第11卷 第1期 复合材料学报 Vol.11 No.1
1994年3月 ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA March 1994

含球夹杂复合材料的力学性能分析

村善义 吴林志

(哈尔滨工业大学，150001)

摘 要 对于复合材料的有效弹性模量，Eshelby[1]的等效夹杂法和Budiansky和Wu[3]的自相似法仅仅考虑了夹杂的形状及基体和夹杂的力学性能，而忽略了夹杂的大小和相互作用。本文认为当复合材料的夹杂体积分数增大时，夹杂之间的相互作用影响是比较显著的。基于这一事实，本文在考虑夹杂的形状，大小，分布和相互作用前提下推导了材料的有效弹性模量。最后，本文给出了夹杂分布和基体泊松比对复合材料有效弹性模量的影响，并且部分结果与实验进行了比较。从比较的结果来看，本文的结果与实验值吻合的很好。

关键词 微结构，相互作用，球夹杂，有效弹性模量

1 引 言

复合材料一般由纤维或颗粒进行增强。增强物的微结构特征、体积分数以及其性能对复合材料的宏观力学性能都有直接影响。因此，研究颗粒分布和基体泊松比对复合材料宏观力学性能的影响无论是对进一步弄清材料在一定载荷下的力学特征还是对材料的研制和设计都有重要意义。

对于含有夹杂的非均匀体，当夹杂的体积分数趋于0.5时，目前的理论不能给出令人满意的结果。其原因主要在于：1）未从材料内部微结构观点出发去考虑夹杂之间的相互作用；2）对材料内部微观场进行统计时所作的过强假定。

Eshelby[1]采用等效夹杂法给出了含有夹杂非均匀体的有效弹性模量，但这一方法仅局限于夹杂体积份数较小情况。为了克服上述缺点，Budiansky和Wu[3]和Kröner[4]提出了自相似法。另外，对有效弹性模量的上下限问题，Hashin和Shtrikman[5]采用的是变分法，而Nomura和Chou[6]采用的是局部应变的扰动展开法。上述四种方法仅考虑了夹杂的形状，而忽略了夹杂的大小、分布和相互作用影响。因而，这些方法具有一定局限性。Kunin[2]在考虑夹杂形状的同时，还考虑了夹杂的分布影响，但由于附加了过多假设，因而其理论同样具有局限性。

为了克服上述理论的缺点，本文从材料的微结构观点出发考虑了夹杂的形状、大小、分

本文于1991年10月9日收到，修改稿1992年6月收到

布和相互作用对复合材料有效弹性模量的影响。这样，本文就较详尽地考虑了材料微结构的信息，从而较真实地反映了材料特性。

2 有效弹性模量的确定

由文〔2〕知，含有夹杂的非均匀体内部的应变和应力场为

$$\varepsilon(x)=\varepsilon_0(x)-\sum_{i=1}^{n}\int_V K_0(x-x')C_{1i}\varepsilon_i^+(x')V_i(x')\mathrm{d}x' \tag{1}$$

$$\sigma(x)=\sigma_0(x)-\sum_{i=1}^{n}\int_V S_0(x-x')B_{1i}\sigma_i^+(x')V_i(x')\mathrm{d}x' \tag{2}$$

式中，ε_0和σ_0分别为外载作用到均匀介质(基体)上所产生的应变和应力场；$\varepsilon_i^+(x)$和$\sigma_i^+(x)$分别为第i个夹杂内部的应变和应力场；$V_i(x)$ 为第i个夹杂的区域特征函数；n为夹杂的数目；V为非均匀体体积；$K_0(x)$ 和$S_0(x)=C_0\delta(x)-C_0K_0(x)C_0$（$\delta(x)$为Dirac-$\delta$函数，而$C_0$为基体的弹性模量张量）分别为对应于应变和应力的Green算子，其具体表达式见（13）式；C_{1i}和B_{1i}分别为第i个夹杂与基体的弹性模量之差和弹性柔度之差。

