第9卷 第2期 复合材料学报 Vol.9 No.2
1992年 4月 ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA April 1992

复合材料多层厚板的精化高阶理论及其有限元法

傅晓华 陈浩然 王震鸣

（长沙交通学院）（大连理工大学）（中国科学院力学研究所）

摘要：本文提出了一种经过改进的复合材料多层厚板的精化高阶剪切变形理论，采用Legendre多项式来逼近位移场沿厚度方向的分布，较好地模拟了横向剪切变形和层间拉、压变形，利用层板上、下自由表面横向剪应力为零的边界条件，对所假定的位移场作了化简，在此基础上构造了相应的有限元。文中通过一些典型算例，与Pagano的弹性力学精确解[9]以及其他高阶理论的解作了比较，说明本文的精化高阶剪切变形理论及其相应的有限元具有精度高和收敛快的优点。

关键词：精化高阶理论，层合厚板，有限元，横向剪切效应

一、引 言

纤维增强复合材料是一种应用广泛的复合材料。由于叠层复合材料的各向异性和呈层性等特点，使它在受载后的应力状态十分复杂。对于较厚的叠层梁、板和壳等结构，由于层间剪切和拉、压应力对结构强度和刚度的影响较大，且呈三维应力状态，再采用经典层板理论和Reissner-Midlin的一阶剪切变形层板理论来分析，已不能满足精度要求，应采用以三维弹性力学为基础的分层分析的层板理论，但这样做又过分复杂。因此，前人提出并发展了各种各样的高阶理论，以适应分析的需要。

高阶理论是分析叠层结构的有效理论，其特点是将三维的位移场问题化简为若干二维位移场问题之和，然后在二维域内求解。高阶理论要比三维弹性理论简单得多，能分析各种复杂的结构，并具有在工程上满意的精度。1973年Whitney和Sun[1]提出了一种二阶理论，并将它用于求解动力问题，取得了较好的结果。1977年Lo，Christenson和Wu[2]提出了三阶理论（简称LCW理论），使计算精度大为提高，但是也更为复杂了。后来，许多学者将LCW理论作了多种修正和简化，针对各种情况，提出了各种精化高阶理论，例如文献[3-6]。

在文献[3]中，对于对称铺层平板的弯曲问题，采用平板自由表面剪应力为零的条件，可使LCW理论中的位移函数由11个减为7个，再采用沿厚度方向不可压缩的假定，又可使位移函数减为5个，即u_0，v_0，w_0，ϕ_x和ϕ_y。

本文1989年6月收到

在文献[5]中，对位移场采用了锯齿形函数和Legendre多项式来表示，共有14个位移函数，比LCW理论要复杂得多，由于锯齿形位移函数难以精确描述各种实际情况的位移分布，因此计算精度时高时低，视具体问题而定。

在文献[8]中，将文献[1]的二阶理论，推广到有限元，并对单元的收敛性作了详细的讨论。文献[3]和[5]的高阶理论，已有人推广到有限元分析，在此不详细介绍了。

本文在前人研究工作的基础上，提出了一种经过改进的复合材料多层厚板的精化高阶剪切变形理论，首先从LCW理论[2]的11个位移函数出发，如文献[5]那样采用Legendre多项式来表示位移场，利用了Legendre多项式的许多优良性质，再如文献[3]那样采用平板自由表面剪应力为零的条件，使位移函数由11个减为7个，得到了一种精度较高的高阶理论和相应的有限元，并用算例作了比较。

二、精化高阶理论

下面推导一种用于复合材料多层厚板的精化高阶理论。由于Legendre多项式具有正交性、归一性和良好的收敛性等优点，因此用它来逼近位移场沿厚度方向的分布规律，将层板的面内位移u和v展开至三阶Legendre表达式，将法向位移展开至二阶Legendre表达式，从而较好地模拟了横向剪切变形和层间拉、压变形。将位移场表示为

$$\begin{cases} u=u_0+\dfrac{h}{2}P_1(\zeta)\phi_x+\left(\dfrac{h}{2}\right)^2P_2(\zeta)\psi_x+\left(\dfrac{h}{2}\right)^3P_3(\zeta)\eta_x \\ v=v_0+\dfrac{h}{2}P_1(\zeta)\phi_y+\left(\dfrac{h}{2}\right)^2P_2(\zeta)\psi_y+\left(\dfrac{h}{2}\right)^3P_3(\zeta)\eta_y \\ w=w_0+\dfrac{h}{2}P_1(\zeta)\phi_z+\left(\dfrac{h}{2}\right)^2P_2\psi_z \end{cases} \tag{1}$$

