第13卷 第4期 复 合 材 料 学 报 Vol. 13 No. 4
1996年 10月 ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA October 1996

# 热释电材料的一般解*

杨晓翔 申胜平 匡震邦 范家齐
(西安交通大学建力学院, 西安710049) (大庆石油学院机械系, 安达151400)

摘 要 利用 Stroh 公式, 给出了热释电材料热弹性问题的一般解, 此解适用于四对复共轭压电本征值和一对热本征值互不相等的情况。然后, 讨论了压电本征值问题出现重根时退化热释电材料的通解, 并给出相应通解的形式。当热本征值与一个或多个压电本征值相等时, 给出了退化热释电材料热弹性问题特解的具体形式。最后, 通过共线界面裂纹问题证明了退化热释电材料和非退化热释电材料一般解中的任意函数 $f_\alpha(z_\alpha)$ 形式相同, 只是其中的某些系数有所变化。

关键词 热释电材料, 本征值问题, 界面裂纹

由于热释电材料的热-机-电耦合性质, 经常被用来制作压敏和热敏元器件。在机敏结构中通常被用作传感器和调节器材料, 机敏结构在航空、航天和振动控制等各方面发挥着重要的作用。作为机敏结构的梁、板和壳等是由压电材料和基体组成的复合材料构成, 有的把压电材料粘接在梁、板和壳的表面, 有的深埋在其内部, 有的与基体组成层合结构等。在制造和应用机敏结构过程中不可避免地要形成某些缺陷, 因此, 对压电材料进行力学分析, 可给机敏结构的设计和应用提供可靠的理论基础。

Suo 等[1]和申等[2]基于求解各向异性弹性体的 Stroh[3]公式分别求解了压电体平面问题和热释电体热弹性问题的一般解。但是, 他们均假设本征根是单根, 且与热本征值不相等。如果本征根是重根, 那么我们称这种材料为 "退化材料", 这种退化是数学意义上的退化, 并不是物理意义上的退化, 此时, 文献[1, 2]给出的一般解必须进行修正。Barnett 和 Lothe[4]给出了三个实矩阵的积分公式, 此公式绕过了本征值和本征向量的计算问题。而 Ting[5]指出在某些问题中最后的解不能完全用 Barnett-Lothe 张量和它的伴随张量表示, 必须修正一般解才能适用于退化材料[6]。Ting 讨论的均是均匀各向异性弹性体的退化解, Wu[7]讨论了平面各向异性弹性体热弹性问题的热本征值与各向异性体本征值相等时特解的具体形式。本文则综合上述研究结果, 对热释电材料的热弹性问题本征值出现重根, 或者热本征值与一个或多个压电本征值相等时, 退化热释电材料的通解和特解的形式进行了详细讨论。本文也分析了退化热释电材料热弹性界面裂纹问题。

## 1 非退化热释电材料的一般解

所谓非退化热释电材料是指完全各向异性压电体。在空间取一直角坐标系 $ox_i(i = 1, 2, 3)$。令 $u_i, \varphi, \sigma_{ij}, D_{ij}, \gamma_{ij}, E_i$ 和 $h_i$ 分别表示位移、电势、应力、电位移、应变、电场强度和热流, 令 $T$

* 本文于1995年10月18日收到修改稿, 1995年3月3日收到初稿。国家自然科学基金资助项目

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://ww

为压电体中的温度与环境温度之差。那么, 在体力为零, 体电荷密度为零, 无内热源和定常温度场的情况下, 压电体中热弹性问题的基本方程为[1,2,7]

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\gamma_{kl} - e_{sji}E_s - \beta_{ij}T \quad (1a) \qquad E_i = -\varphi_{,i} \quad (1e)$$

$$D_i = \epsilon_{is}E_s + e_{irs}\gamma_{rs} - \tau_i T \quad (1b) \qquad \sigma_{ij,i} = 0 \quad (1f)$$

$$h_i = -\lambda_{ij}T_{,j} \quad (1c) \qquad D_{i,i} = 0 \quad (1g)$$

$$\gamma_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \quad (1d) \qquad h_{i,i} = 0 \quad (1h)$$