为简便起见，我们可以设想存在一种外载分布，此外载作用到均匀介质C_0上恰好产生一个常应力和应变场，而此时的$\sigma(x)$和$\varepsilon(x)$为上述外载作用到非均匀体上所产生的应力和应变场。为了求得材料的有效弹性模量，我们引入符号 $\langle f(x)\rangle$ 来表示$f(x)$的空间平均值，其定义如下

$$\langle f(x)\rangle=\frac{1}{V}\int_V f(x)\mathrm{d}x$$

对(1) 和(2) 两式求平均值可得

$$\langle\varepsilon(x)\rangle=\varepsilon_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{V}\int_V\int_V K_0(x-x')C_{1i}\varepsilon_i^+(x')V_i(x')\mathrm{d}x'\mathrm{d}x \tag{3}$$

$$\langle\sigma(x)\rangle=\sigma_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{V}\int_V\int_V S_0(x-x')B_{1i}\sigma_i^+(x')V_i(x')\mathrm{d}x'\mathrm{d}x \tag{4}$$

在本文所研究的问题中，假定夹杂远小于复合材料宏观体积，这一假定对小颗粒复合材料来说是合适的。在此基础上，我们进一步假定夹杂内部的应变为一常数，且不同夹杂其内部的应变不同。有了上述两条假定，我们可将(3) 和 (4) 两式变为

$$\langle\varepsilon(x)\rangle=\varepsilon_0-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{V}\int_V\mathrm{d}x\int_V K_0(x-x')V_i(x')\mathrm{d}x'\right]C_{1i}\varepsilon_i^+ \tag{5}$$

$$\langle\sigma(x)\rangle=\sigma_0-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{V}\int_V\mathrm{d}x\int_V S_0(x-x')V_i(x')\mathrm{d}x'\right]B_{1i}C_i\varepsilon_i^+ \tag{6}$$

式中，C_i表示第i个夹杂的弹性模量张量。

对于(5) 式中的$\frac{1}{V}\int_V dx\int_V K_0(x-x')V_i(x')dx'$，由于$K_0(x-x')$仅依赖于$x-x'$，所以可将坐标原点取在第$i$个夹杂内部。这样，由文〔6〕可知，上述积分可相当精确地表示为

$$\frac{1}{V}\int_V dx\int_V K_0(x-x')V_i(x')dx'=V_i\int_V K_0(x)dx=V_iA_0 \tag{7}$$

式中，V_i表示第i个夹杂的体积分数，而A_0是由Eshelby[1]引入的张量，其具体表达式见文〔7〕。

将 (7) 式代入 (5) 式中可得

$$\langle\varepsilon(x)\rangle=\varepsilon_0-A_0\sum_{i=1}^{n}C_{1i}\langle V_i(x)\varepsilon_i^+(x)\rangle \tag{8}$$

由$S_0(x-x')$ 的定义，同样可将 (6) 式变为

$$\langle\sigma(x)\rangle=\sigma_0-D_0\sum_{i=1}^{n}B_{1i}C_i\langle V_i(x)\varepsilon_i^+(x)\rangle \tag{9}$$

式中，$D_0=C_0-C_0A_0C_0$。

由文〔7〕知，$K_0(x)$是x的偶函数。将$V_i(x)$乘以 (1) 式的两边再取平均值得

$$\langle V_i(x)\varepsilon_i^+(x)\rangle=V_i\varepsilon_0-\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{V}\int_V V_i(x)dx\int_{V'}K_0(x')V_j(x+x')dx'\right]C_{1j}\varepsilon_j^+ \tag{10}$$

式中，V'表示V平移一个矢量x后的体积。

当坐标原点取在第i个夹杂内部时，x与V相比是一个小量。这样，可以用V代替V'，即 (10) 式变为

$$\langle V_i(x)\varepsilon_i^+(x)\rangle=V_i\varepsilon_0-\sum_{j=1}^{n}\left[\int_V K_0(x')\langle V_i(x)V_j(x+x')\rangle_x dx'\right]C_{1j}\varepsilon_j^+ \tag{11}$$

式中，$\langle V_i(x)V_j(x+x')\rangle_x$表示$V_i(x)V_j(x+x')$ 对x求平均值。

对任意两个球夹杂i和j，我们就最一般情况讨论积分$\int_V K_0(x')\langle V_i(x)V_j(x+x')\rangle_x dx'$。当$i=j$时

$$\langle V_i(x)V_i(x+x')\rangle=\begin{cases}V_i\left(1-\frac{|x|}{2r_i}\right)^2\left(1+\frac{|x|}{4r_i}\right), & |x|\leqslant 2r_i\\ 0, & |x|>2r_i\end{cases} \tag{12}$$

