第10卷 第1期　　复合材料学报　　Vol.10 No.1
1993年3月　　ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA　　March 1993

复合材料蠕变本构关系及实验测定

II 实验测定

向小运　张双寅

(中国科学院力学研究所，北京100080)

摘　要　在前一部分，本文得到复合材料蠕变的本构关系，在此基础上，本文进一步分析了复合材料蠕变本构关系的具体形式，实验测得了长纤维增强复合材料在蠕变、恢复两个阶段的应变，以用来确定本构关系中的待定参数，考虑到本构关系为复杂的非线性方程，本文提出了用离散变量和最小二乘法联合的方法确定参数，进而拟合蠕变本构关系的理论公式，分离出了蠕变过程中的弹性变形、粘弹性变形和粘塑性变形，对本构关系中的几个参函数，本文根据有限的实验数据拟合了其函数。

关键词　本构关系，蠕变—恢复，实验测定，拟合

1 引　言

在前文我们得到了蠕变本构关系的一般形式为：

$$q_m=d_{mn}g_0^{(mn)}Q_n+\Delta S_{mn}(\psi)g_2^{(mn)}Q_n+B_{mn}g_3^{(mn)}Q_n t \tag{1-1}$$

其中：d_{mn}、B_{mn}为常数，$g_0^{(mn)}$、$g_2^{(mn)}$、$g_3^{(mn)}$为广义力Q_m的函数，$\Delta S_{mn}(\psi)$为暂态柔度（transient compliance），这些参数（参函数）的测定类似弹性模量的测定，当需要测定拉伸或剪切的蠕变特性时，需要作拉伸或剪切蠕变实验，无论是拉伸或剪切，本构关系的形式是一致的，本文以一维拉伸蠕变为例提出测定蠕变本构关系的实验方案和数据处理方法。

Schapery在得到一维弹性本构关系后提出了参数测定的实验方案[1]，其数据处理是采用曲线的平移并由平移量来确定参数取值，其结果受主观性影响较大，本文提出的修正本构关系计及了粘塑性项，待定参数也增多了。同时，在蠕变过程中，材料内部将出现损伤，要完整地考虑损伤并确定本构关系的参数是非常困难的，本文对这些问题将进行初步地探讨。

2 本构关系的具体形式

在一维问题上，方程(1-1)为：

$$\varepsilon=S_0g_0\sigma+\Delta S(\psi)g_2\sigma+\Delta S_{vp}g_3\sigma \tag{2-1}$$

其中：$\Delta S(\psi)=S_1\psi^n$　(2-2)　　$\Delta S_{vp}(t)=Bt$　(2-3)

本文1990年6月收到

参考塑料性蠕变规律[3]，取：

$$g_3\sigma=\sigma^{*} \tag{2-4}$$

ΔS_{vq}为塑性流动，理论上它是时间t的线性函数（恒应力），但实验表明这一关系很难满足，蔡良武[4]在处理时认为：残余应变的“发展规律与蠕变应变相似”，其含义是ΔS_{vp}也为指数规律，并且指数也为n，这里我们假设：

$$\Delta S_{vp}=Bt^{m} \tag{2-5}$$

对于变载荷作用，考虑到（2-1）中的三项各自的变形特点，则有：

$$\varepsilon=S_0g_0\sigma+\int_{-\infty}^{\psi}\Delta S(\psi-\psi')\frac{\partial(g_2\sigma)}{\partial\psi'}d\psi'+\int_{-\infty}^{t}\sigma^{*}\frac{\partial(\Delta S_{vp}(t'))}{\partial t'}dt' \tag{2-6}$$

按照经典的连续损伤理论有：

$$D=\frac{A-\tilde{A}}{A},\qquad \tilde{\sigma}=\frac{\sigma}{1-D} \tag{2-7}$$

其中：A，$\tilde{A}$分别为损伤前、后的有效面积，$\tilde{\sigma}$为有效应力，在蠕变的第一、二两个阶段，损伤量是很小的，只有在描述蠕变的第三阶段时才必须考虑损伤，因此在方程(2-6)中，仅在弹性项中引入损伤[2]，即：

$$\varepsilon=S_0g_0\tilde{\sigma}+\int_{-\infty}^{\psi}\Delta S(\psi-\psi')\frac{\partial(g_2\sigma)}{\partial\psi'}d\psi'+\int_{-\infty}^{t}\sigma^{*}\frac{\partial(\Delta S_{vp}(t'))}{\partial t'}dt' \tag{2-8}$$