式中 $c_{ijkl}, e_{kij}, \epsilon_{ij}, \beta_{ij}, \tau_i$ 和 $\lambda_{ij}$ 分别代表弹性系数、压电系数、介电系数、热膨胀系数、热释电系数和热传导系数; 不特殊说明, 重复下标均表示求和。

把(1c) 式代入(1h) 式, (1d)、(1e) 式先代入(1a) 、(1b) 式然后再代入(1f)、(1g) 式得 Navier 型控制方程

$$\lambda_{ij}T_{,ij} = 0 \quad (2a)$$

$$(c_{ijrs}u_r + e_{sji}\varphi)_{,si} - \beta_{ij}T_{,i} = 0 \quad (2b)$$

$$(-\epsilon_{is}\varphi + e_{irs}u_r)_{,si} + \tau_i T_{,i} = 0 \quad (2c)$$

在求解具体问题时, 控制方程(2) 应满足下列边界条件

热学边界条件: $h_i n_i = h^0$, 在 $S_h$ 上, $T = T^0$, 在 $S_T$ 上 (3a)

力学边界条件: $\sigma_{ij}n_i = t_j^0$, 在 $S_\sigma$ 上, $u_i = u_i^0$, 在 $S_u$ 上 (3b)

电学边界条件: $D_i n_i = -\omega^0$, 在 $S_\omega$ 上, $\varphi = \varphi^0$, 在 $S_\varphi$ 上 (3c)

式中 $h^0, T^0, t_j^0, u_i^0, \omega^0$ 和 $\varphi^0$ 分别为给定表面上的热流、温度、面力、位移、面电荷密度和电势。如果全部边界用 $S$ 表示, 则有 $S = S_h + S_T = S_\sigma + S_u = S_\omega + S_\varphi$。本文只讨论位移分量 $u_i$, 电势 $\varphi$ 和温度 $T$ 与坐标 $x_3$ 无关的情况, 即在 $(x_1, x_2)$ 平面内的准三维问题 。

方程(2a) 中只含温度场, 与位移场和电场不耦合, 可单独求解, 其解的形式为

$$T = 2\mathrm{Re}\{g'(z_t)\}, \qquad h_i = -2\mathrm{Re}\{(\lambda_{i1} + p_t\lambda_{i2})g''(z_t)\} \quad (4)$$

式中 $z_t = x_1 + p_t x_2$ 为讨论温度场时的复变量, $p_t$ 为下列方程的根

$$\lambda_{11} + (\lambda_{12} + \lambda_{21})p + \lambda_{22}p^2 = 0 \quad (5)$$

上式有一对共轭复根 $p_t$ 和 $\bar{p}_t$, 取 $\mathrm{Im}p_t > 0$

联立方程(2b) 和(2c) , 在不考虑温度 $T$ 的情况下, 齐次方程组的通解形式为[1,2]

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \varphi \end{Bmatrix} = \boldsymbol{a}f(x_1 + px_2) \quad (6)$$

把(6) 式代入(2b) 和(2c) 式可得下列本征值问题

$$\boldsymbol{D}(p)\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{Q} + p(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{R}^T) + p^2\boldsymbol{W}]\boldsymbol{a} = 0 \quad (7)$$

式中上标 $T$ 表示转置, 且有

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_0 & \boldsymbol{e}_{11} \\ \boldsymbol{e}_{11}^T & -\epsilon_{11} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_0 & \boldsymbol{e}_{21} \\ \boldsymbol{e}_{12}^T & -\epsilon_{12} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_0 & \boldsymbol{e}_{22} \\ \boldsymbol{e}_{22}^T & -\epsilon_{22} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\left.\begin{aligned} &(Q_0)_{ik} = c_{i1k1}, \quad (R_0)_{ik} = c_{i1k2}, \quad (W_0)_{ik} = c_{i2k2}, \quad (i, k = 1, 2, 3) \\ &\boldsymbol{e}_{\alpha\beta} = [e_{\alpha1\beta} \quad e_{\alpha2\beta} \quad e_{\alpha3\beta}]^T, \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