其中，$\zeta=\dfrac{2z}{h}$，P_n为n阶关于ζ的Legendre多项式，u_0，v_0，w_0，ϕ_x，ϕ_y，ϕ_z，ψ_x，ψ_y，ψ_z，η_x和η_y是广义位移，均为(x,y)的函数。

利用上、下表面剪应力（和剪应变）为零的边界条件，可将位移场简化为

$$\begin{cases} u=u_0+\dfrac{h}{2}P_1\phi_x-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{h}{2}\right)^2P_2\dfrac{\partial\phi_z}{\partial x}-\dfrac{2}{3h^2}\left(\dfrac{h}{2}\right)^3P_3\left(\phi_x+\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{h^2}{4}\dfrac{\partial\psi_z}{\partial x}\right) \\ v=v_0+\dfrac{h}{2}P_1\phi_y-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{h}{2}\right)^2P_2\dfrac{\partial\phi_z}{\partial y}-\dfrac{2}{3h^2}\left(\dfrac{h}{2}\right)^3P_3\left(\phi_y+\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{h^2}{4}\dfrac{\partial\psi_z}{\partial y}\right) \\ w=w_0+\dfrac{h}{2}P_1\phi_z+\left(\dfrac{h}{2}\right)^2P_2\psi_z \end{cases} \tag{2}$$

定义广义位移向量为

$$\{d\}=\{u_0\ v_0\ \phi_x\ \phi_y\ w_0\ \phi_z\ \psi_z\}^T \tag{3}$$

将（2）式写成矩阵形式 $\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [B_1^*]\{d\}$ (4)

由位移场可得应变场，将它对$P_n(\zeta)$展开用矩阵表示为

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = [e] \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{h}{2}P_1 \\ \left(\frac{h}{2}\right)^2 P_2 \\ \left(\frac{h}{2}\right)^3 P_3 \end{bmatrix} \tag{5}$$

和

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = [e^*] \begin{bmatrix} 1 \\ \left(\frac{h}{2}\right)^2 P_2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

其中[e]和[e*]中各元素是关于广义位移的表达式，见附录。定义广义应变为

$$\{\varepsilon^*\} = \{e_{11}\ e_{21}\ e_{31}\ e_{41}\ e_{12}\ e_{22}\ e_{32}\ e_{42}\ e_{13}\ e_{23}\ e_{43}\ e_{14}\ e_{24}\ e_{44}\ e_{11}^*\ e_{21}^*\ e_{12}^*\ e_{22}^*\}^T \tag{7}$$

将广义应变用广义位移由矩阵形式表示为

$$\{\varepsilon^*\} = [B_2^*]\{d\} \tag{8}$$

叠层板第k层在坐标系xyz中的应力应变关系可写为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{16} \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{26} \\ & & \bar{Q}_{33} & \bar{Q}_{36} \\ \text{对称} & & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k \tag{9}$$

和 $\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}_k$ (10)

在x y z坐标系中，叠层板应力应变关系中的刚度系数与材料主轴方向（1，2，3）应力应变关系的刚度系数间的关系，以及它们与材料弹性常数间的关系，请参见文献[7]

定义广义内力场为

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix} N_x & M_x \\ N_y & M_y \\ N_z & M_z \\ N_{xy} & M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{LW} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left\{1,\ \frac{h}{2}P_1\right\} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \\
&\begin{Bmatrix} P_x & T_x \\ P_y & T_y \\ P_{xy} & T_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{LW} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left\{\left(\frac{h}{2}\right)^2 P_2,\ \left(\frac{h}{2}\right)^3 P_3\right\} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \\
&\begin{Bmatrix} Q_x & S_x \\ Q_y & S_y \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{LW} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left\{1,\ \left(\frac{h}{2}\right)^2 P_2\right\} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