方程（2-8）即为我们要拟合的方程，其中的参数有S_0、S_1、n、B、S、m以及参函数g_0、g_2、a_6。

3 实验简介

材料：实验试件是高纤维含量的复合材料，纤维为长的玻璃纤维，基体为环氧树脂，±45°对称铺层，在宏观上材料为正交各向异性，在对称方向受正应力作用时没有剪切效应。

实验机：实验在Instron1195万能实验机上进行，其加载由横梁的移动来实现，恒定载荷由反馈控制，蠕变实验的突加应力是由快速移动横梁来保证的，除非特别“软”的材料，加载时间一般很短，可以忽略。

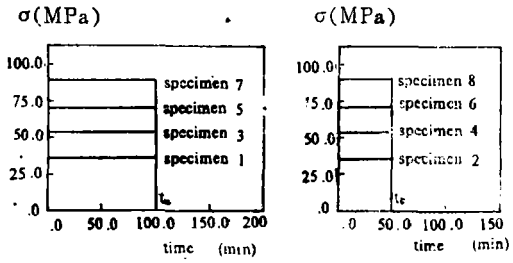

图 1 蠕变—恢复实验

蠕变——恢复实验：实验过程中快速加载到预定载荷，然后将加载速度换为低挡，由反馈控制横梁移动以保证载荷恒定，实验应力如图 1 所示，蠕变时间分别为100 分钟和 50 分钟，再卸载恢复100分钟，实验在常温下进行，载荷信息由Instron给出，用应变仪记录应变曲线。

4 实验曲线拟合

对图 1 所示的蠕变＝恢复实验，蠕变阶段和恢复阶段的变形可用图 2 所示：

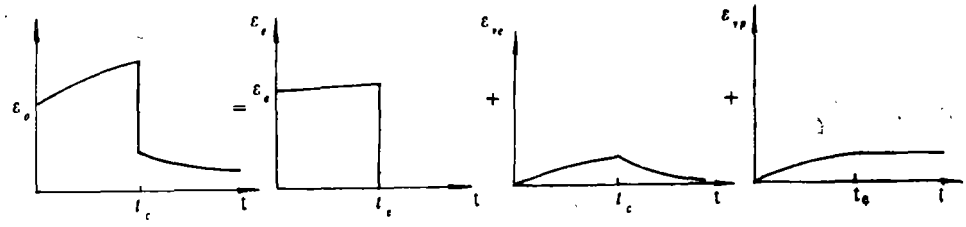

图 2　蠕变阶段和恢复级段的变形

图中弹性应变为线性，因为在蠕变的前两个阶段损伤量很小，作了如下的近似：

$$\dot{D}=\left(\frac{\sigma}{A_D}\right)^r(1-D)^{-k}\approx\left(\frac{\sigma}{A_D}\right)^r \tag{4-1A}$$

$$\varepsilon_e=S_0g_0\frac{\sigma}{1-D}\approx S_0g_0\sigma(1+D) \tag{4-1B}$$

蠕变阶段的变形（不包括弹性变形）：

$$\varepsilon_c=g_2S_1\sigma t^n/a_\sigma^n+B\sigma^s t^m \tag{4-2}$$

恢复阶段的变形：

$$\varepsilon_r=\varepsilon_{vp}(t_c)+[\varepsilon(t_c^+)-\varepsilon_{vp}(t_c)][(1+a_\sigma\lambda)^n-(a_\sigma\lambda)^n] \tag{4-3}$$

其中：$\lambda=\dfrac{t-t_c}{t_c}$

式中$\varepsilon_{vp}(t_c)=B\sigma^s t_c^m$表示在$t=t_c$时刻的粘塑性变形，它在恢复阶段为一个常数，$\varepsilon_c(t_c^+)$是卸载后的瞬间记录的应变值，参数确定的程序如下：

1°按Schapery假设，实验最低应力在线性范围内，$a_\sigma=1$，由(4-3)用最小二乘法拟合出$\varepsilon_{vp}(t_c)$，n。

2°其他应力水平下，由(4-3)拟合出a_σ，$\varepsilon_{vp}(t_c)$。

3°取不同的应力水平及蠕变时间t_c，由1° 2°求得的$\varepsilon_{vp}(t_c)$拟合$\varepsilon_{vp}=B\sigma^s t^m$中的B、S、m。

4°在最低应力水平下取$g_0=1$，由$t=0$时刻的$\varepsilon(0)$求出S_0，并联合$t=t_c$时刻的应变值，按弹性模量的减小计算损伤值：

$$D(\sigma,\ t_c)=1-\frac{\varepsilon(0)}{\varepsilon(t_c^-)-\varepsilon(t_c^+)} \tag{4-4}$$