式中，r_i为第i个球夹杂半径。

如图 1，当$i\neq j$时，d_{ij}表示两球心之间的距离。这时

$$\theta_{ij}=\sin^{-1}\frac{(r_i+r_j)}{d_{ij}}$$

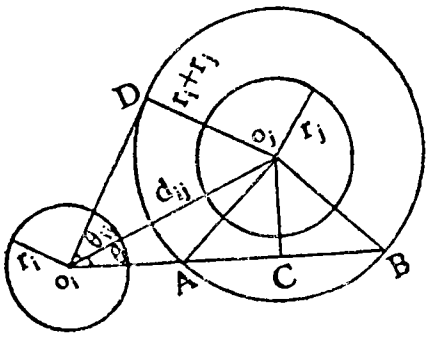

图 1 两个球夹杂的相互位置

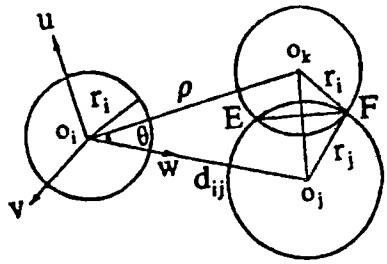

图 2 满足$\sqrt{|r_i^2-r_j^2|}<R\leqslant r_i+r_j$时的$\langle V_i(x)V_j(x+x')\rangle_x$计算

$$\overline{O_iA}=d_{ij}\cos\theta-\sqrt{(r_i+r_j)^2-(d_{ij}\sin\theta)^2}$$

$$\overline{O_iB}=d_{ij}\cos\theta+\sqrt{(r_i+r_j)^2-(d_{ij}\sin\theta)^2}$$

对于$\langle V_i(x)V_j(x+x')\rangle_x$，由图 2 可知当矢量$x'$相对于坐标系$O_i-uvw$的球坐标($\rho$，$\theta$，$\varphi$) 满足Ⅰ) $0<\theta<\theta_{ij}$和Ⅱ) $\overline{O_iA}<\rho<\overline{O_iB}$时，$\langle V_i(x)V_j(x+x')\rangle_x$才不为零。由于篇幅所限，下面仅就等体积球夹杂情况给出$\langle V_i(x)V_j(x+x')\rangle_x$依赖于$x'$的表达式（对非等体积球夹杂情况，同样可求出$\langle V_i(x)V_j(x+x')\rangle_x$的表达式），即

$$\langle V_i(x)V_j(x+x')\rangle=V_jJ_j(R)$$

式中，$R=\sqrt{d_{ij}^2+\rho^2-2d_{ij}\rho\cos\theta}$

这样，我们就完全确定了$\langle V_i(x)V_j(x+x')\rangle_x$与$x'$的关系。对于（11）式中的$K_0(x)$，由文〔7〕可得均匀介质$C_0$的位移Green算子，再由文〔2〕可求得$K_0(x)$ 的表达式为

$$(K_0(x))_{\alpha\beta\lambda\mu}=-\frac{1}{8\pi\mu_0}\left[\frac{\lambda_0+3\mu_0}{\lambda_0+2\mu_0}\left(\frac{3\delta_{\alpha\lambda}x_\beta x_\mu}{x^5}-\frac{\delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu}}{x^3}\right)+\frac{\lambda_0+\mu_0}{\lambda_0+2\mu_0}\left(\frac{2\delta_{\mu(\lambda}\delta_{\alpha)\beta}}{x^3}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{12\delta_{(\mu(\lambda}x_{\alpha)}x_{\beta)}}{x^5}-\frac{3\delta_{\mu\beta}x_\alpha x_\lambda}{x^5}-\frac{15x_\alpha x_\beta x_\lambda x_\mu}{x^7}\right)\right]_{(\alpha\beta)(\lambda\mu)} \quad (13)$$

式中 $\delta_{\mu(\lambda}\delta_{\alpha)\beta}=\frac{1}{2}(\delta_{\mu\lambda}\delta_{\alpha\beta}+\delta_{\mu\alpha}\delta_{\lambda\beta})$

$$\delta_{(\mu(\lambda}x_{\alpha)}x_{\beta)}=\frac{1}{4}(\delta_{\mu\lambda}x_\alpha x_\beta+\delta_{\mu\alpha}x_\lambda x_\beta+\delta_{\beta\lambda}x_\alpha x_\mu+\delta_{\beta\alpha}x_\lambda x_\mu)。$$