其中，Lw为叠层板的总层数。

定义广义内力向量为

$$\{\sigma_x^*\} = \{N_x\ N_y\ N_z\ N_{xy}\ M_x\ M_y\ M_z\ M_{xy}\ P_x\ P_y\ P_{xy}\ T_x\ T_y\ T_{xy}\ Q_x\ Q_y\ S_x\ S_y\}^T \tag{12}$$

将应力应变关系式(9) (10) 和应变与广义应变关系式 (5) (6) 代入 (11)，可得广义应力与广义应变之间的关系式，用矩阵表示为

$$\{\sigma^*\} = [D]\{\varepsilon^*\} \tag{13}$$

三、有 限 元 的 实 施

单元应变能U^e的表达式为

$$U^e = \frac{1}{2}\int_{A^e} \sum_{k=1}^{Lw} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \{\sigma\}_k^T \{\varepsilon\}_k dA dz \tag{14}$$

将 (5) (6) (9) (10) 式代入 (14) 式可得

$$U^e = \frac{1}{2}\int_{A^e} \{\sigma^*\}^T \{\varepsilon^*\} dA \tag{15}$$

其中A^e表示单元e的中面xy域，

单元的外力功W^e的表达式为

$$W^e = \int_{A^e} \{P^*\}^T \{d\}^e dA + \int_{\Omega} \{k\}^T \{d\}^e d\Omega \tag{16}$$

其中$\{P^*\}$为单元e内的分布载荷，$\{k\}$为单元e边界Ω上的力。

若选用Nw个节点的单元，N_i为第i节点的位移插值基函数，Ew为系统中的单元总数。$\{d_i\}^e$为单元e中第i节点的相应广义位移向量，则单元e内的广义位移为

$$\{d\}^e = \sum_{i=1}^{Nw} [N_i]\{d_i\}^e = [N]\{q\}^e \tag{17}$$

其中$\{q\}^e$为单元e的节点位移向量。

由最小势能原理，有

$$\delta\sum_{e=1}^{Ew}(U^e-W^e)=0 \tag{18}$$

对广义位移变分，可得系统离散的平衡方程

$$[K]\{q\}=\{P\} \tag{19}$$

其中，总广义位移向量为$\{q\}=\sum_{e=1}^{Ew}\{q\}^e$ (20)

总刚度矩阵$[K]$为

$$[K]=\sum_{e=1}^{Ew}[k_{ij}]^e=\sum_{e=1}^{Ew}\int_{A^e}([B_2^*][N])^T[D]([B_2^*][N])dA$$

$$=\sum_{e=1}^{Ew}\int_{A^e}[B_2]^T[D][B_2]dA \tag{21}$$

广义外力向量为

$$\{P\}=\sum_{e=1}^{Ew}\{P\}^e=\sum_{e=1}^{Ew}\int_{A^e}([B_1^*][N])^T\begin{Bmatrix}P_x\\P_y\\P_z\end{Bmatrix}dA=\sum_{e=1}^{Ew}\int_{A^e}[B_1]^T\begin{Bmatrix}P_x\\P_y\\P_z\end{Bmatrix}dA \tag{22}$$

四、算　例

采用三角形六节点亚参单元，对〔0/90/0〕铺设的四边简支方形层板进行挠度和应力计算，各单层的材料常数为：$E_1/E_2=25$，$G_{12}/E_2=0.5$，$G_{23}/E_2=0.2$，$\nu_{12}=0.25$。采用下列无量纲参数

$$\left.\begin{aligned}&\bar{w}=w\frac{E_2h^3}{q_0a^4}\times10^2 \qquad \{\bar{\tau}_{xz},\ \bar{\tau}_{yz}\}=\{\tau_{xy},\ \tau_{yz}\}\frac{h}{q_0a}\\&\{\bar{\sigma}_x,\ \bar{\sigma}_y,\ \bar{\tau}_{xy}\}=\{\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy}\}\frac{h^2}{q_0a^2}\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