5°同上的步骤拟合出其他应力水平下的g_0值及损伤值$D(\sigma,\ t_c)$

6°最低应力下取g_2、$a_\sigma=1$，由(4-2)用最小二乘法拟合出S_1，同理，在其他应力水平下，已知S_1可以拟合出g_2。

这样就可以拟合出六个参数和三个参函数在各应力水平下的取值，结果见表。

参数值 \ 试件号	1	2	3	4	5	6
g_0	1.00	1.00	1.23	1.20	1.97	1.93
g_2	1.00	1.00	1.13	1.60	7.15	6.23
a_6	1.00	1.00	1.33	0.92	3.17	1.76
$D(t_c)$	0.036	0.065	0.014	0.055	0.082	0.089
(粘) 弹	$S_0=102.5$		$S_1=7.22$		$n=0.243$	
粘 塑	$B=0.000167$		$s=3.76$		$m=0.279$	

将所得的结果代入到(2-8)即可拟合出蠕变变形曲线和其中的弹性变形、粘弹性变形和粘塑性变形，其详细结果见图 3 。

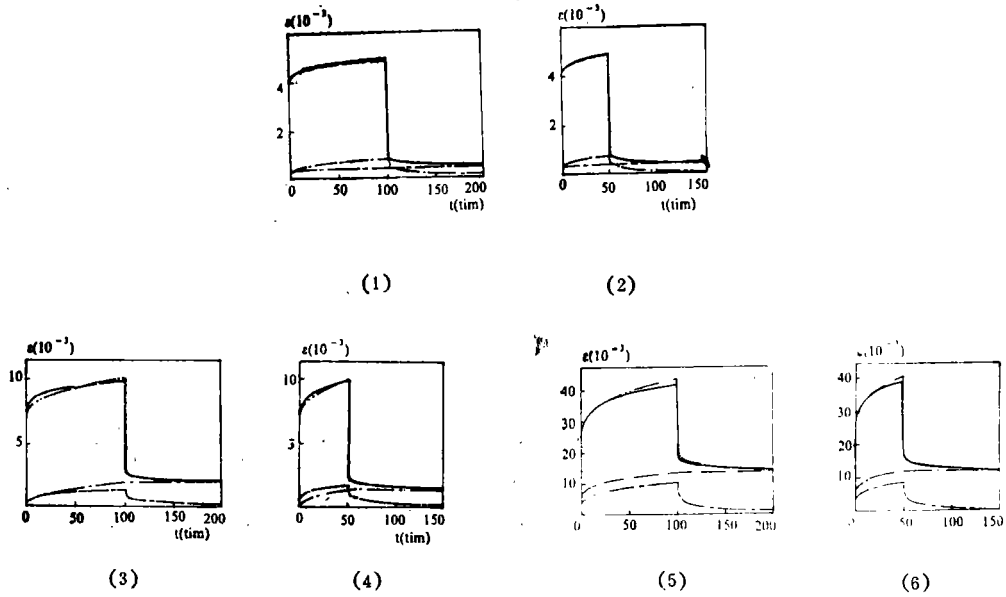

图 3 蠕变形变曲线

注：在给定的应力下，g_0，g_1，a_6值为常数，它们是由实验确定出来的。

——：实验曲线 —·—：拟合曲线

—·—：粘塑性变形曲线 —·—：粘弹性变形曲线

方程(4-3)为非线性方程，为求解方便，本文所用的最小二乘法联合了离散变量，例如：在最低应力下，(4-3)中的$a_6=1$，则有：

$$\varepsilon_r=\varepsilon_{vp}+[\varepsilon(t_c^+)-\varepsilon_{vp}][(1+\lambda)^n-\lambda^n] \tag{4-5}$$

要拟合n、ε_{vp}，先作余差函数：

$$f(\varepsilon_{vp},\ n)=\varepsilon_r-\varepsilon_{vp}-[\varepsilon(t_c^+)-\varepsilon_{vp}][(1+\lambda)^n-\lambda^n] \tag{4-6}$$

其拟合程序如下：

1°初定n的取值范围，将n离散为n^i。

2°各个n^i代入到(4-6)，由最小二乘法求出相应的ε^i_{vp}（因为$f(\varepsilon_{vp}, n) \sim \varepsilon_{vp}$为线性关系，故$\varepsilon_{vp}$不离散）

3°将n^i、ε^i_{vp}代入到(4-6)，计算$\sum_k f^2$值（k取第k个实验记录点），最小的$\sum_k f^2$对应的n^i，ε^i_{vp}为最接近真实的n、ε_{vp}。