对于局部坐标系O_i-uvw（见图 2）．我们可得

$$\int_V K_0(x')\langle V_i(x)V_j(x+x')\rangle_x dx'=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\theta_{ij}}\sin\theta\, d\theta\int_{\overline{O_iA}}^{\overline{O_iB}}T^{-1}\cdot K_0(\rho,\theta,\varphi)\cdot T\cdot$$

$$\langle V_i(x)V_j(x+x')\rangle_x\rho^2 d\rho \quad (14)$$

式中，T是应变张量的坐标变换矩阵（坐标系O_i-uvw相对于$O-x_1x_2x_3$），其具体表达式

见文[8]，而T^{-1}为T的逆矩阵。

对于(14)式中的$K_0(\rho,\theta,\varphi)$，只要将$x_1=\rho\sin\theta\cos\varphi$，$x_2=\rho\sin\theta\sin\varphi$和$x_3=\rho\cos\theta$代入（13）式中即可求得。由于计算（14）式的积分没有任何原则性困难，因而不妨假定

$$\int_V K_0(x')\langle V_i(x)V_j(x+x')\rangle_x dx'=F_{ij}V_j \tag{15}$$

将（12）和（15）两式代入（11）式中，并由文[6]可得

$$\langle V_i(x)\varepsilon_i^+(x)\rangle=V_i\varepsilon_0-A_0C_{ii}\langle V_i(x)\varepsilon_i^+(x)\rangle$$

$$-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}F_{ij}C_{ij}\langle V_j(x)\varepsilon_j^+(x)\rangle \tag{16}$$

令$i=1,2,\cdots n$，我们可以解出$\langle V_i(x)\varepsilon_i^+(x)\rangle$与$\varepsilon_0$的关系，然后再代入（8）和（9）两式中即可确定材料的有效弹性模量。但对于夹杂是同种、等体积，且分布为均匀的复合材料，我们可进行如下求解。对（16）式两边的i求和可得

$$\sum_{i=1}^{n}\langle V_i(x)\varepsilon_i^+(x)\rangle=V_f\varepsilon_0-A_0C_1\sum_{i=1}^{n}\langle V_i(x)\varepsilon_i^+(x)\rangle$$

$$-\Big(\sum_{i=1,i\neq j}^{n}F_{ij}\Big)C_1\sum_{j=1}^{n}\langle V_j(x)\varepsilon_j^+(x)\rangle \tag{17}$$

式中，V_f为夹杂的体积份数，$C_1=C_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$，而$\sum_{i=1,i\neq j}^{n}F_{ij}$可相当近似地作为常数。

将（17）式代入（8）和（9）两式中可得

$$C^*=C_0+V_fC_1[I+(1-V_f)A_0C_1+\sum_{i=1,i\neq j}^{n}F_{ij}C_1]^{-1} \tag{18}$$

作为本文的算例，本文考虑了含有等体积球夹杂的两种排列方式（图3和图4）。另外，在图3和图4的排列方式中本文在$\sum_{i=1,i\neq j}^{n}F_{ij}$项的计算中分别考虑了满足$\overline{O_iO_j}\leqslant 6d$和$\overline{O_iO_j}\leqslant 9d$的所有球夹杂对第$j$个球夹杂的影响。从计算结果来看，当$\overline{O_iO_j}\leqslant 4d$时，$\sum_{i=1,i\neq j}^{n}F_{ij}$的收敛性已很好。

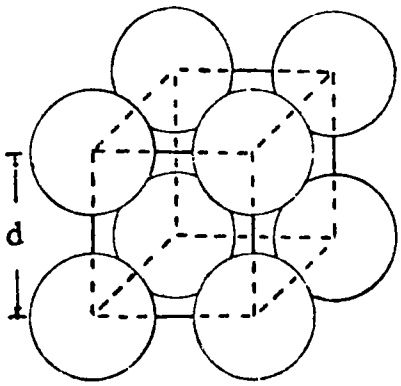

图3 等体球夹杂的立方排列

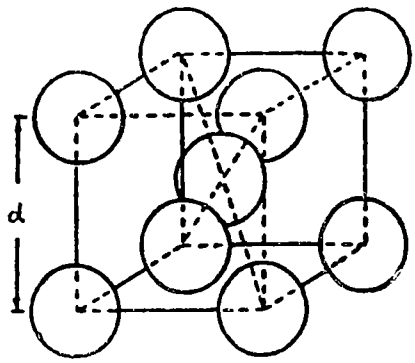

图4 等体球夹杂的体心排列

3 结 论

图 5 中实心点是文〔9〕在$E_f/E_m=25$，$\nu_f=0.23$和$\nu_m=0.39$情况下的实验值，而实线①，②，③，④和⑤是本文在基体泊松比ν_m分别为0.25，0.3，0.35，0.39和0.43情况下的