在计算应力时，面内应力σ_x，σ_y，τ_{xy}由本构关系(9)式求得，层间应力τ_{xz}，τ_{yz}，σ_z由平衡方程求得。

在图1和2中，分别给出了当跨厚比$s=a/h=4$时的横向剪应力$\bar{\tau}_{xy}\left(0,\frac{a}{2}\right)$和面内剪应力$\bar{\tau}_{xy}(0,0)$沿厚度方向的分布情况，可以看到，用本文理论求得的剪应力分布与弹性力学的解十分相似，其精度明显比二阶剪切变形理论的结果要高得多。

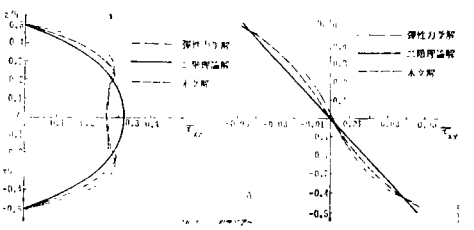

图1　在载荷$P=q_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}$作用下方板的剪应力$\bar{\tau}_{xz}(0,a/2)$

图2　在载荷$P=q_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}$作用下方板的面内剪应力$\bar{\tau}_{xy}(q,0)$

为了更详细地分析和讨论其它应力的计算精度以及它与跨厚比的关系，在表1中列出了二阶理论[8]、弹性力学[9]和本文理论在不同跨厚比

的情况下算得的面内应力和横向剪应力的值以及它们与弹性力学解的相对误差。表 1 的结果表明，用本文理论算得的应力均比二阶理论更接近于弹性力学的解。

表1 在载荷$p=q_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}$载荷下简支方板的应力

$\frac{a}{h}$		$\bar{\sigma}_x\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{h}{2}\right)$	$\bar{\sigma}_y\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{h}{6}\right)$	$\bar{\sigma}_{xy}\left(0,0,\frac{h}{2}\right)$	$\bar{\sigma}_{xz}\left(0,\frac{a}{2},0\right)$	$\bar{\sigma}_{yz}\left(\frac{a}{2},0,0\right)$
2	本文的解	0.661	0.648	0.0675	0.221	0.255
4	弹性力学的解	0.755	0.556	0.0505	0.282	0.217
	二阶理论的解 值	0.414	0.598	0.0465	0.296	0.238
	二阶理论的解 Δ%	45.2	7.6	7.9	5.0	9.7
	本文的解 值	0.607	0.571	0.0497	0.279	0.209
	本文的解 Δ%	19.6	2.7	1.6	1.1	3.7
5	本文的解	0.561	0.323	0.0382	0.288	0.168
10	弹性力学的解	0.529	0.288	0.0289	0.357	0.123
	二阶理论的解 值	0.529	0.292	0.0289	0.352	0.123
	二阶理论的解 Δ%	0.0	1.4	0.0	1.4	0.0
	本文的解 值	0.524	0.283	0.0285	0.338	0.125
	本文的解 Δ%	1.0	1.7	1.4	3.9	1.6

在表 2 中列出了这种叠层板在均布载荷作用下（$p_z=q_0$）在不同跨厚比时中心挠度的计算值。结果表明，算得的挠度也有较高的精度。

表2 简支方板在均布载荷作用下的中心挠速 $\bar{w}$

a/h	文献[10]的解	文献[3]的解	本文的解
2	8.4236	9.2083	9.0558
4	3.4985	3.4799	3.5136
10	1.2548	1.2652	1.1962

五、结 论

本文的理论虽然具有与二阶剪切变形理论相同的 7 个未知函数，却取得了比二阶理论精确得多的结果，其原因是：

1. 本文的精化高阶理论属于LCW型的三阶高阶理论，由于本文利用上、下表面剪应力为零的自由边界条件，缩减了未知数，因此用较少的未知函数就取得了较高的精度，使计算工作量和机器内存都大为减少。

2．本文采用了Legendre多项式来逼近位移场沿厚度方向的分布，精度较高，因此算得结果的精度也比二阶理论的高。

附　录

1．位移场几何算子矩阵$[\overset{*}{B}_I]$

$$[\overset{*}{B}_I]=\begin{Bmatrix} 1 & 0 & \frac{h}{2}P_1-\frac{h}{12}P_3 & 0 & -\frac{h}{12}P_3\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{h^2}{12}P_2\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{h^3}{48}P_3\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{h}{2}P_1-\frac{h}{12}P_3 & -\frac{h}{12}P_3\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{h^2}{12}P_2\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{h^3}{48}P_3\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{h}{2}P_2 & \frac{h^2}{4}P_2 \end{Bmatrix}$$