4°缩小n的取值范围，重复上述的过程，则n^i，ε^i_{vp}就可以逼近真实的n、ε_{vp}。

同样地在非线性条件下，n为已知的，可以离散a_6，由(4-3)拟合出a_6、$\varepsilon_{vp}(t_0)$。

5 参函数的拟合

方程(2-8)中，g_0、g_2，a_6为应力的函数，以上确定了这三个函数在给定应力水平下的值，要拟合g_0、g_2、a_6是极为复杂的，如Cardon[5]得到的数值函数几乎就找不出其解析形式，值曲线的拟合需要大量的实验数据，本文按Brinson[6]的假设：g_0，g_2，a_6的函数为应力σ的线性函数，根据以上的实验结果，利用最小二乘法，则可以得到下列函数形式：

$$g_0=1+0.0147\ (\sigma-\sigma^*) \qquad a_6=1+0.0238\ (\sigma-\sigma^*)$$

$$g_2=1+0.0763\ (\sigma-\sigma^*) \qquad \sigma^*=35.7\text{MPa}$$

有了上述的函数和图1的实验应力，可以计算各应力水平下的g_0，g_2，a_6值，并联合第四节的六个参数值，能够描绘出各应力水平下的理论曲线，其结果与实验的详细比较见图4。

从图4可以看出，有些结果相差太大，这说明所取的线性函数是非常勉强的，要完善这一结果需要作较多的实验以用来选取函数形式。

6 小　结

(1) 由于改进了Schapery本构关系，本文提出了一套实验方案用来测定其中的参数，拟合的曲线与实验符合得较好（图3）。

(2) 非线性方程的参数拟合采用了最小二乘法和变量离散联合的方法，其在精度上和计算时间上都是非常理想的。

(3) 方程中的g_0、g_2、a_6的函数设定为线性函数，精度很难保证（图4），要准确地得到这些函数的数值曲线或解析形式，需要作大量的实验。

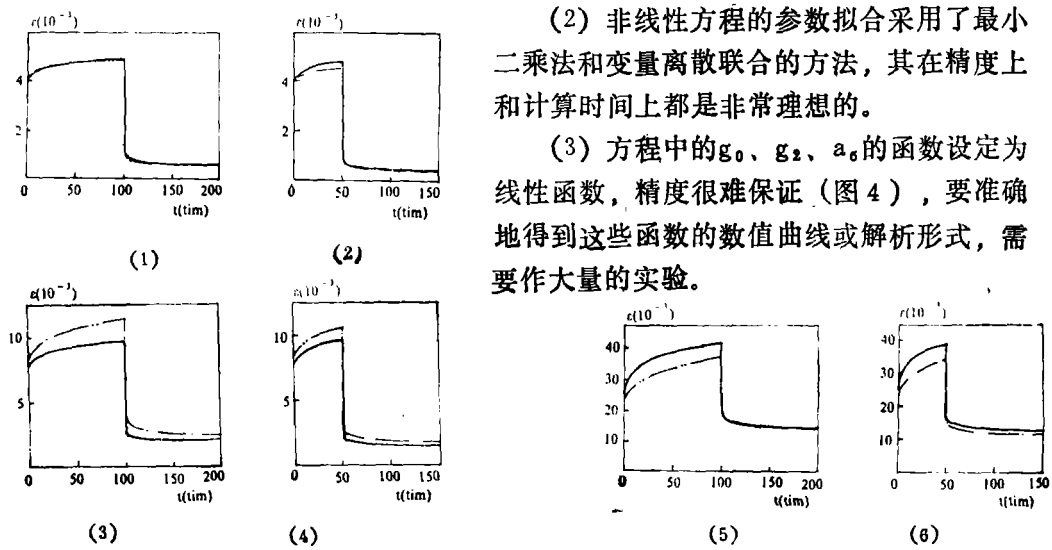

图4　各种应力水平下的理论曲线与实验曲线比较

———实验曲线　　—·—·—理论曲线

参 考 文 献

1 Lou Y C, Schapery R C.J Comp Mater.1971, 5: 208-234

2 Lemaitre J.Nuclear Engng Desi.1984, 80: 233-245

3 Hui C Y.Elastic-Plastic Fracture. V1, ASTM803. 1983: 573-593

4 蔡良武，张双寅.第五届全国复合材料会议论文集，1989：312-317

5 Cardona A H.Proc. In: ICCM-7. 1989, V2: 15-20

6 Tuttle M E , Brinson H F.Experimental Mechanics. March, 1986: 89-102

CREEP CONSTITUTIVE EQUATION AND EXPERIMENTAL DETERMINATION OF COMPOSITE MATERIALS

Part Ⅱ: Experimental Determination

Xiang Xiaoyun Zhang Shuangyin

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract The constitutive equations of composite materials have been obtained in the first part of this paper.Based on the previous study, the modified form of constitutive equation of creep deformation is given in this part. The strain in two stages of creep and recovery are experimentally recorded, which is used to determine the parameters of the constitutive equation, In view of the complexity of the nonlinear equation, this paper proposed a method to determine the parameters, in which the least-square-error method is used in conjunction with the discreteness of variables. Then the theoretical formulas are modelled by data fitting and each kind of strains is separated. Finally, based on a few of available experimental data, the three parametric functions of stress in the constitutive relationship are obtained.

Key words constitutive equation, creep-recovery, experimental determination, modelling.