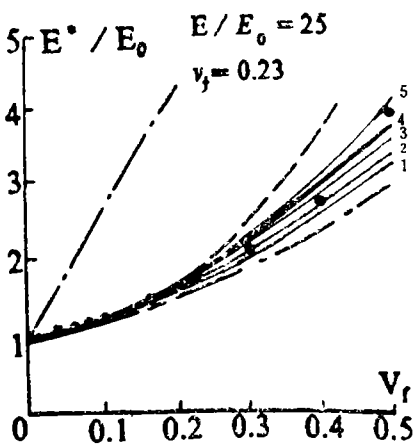

图5 有效杨氏模量与球夹杂体积分数的关系

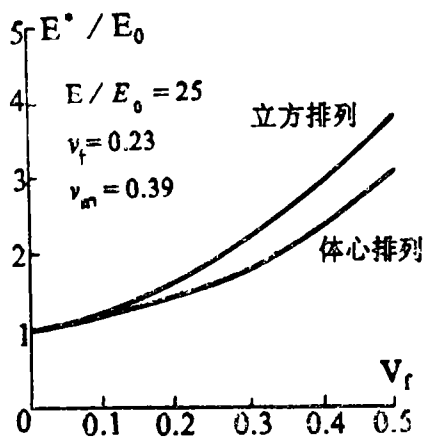

图6 有效杨氏模量与球夹杂体积分数的关系

计算结果。由图 5 可见，增大ν_m可提高复合材料的有效弹性模量。另外，为了比较，图 5 中也列出了自相似法（虚线）和Hashin-Shtrikman的上下限（点画线）在$E_f/E_m=25$，$\nu_f=0.23$和$\nu_m=0.39$时的结果。从图中可见，本文的计算结果与实验值吻合的很好。

图 6 是两种排列方式的比较图。从图6可见，按图3的方式排列，复合材料的有效弹性模量明显高于图 4 的。由此可见，在研制和设计新材料时，必须考虑上述各种因素。

参 考 文 献

1 Eshelby J D. Proc Roy Soc. A241 1957:376-396

2 Kunin I A. Elastic Media with Microstructure II, Springer-Verlag, New York, 1983; 103:170-181

3 Budiansky B, Wu T T. Proc 4th U.S. Nat Congr Appl Mech, 1962:1175-1185.

4 Kroner E. Z Phys, 1958; 151:504.518

5 Hashin Z, Shtrikman S. J Mech Phys Solids, 1963; 11: 127-134

6 Nomura S, Chou T W. J Appl Mech, 1984; 51: 504-545

7 Mura T. Micromechanics of Defects in Solids, Second, Martinus Nijhoff, The Netherlands, 1987

8 徐秉业. 弹性与塑性力学. 机械工业出版社, 1981: 25

9 Smith J C. Society of Plastics Engineers, EPS Div Meeting, Akron, Ohio, 1975

ANALYSIS OF MECHANICAL PROPERTIES OF COMPOSITE MATERIALS WITH SPHERICAL PARTICULATES

Du Shanyi　　Wu Linzhi

(Harbin Institute of Technology, 150001)

Abstract For the effective elastic moduli (EEM) of composites only the shapes of inclusions and the mechanical properties of matrix and inclusions are considered, and the sizes as well as the interaction of inclusions are discarded by the Eshelby equivalent inclusion method[1], the Budiansky and Wu self-consistent method[3]. The paper takes it into account that the volume fraction of inclusions increases and the interaction of ones is more prominent. According to this, EEM of materials are deduced by considering the shapes, sizes, distribution and interaction of inclusions in the paper. Finally, the distribution of inclusions and the Poisson-ratio of matrix which affect EEM of composites are given and some results are compared with the experimental data reported in the paper. From the comparison of results, the results of the paper coincide well with the experimental data.

Key Words microstructure, interaction, spherical inclusions, effective elastic moduli.