由于应变能是正定的, $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{W}$ 是对称阵, 可以证明, (7) 式有 4 个共轭复数对 $p_\alpha, \bar{p}_\alpha (\alpha = 1, 2, 3, 4)$ 组成的 8 个复根。不失一般性, 取 $\mathrm{Im}p_\alpha > 0$, 则有 $z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_2 (\alpha = 1, 2, 3, 4)$, 将本征值 $p_\alpha$ 代入(7) 可解得相应的本征向量 $\boldsymbol{a}_\alpha$ 。

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://ww

引入应力函数 $\Phi = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3 \quad \Phi_4]^T$, 且有

$$\sigma_{i1} = -\Phi_{i,2},\quad \sigma_{i2} = \Phi_{i,1},\quad D_1 = -\Phi_{4,2},\quad D_2 = \Phi_{4,1},\quad (i = 1, 2, 3) \tag{10}$$

把(6)式代入(1a)和(1b)式, 再利用(10)式可得

$$\Phi = \boldsymbol{b} f(x_1 + p x_2) \tag{11}$$

$$\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{R}^T + p\boldsymbol{W}]\boldsymbol{a} = -(1/p)(\boldsymbol{Q} + p\boldsymbol{R})\boldsymbol{a} \tag{12}$$

在 $p_\alpha \neq p_t$ 时, 令方程(2b)和(2c)的特解形式为

$$\boldsymbol{U}_t = \boldsymbol{c} g(x_1 + p_t x_2) \tag{13}$$

把(13)式代入方程(2b)和(2c)得确定 $\boldsymbol{c}$ 的方程

$$\boldsymbol{D}(p_t)\boldsymbol{c} = \beta_1 + p_t \beta_2 \tag{14}$$

式中

$$\beta_1 = [\beta_{11}\quad \beta_{21}\quad \beta_{31}\quad \tau_1]^T,\quad \beta_2 = [\beta_{12}\quad \beta_{22}\quad \beta_{32}\quad \tau_2]^T \tag{15}$$

对应 $\boldsymbol{b}$ 有

$$\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{R}^T + p_t\boldsymbol{W})\boldsymbol{c} - \beta_2 = -\frac{1}{p_t}(\boldsymbol{Q} + p_t\boldsymbol{R})\boldsymbol{c} + \frac{1}{p_t}\beta_1 \tag{16}$$

$\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 称作与热本征值 $p_t$ 相应的广义本征向量。

如果定义

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1\quad \boldsymbol{a}_2\quad \boldsymbol{a}_3\quad \boldsymbol{a}_4],\ \boldsymbol{B} = [\boldsymbol{b}_1\quad \boldsymbol{b}_2\quad \boldsymbol{b}_3\quad \boldsymbol{b}_4] \\ &\boldsymbol{f}(z_\alpha) = [f_1(z_1)\quad f_2(z_2)\quad f_3(z_3)\quad f_4(z_4)] \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

那么, 当 $p_\alpha(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ 和 $p_t$ 互不相等时, 存在温度场时压电体的一般解形式为

$$T = g'(z_t) + \overline{g'(z_t)} \tag{18a}$$

$$h_i = -(\lambda_{i1} + p_t\lambda_{i2})g''(z_t) - (\lambda_{i1} + \bar{p}_i\lambda_{i2})\overline{g''(z_t)} \tag{18b}$$

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(z_\alpha) + \boldsymbol{c}g(z_t) + \bar{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{f}(z_\alpha)} + \bar{\boldsymbol{c}}\overline{g(z_t)} \tag{19a}$$

$$\Phi = \boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(z_\alpha) + \boldsymbol{d}g(z_t) + \bar{\boldsymbol{B}}\overline{\boldsymbol{f}(z_\alpha)} + \bar{\boldsymbol{d}}\overline{g(z_t)} \tag{19b}$$

式中 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为非奇异阵。定义矩阵

$$\boldsymbol{Y} = i\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1} \tag{20}$$