2．广义应变矩阵$[e]$和$[e^*]$

$$\{c_1\}=\begin{Bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ e_{31} \\ c_{41} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \phi_z \\ \frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \{c_2\}=\begin{Bmatrix} c_{12} \\ e_{22} \\ e_{32} \\ e_{42} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ 3\psi_z \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y}+\frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$\{c_3\}=\begin{Bmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{43} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -\frac{1}{3}\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial x^2} \\ -\frac{1}{3}\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial y^2} \\ -\frac{2}{3}\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

$$\{e_4\}=\begin{Bmatrix} e_{14} \\ e_{24} \\ e_{44} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -\frac{2}{3h^2}\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{h^2}{4}\frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x^2}\right) \\ -\frac{2}{3h^2}\left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}+\frac{h^2}{4}\frac{\partial^2 \psi_z}{\partial y^2}\right) \\ -\frac{2}{3h^2}\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y}+\frac{\partial \phi_y}{\partial x}+2\cdot\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x \partial y}\right) \end{Bmatrix}$$

$$\{c_1^*\}=\begin{Bmatrix} c_{11}^* \\ c_{21}^* \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \frac{5}{6}\left(\phi_x+\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)-\frac{h^2}{24}\frac{\partial \psi_z}{\partial x} \\ \frac{5}{6}\left(\phi_y+\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)-\frac{h^2}{24}\frac{\partial \psi_z}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

$$\{e_2^*\}=\begin{Bmatrix} e_{12}^* \\ e_{22}^* \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -\frac{10}{3h^2}\left(\phi_x+\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)+\frac{1}{6}\frac{\partial \psi_z}{\partial x} \\ -\frac{10}{3h^2}\left(\phi_y+\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)+\frac{1}{6}\frac{\partial \psi_z}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

3. 广义应变与广义位移的关系矩阵 $[B_2^*]$

$$[B_2^*]=\begin{Bmatrix}
\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}\frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}\frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} & 0 \\
0 & 0 & -\frac{2}{3h^2}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & -\frac{2}{3h^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & -\frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\
0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3h^2}\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{2}{3h^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & -\frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\
0 & 0 & -\frac{2}{3h^2}\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{2}{3h^2}\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{4}{3h^2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} & 0 & -\frac{1}{3}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \\
0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 & \frac{5}{6}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & -\frac{h^2}{24}\frac{\partial}{\partial x} \\
0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{5}{6}\frac{\partial}{\partial y} & 0 & -\frac{h^2}{24}\frac{\partial}{\partial y} \\
0 & 0 & -\frac{10}{3h^2} & 0 & -\frac{10}{3h^2}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{1}{6}\frac{\partial}{\partial x} \\
0 & 0 & 0 & -\frac{10}{3h^2} & -\frac{10}{3h^2}\frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{1}{6}\frac{\partial}{\partial y}
\end{Bmatrix}$$

A REFINED HIGHER-ORDER THEORY AND ITS FINITE ELEMNT METHOD FOR THICK LAMINATED PLATES

Fu Xiaohua

Changsha Communication Institute

Chen Haoran

Dalian University of Technology

Wang Zhenming

Institute of Mechanics, Academia, Sinica

Abstract In order to improve the accuracy of the shear deformation theory of thick laminated plates, an improved higher order theory is developed. The Legendre polynomials are introduced into the approximate displacement distributions across the plate thickness, and a finite element model is suggested from the original equations.

This theory has the same independent arguments as that in the second order shear deformation theory proposed by Whitney, Sun, and Engblom, etal., but proposes the parabolic distribution of the transverse shear strains through the thickness of the plate. The accuracy of the present theory is examined by applying it to bending problems of laminated plates which was solved exactly by Pagano. The results are compared with three-dimensional elasticity solutions, the second order shear deformation theory and some other higher order shear deformation theory solutions. The present theory shows the deflections and stress more accurately than that obtained from the previous works in the structural analysis of laminated plate with small span with respect to thickness.

Key words refined higher-order theory, thick laminated plates, finite element method, transverse shear effect