弹性模量值是随纤维体分比增加而增加。由本文给出的预测值比传统混合律给出的预测值更接近于试验值，本文给出的预测值与试验值的相对差仅在1%以内。

算例2.　碳纤维/金属基复合材料

已知碳纤维为AC型，其弹性常数$E_f=196.2GP_a$，$\nu_f=0.25$；金属基体AG3型合金是一种含3%镁的铝合金，其弹性常数为$E_m=69.65GP_a$，$\nu_m=0.3$。在表2中分别给出了该复合材料弹性模量E的理论预报值和试验值[20]。表3给出了该复合材料剪切模量G的理论预报值。

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

表2. C/AG3复合材料弹性模量的比较

项目 \ E(GPa) \ V_f (%)		45	50	55	60	65	70
实验值[20]		101.04	124.29	107.42	135.38	109.87	149.99
本文法	均值	102.73	125.99	109.02	134.12	114.50	145.78
	均方差	3.61	1.06	4.57	1.75	5.64	1.89
差值*(%)		1.67	1.13	1.49	0.93	4.20	2.[illegible]

由表2可以看出本文法所得理论预报值与试验吻合较好，它们之间的相对差在5%以内。说明本文法有较好的预报精度。

表3. C/AG3复合材料剪切模量的理论预报值

项目 \ G(GPa) \ v_f (%)		45	50	55	60	65	70
本文法	均值	39.49	48.48	44.95	51.58	42.25	57.68
	均方差	1.40	0.41	1.31	0.67	2.45	0.49

另外由表2、表3还可看出，该复合材料弹性常数E、G并不随纤维体分比增加而单调增加，而呈现一种波动变化趋势。

算例3. 钢/尿烷复合材料

表4

项目 \ 结果 \ 方法		法方文本 均值	法方文本 均方差	混合律
E (GPa)	双变量	149.5684	0.6115	153.1
	单变量	149.5676	0.6115	
ν	双变量	0.34269	1.398×10^{-3}	0.3518
	单变量	0.35176	1.115×10^{-3}	

已知钢纤维的弹性常数为$E_f=207.5$ GPa，$\nu_f=0.3$，基体尿烷的弹性常数为$E_m=7.6\times10^{-3}$GPa，$\nu_m=0.49908$、表4给出了对于纤维体分比为0.74的钢/尿烷复合材料，分别采用E、ν双随机变量和E单随机变量，本文方法给出的该复合材料弹性常数的理论预报值。

由表4可以看出，用双随机变量E、ν和单随机变量E预报的弹性模量值E相差很小，故这种材料的弹性模量预报可以认为用单随机变量E来预报就可满足工程精度要求。用双随机变量E、ν和单随机变量E预报的泊松比ν值相差稍大，至于如何选择随机变量的个数要根据具体情况来定。

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

八、结 论

1. 由表1和表2中本文法结果与试验结果相比较可以看出，本文所提出的有限元随机能量法有较高的理论预报精度，与试验值[20]的相对差仅在5%内；

2. 由表4可知，将E、ν均视为随机变量和仅视E为随机变量所得复合材料弹性模量预报值彼此相差很小，说明对于短纤维复合材料，一般可采用单随机变量E来进行理论预报；

3. 本文法可以应用不同应变状态来预报材料的各个刚度特性；

4. 本文法不仅适用于短纤维复合材料，而且稍加扩展就可用于各种复合材料的刚度特性理论预报，目前这些工作正在进行中。

参 考 文 献

〔1〕Hashin, Z., Journal of Applied Mechanics, Vol.50, 1983, 481
〔2〕Ekvall, J.C.,ASME Paper 61-AV-56, Aviation Conference,Los Angeles, Calif. ,March 12-16, 1961.
〔3〕Paul, B.. Trans.Metallurgical Society of AIME, Feb.1960, 36-41.
〔4〕Hashin, Z., J.Appl.Mech.,1962, 143-150.
〔5〕Tsai, stephen W., NASA CR-71, July, 1964.
〔6〕Whitney, James M., Textile Res.J.,1966, 765-770.
〔7〕Halpin, J.C.and S.W.Tsai, AFML-TR67-423, June, 1969.
〔8〕Tsai, S.W,Adams, D.F.and Doner, D.R.,AFML-TR-66-190, 1966.
〔9〕Adams, D.F.and Doner, D.R.,J.Comp.Mat., 1, 1967, 152-164.
〔10〕Agarwal, B.D.and Bansal, R.K.,Fibre Sci.Technol.,12, 1979, 149-158.
〔11〕Zybert, J.J., Composites,11, 1980,175-180.
〔12〕Foye, R.L.,AFML-TR-68-91, Vol. 1, July,1968, 92-167.
〔13〕Zhang, W.C.and Evans, K.E.,Computers & Structures, Vol.29, No.3, 1988,413-422.
〔14〕薛元德等，玻璃钢/复合材料，1986年增刊，124.
〔15〕王殿富等，哈工大科研报告，第186期。
〔16〕茅人杰，复合材料学报，Vol. 5, No.4, 1988, 10
〔17〕顾震隆等，复合材料学报，Vol. 5, No. 4, 1988, 21
〔18〕陈浩然等，全国细观力学试验技术和计算方法研讨会，1989.6.（西安）
〔19〕Hashin, Z.,NASA CR—1974.
〔20〕国外纤维增强复合材料，第一辑。

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

A FINITE ELEMENT STOCHASTIC ENERGY METHOD FOR MECHANICAL PROPERTIES OF SHORT FIBER COMPOSITE MATERIALS

Chen Haoran

Research Institute of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian

Zhang Zhanpin

Research Institute of Materials and technology, Dalian Marine Institute

ABSTRACT

Based on energy equivalence Principle, a finite element stochastic energy method is presented to predict the mechanical properties of short fiber composite materials. The method is a combined method of the finite element method with Monte carlo stochastic sampling method. Some theoretical predicting results of mechanical properties of Carbon/AG3, Carbon/AG321 and Steel/Urethane as numerical examples are given in the paper. The agreement of the numerical predicting results with experimental results shows that the model and method provided in the paper is reasonable and effective.

Key words: short fiber composite materials, mechanical properties, prediction, stochastic sampling

《复合材料实验力学》即将出版

许陆文、杨报冒编著的《复合材料实验力学》，共十五章、约40万字，今年9月将由东南大学出版社出版。该书围绕复合材料的力学行为讨论试验方法，严格按照各向异性体弹塑性理论评价各种试验的实施，从而引导读者避免盲目地将适用于均质、各向同性材料的试验手段引入复合材料领域。该书的特点是有较大篇幅讨论复合材料动态特性的测试原理与技术；物理概念清晰、理论推导严密、系统性与实用性强是该书的又一特点。该书适合于从事复合材料工作的科技人员及高等院校师生阅读，也可作为相应课程的本科生、研究生教材。

该书已开始征订，有关预订事项请与南京202信箱21分箱张有琴（210002）联系。

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net