式中 $i = \sqrt{-1}$, $\boldsymbol{Y}$ 阵为 Hermitain 矩阵[1]。对于双材料界面问题定义

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}} + \bar{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}} \tag{21}$$

式中下标Ⅰ和Ⅱ分别表示材料Ⅰ和材料Ⅱ中的物理量。

## 2　退化热释电材料的通解

在上一节中我们给出了热释电材料在压电本征值 $p_\alpha(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ 和热本征值 $p_t$ 互不相等时的一般解。当出现相等的本征值时, 即本征方程(7)有重根出现, 此时对应正交各向异性或横观各向同性压电体, 一般解(19)式需要修正。为了讨论方便, 首先引入一定理。

定理[8]: 设 $p$ 为 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{D} = d_{ij}(p)$ 的本征值, $\boldsymbol{a} = a_i(p)$ 为矩阵 $\boldsymbol{D}$ 对应 $p$ 的本征向量, $\mathscr{D}$ 为矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的行列式值($\mathscr{D} = |\boldsymbol{D}|$)。如果矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的秩为 $m$, 且 $\mathrm{rank}\boldsymbol{D} = m < n$, 当 $p = p_1$ 时有

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{a} = 0 \tag{22}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{a})}{\mathrm{d}p} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{D}}{\mathrm{d}p}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{D}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}p} = 0 \tag{23}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2(\boldsymbol{D}\boldsymbol{a})}{\mathrm{d}p^2} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{D}}{\mathrm{d}p^2}\boldsymbol{a} + 2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{D}}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}p} + \boldsymbol{D}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}p^2} = 0 \tag{24}$$

那么, 方程(22)有非零解 $\boldsymbol{a}$ 的充要条件:

$$\mathscr{D} = 0 \tag{25}$$

方程(22)和(23)有非零解 $\boldsymbol{a}$ 和 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}p}$ 的充要条件:

$$\mathscr{D} = \frac{\mathrm{d}^{n-m}\mathscr{D}}{\mathrm{d}p^{n-m}} = 0 \tag{26}$$

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www

方程(22),(23) 和(24) 有非零解 $\boldsymbol{a}$, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}p}$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}p^2}$ 的充要条件:

$$\mathscr{D}=\frac{\mathrm{d}^{n-m}\mathscr{D}}{\mathrm{d}p^{n-m}}=\frac{\mathrm{d}^{2(n-m)}\mathscr{D}}{\mathrm{d}p^{2(n-m)}}=0 \tag{27}$$

对于压电材料 $n=4$。如果 $p_1$ 为单根,则行列式 $\mathscr{D}$ 为 $p_1$ 的一次多项式,因此有 $\left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{D}}{\mathrm{d}p_1}\right|_{p=p_1}\neq 0$。所以对应 $p_1$ 只有一个本征向量 $\boldsymbol{a}$,即 $m=n-1=3$。由定理可知只有(22) 式有非零解。所以在无重根的情况下通解(不含温度场) 的形式为(19) 式中去掉第二项和第四项。

**2.1 $p_1$ 为二重根**

如 $p_1$ 为二重根,则行列 $\mathscr{D}$ 为 $p_1$ 的二次多项式,因此有 $\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{D}}{\mathrm{d}p_1^2}\right|_{p=p_1}\neq 0$。

1. 如果对应 $p_1$ 有两个独立的本征向量 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$,则 $m=n-2=2$。由定理可知只有(22) 式有非零解,所以通解的形式仍用(19) 式去掉第二项和第四项表示。

2. 如果对应 $p_1$ 只有一个独立的本征向量 $\boldsymbol{a}_1$,则 $m=n-1=3$,由定理可知方程(22) 和(23) 均有非零解。因此通解的形式可写成[6]

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{f}(z)+x_2\boldsymbol{a}_1f'_1(z_1)+\bar{\boldsymbol{A}}'\overline{\boldsymbol{f}(z)}+x_2\bar{\boldsymbol{a}}_1\overline{f'_1(z_1)} \tag{28a}$$

$$\Phi=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{f}(z)+x_2\boldsymbol{b}_1f'_1(z_1)+\bar{\boldsymbol{B}}'\overline{\boldsymbol{f}(z)}+x_2\bar{\boldsymbol{b}}_1\overline{f'_1(z_1)} \tag{28b}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{A}'=[\boldsymbol{a}_1\quad \boldsymbol{a}'_1\quad \boldsymbol{a}_3\quad \boldsymbol{a}_4],\quad \boldsymbol{a}'_1=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}_1}{\mathrm{d}p_1}\\&\boldsymbol{B}'=[\boldsymbol{b}_1\quad \boldsymbol{b}'_1\quad \boldsymbol{b}_3\quad \boldsymbol{b}_4],\quad \boldsymbol{b}'_1=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}_1}{\mathrm{d}p_1}\\&\boldsymbol{f}(z)=[f_1(z_1)\quad f_1(z_1)\quad f_3(z_3)\quad f_4(z_4)]^T\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

$\boldsymbol{a}'_1$ 由(23) 式确定,$\boldsymbol{b}'_1$ 和 $\boldsymbol{a}'_1$ 之间的关系与(12) 式相同。且矩阵 $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{B}'$ 是非奇异阵,矩阵 $\boldsymbol{Y}'=i\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'^{-1}$ 仍为 Hermitain 矩阵。

**2.2 $p_1$ 为三重根**

由于压电材料均为弹性各向异性材料,不可能是弹性各向同性材料,因此,当存在三重根时只有 $p_1=p_2=p_4\neq p_3$。此时行列式 $\mathscr{D}$ 为 $p_1$ 的三次多项式,且有 $\left.\frac{\mathrm{d}^3\mathscr{D}}{\mathrm{d}p_1^3}\right|_{p=p_1}\neq 0$。

(1) 如果对应 $p_1$ 有三个独立的本征向量 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_4$,则 $m=n-3=1$。由定理可知只有(22) 式有非零解,所以通解形式仍为(19) 式去掉第二项和第四项。

(2) 如果对应 $p_1$ 有两个独立的本征向量 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$,则 $m=n-2=2$。由定理可知方程(22) 和(23) 均有非零解。所以通解的形式用(28) 式表示。

(3) 如果对应 $p_1$ 只有一个独立的本征向量 $\boldsymbol{a}_1$,则 $m=n-1=3$,由定理可知方程(22),(23) 和(24) 均有非零解。因此通解的形式可写成[6]。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}=&\boldsymbol{A}''\boldsymbol{f}(z)+x_2\boldsymbol{a}_1f'_1(z_1)+2x_2\boldsymbol{a}'_1f'_1(z_1)+x_2^2\boldsymbol{a}_1f''_1(z_1)\\&+\bar{\boldsymbol{A}}''\overline{\boldsymbol{f}(z)}+x_2\bar{\boldsymbol{a}}_1\overline{f'_1(z_1)}+2x_2\bar{\boldsymbol{a}}'_1\overline{f'_1(z_1)}+x_2^2\bar{\boldsymbol{a}}_1\overline{f''_1(z_1)}\end{aligned} \tag{30a}$$

$$\begin{aligned}\Phi=&\boldsymbol{B}''\boldsymbol{f}(z)+x_2\boldsymbol{b}_1f'_1(z_1)+2x_2\boldsymbol{b}'_1f'_1(z_1)+x_2^2\boldsymbol{b}_1f''_1(z_1)\\&+\bar{\boldsymbol{B}}''\overline{\boldsymbol{f}(z)}+x_2\bar{\boldsymbol{b}}_1\overline{f'_1(z_1)}+2x_2\bar{\boldsymbol{b}}'_1\overline{f''_1(z_1)}+x_2^2\bar{\boldsymbol{b}}_1\overline{f''_1(z_1)}\end{aligned} \tag{30b}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{A}''=[\boldsymbol{a}_1\quad \boldsymbol{a}'_1\quad \boldsymbol{a}_3\quad \boldsymbol{a}''_1],\qquad \boldsymbol{a}''_1=\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}_1/\mathrm{d}p_1^2\\&\boldsymbol{B}''=[\boldsymbol{b}_1\quad \boldsymbol{b}'_1\quad \boldsymbol{b}_3\quad \boldsymbol{b}''_1],\qquad \boldsymbol{b}''_1=\mathrm{d}^2\boldsymbol{b}_1/\mathrm{d}p_1^2\\&\boldsymbol{f}(z)=[f_1(z_1)\quad f_1(z_1)\quad f_3(z_3)\quad f_1(z_1)]^T\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

$\boldsymbol{a}''_1$ 由(24) 式确定,$\boldsymbol{b}''_1$ 和 $\boldsymbol{a}''_1$ 之间的关系与(12) 式相同。且矩阵 $\boldsymbol{A}''$、$\boldsymbol{B}''$ 是非奇异阵,矩阵 $\boldsymbol{Y}''=$

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www

$i\boldsymbol{A}''\boldsymbol{B}''^{-1}$ 仍为 Hermitain 矩阵 。

如果 $p_1 = p_2 = p_3 \neq p_4$, 那么只有 $u_3$ 与 $u_1$ 和 $u_2$ 相互解偶时才可能是各向异性材料, 但是到目前为止还没有发现这样的材料; 对于 $p_1$ 是四重根时($p_1 = p_2 = p_3 = p_4$) 与上述情况相同, 此时仍可用定理对解的形式进行讨论 。

## 3　退化热释电材料的特解

把(4) 式的第1式代入方程(2b) 和(2c) 可得如下控制方程

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{U}_{,\alpha\beta} = (\beta_1 + p_t\beta_2)g''(z_t) \tag{32}$$

式中

$$\boldsymbol{C} = \begin{cases} \boldsymbol{Q} & \alpha = \beta = 1 \\ \boldsymbol{R} & \alpha = 1, \quad \beta = 2 \\ \boldsymbol{R}^T & \alpha = 2, \quad \beta = 1 \\ \boldsymbol{W} & \alpha = \beta = 2 \end{cases} \tag{33}$$

$\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{U}, \beta_1, \beta_2$ 分别由方程(8)、(6) 和(15) 确定。观察方程(32), 它与离散系统强迫振动的控制方程类似, $p_t$ 可看成激振力频率, $p_\alpha$($\alpha = 1, 2, 3, 4$) 可看成固有频率, 所以通过类比可把热释电材料的特解(13) 式写成另外一种形式[7]

$$\boldsymbol{U}_t = c_\alpha \boldsymbol{a}_\alpha g(x_1 + p_t x_2) \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4) \tag{34}$$

式中 $\boldsymbol{a}_\alpha$ 是本征值问题(7) 确定的本征向量。$c_\alpha$ 为一常数, 把(34) 式代入(32) 式就可确定 $c_\alpha$

$$\boldsymbol{D}(p_t)c_\alpha\boldsymbol{a}_\alpha = \beta_1 + p_t\beta_2 \tag{35}$$

当压电本征值 $p_\alpha$ 和热本征值 $p_t$ 出现相等的值时, 特解(34) 的形式要作相应修正 。

### 3.1　$p_1 = p_2 \neq p_3 \neq p_4, p_t \neq p_\alpha$

如果有二重根 $p_1$ 只对应一个本征向量 $\boldsymbol{a}_1$, 那么特解形式可写为

$$\boldsymbol{U}_t = \left(c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\frac{d\boldsymbol{a}_1}{dp_1} + c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4\right)g(z_t) = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{c}^* g(z_t) = \boldsymbol{c}' g(z_t) \tag{36}$$

式中 $\boldsymbol{A}'$ 由(29) 式确定; $\boldsymbol{c}^* = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4]^T$, 把(36) 式代入(32) 式得确定 $\boldsymbol{c}^*$ 的方程

$$\boldsymbol{D}(p_t)\boldsymbol{A}'\boldsymbol{c}^* = \beta_1 + p_t\beta_2 \tag{37}$$

### 3.2　$p_t = p_1 \neq p_2 \neq p_3 \neq p_4$

由于热本征值 $p_t$ 等于压电本征值 $p_1$, 所以通过类比在特解中必须有反应 $p_1$ 的共振项, 特解可写成

$$\boldsymbol{U}_t = x_2 c_1\boldsymbol{a}_1 g'(z_t) + \sum_{\alpha=2}^{4} c_\alpha\boldsymbol{a}_\alpha g(z_t) \tag{38}$$

把(38) 代入(32) 式, 并注意到 $\boldsymbol{D}(p_t)\boldsymbol{a}_1(p_1) = 0$, 得确定 $c_\alpha$ 的方程

$$\boldsymbol{D}'(p_t)c_1\boldsymbol{a}_1 + \sum_{\alpha=2}^{4}\boldsymbol{D}(p_t)c_\alpha\boldsymbol{a}_\alpha = \beta_1 + p_t\beta_2 \tag{39}$$

### 3.3　$p_t = p_1 \neq p_2 = p_3 \neq p_4$

此种情况相当于(36) 和(38) 式的组合, 特解可写成

$$\boldsymbol{U}_t = x_2 c_1\boldsymbol{a}_1 g'(z_t) + \left(c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}_2}{\mathrm{d}p_2} + c_4\boldsymbol{a}_4\right)g(z_t) \tag{40}$$

因此确定 $c_\alpha$ 的方程为

$$\boldsymbol{D}'(p_t)c_1\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{D}(p_t)\left[c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}_2}{\mathrm{d}p_2} + c_4\boldsymbol{a}_4\right] = \beta_1 + p_t\beta_2 \tag{41}$$

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www

### 3.4 $p_t = p_1 = p_2 \neq p_3 \neq p_4$

通过类比,特解中必须有反应与两重根 $p_1$ 对应的共振项,可写成

$$\boldsymbol{U}_t = c_1\left[2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}_1}{\mathrm{d}p_1}x_2 g'(z_t) + \boldsymbol{a}_1 x_2^2 g''(z_t)\right] + c_2\boldsymbol{a}_1 x_2 g'(z_t) + (c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4)g(z_t) \tag{42}$$

(42) 代入(32),并注意 $\boldsymbol{D}(p_t)\boldsymbol{a}_1(p_1) = 0$ 和 $\boldsymbol{D}'(p_t)\boldsymbol{a}_1(p_1) + \boldsymbol{D}(p_t)\dot{\boldsymbol{a}}_1(p_1) = 0$,得确定 $c_\alpha$ 的方程

$$2\left[\boldsymbol{D}'(p_t)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}_1}{\mathrm{d}p_1} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{a}_1\right]c_1 + \boldsymbol{D}'(p_t)c_2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{D}(p_t)[c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4] = \beta_1 + p_t\beta_2 \tag{43}$$

### 3.5 $p_1 \neq p_2 = p_3 = p_4 = p_t$

压电本征值出现三重根时,特解可写成

$$\boldsymbol{U}_t = c_1\boldsymbol{a}_1 g(z_t) + c_2\boldsymbol{a}_2 x_2 g'(z_t) + c_3\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}_2}{\mathrm{d}p_2}x_2 g'(z_t) + c_4\left[2\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}_2}{\mathrm{d}p_2^2}x_2 g'(z_t) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}_2}{\mathrm{d}p_2}x_2^2 g''(z_t)\right] \tag{44}$$

把(44) 式代入(32) 式可得确定 $c_\alpha$ 的方程

$$\boldsymbol{D}(p_t)c_1\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{D}'(p_t)\left(c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}_2}{\mathrm{d}p_2}\right) + 2\left[\boldsymbol{D}'(p_t)\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}_2}{\mathrm{d}p_2^2} + \boldsymbol{W}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}_2}{\mathrm{d}p_2}\right]c_4 = \beta_1 + p_t\beta_2 \tag{45}$$

将上节得到的通解与本节对应的特解相加,即可得到退化热释电材料的一般解。

## 4 退化热释电材料共线界面裂纹问题

本节将讨论退化热释电材料共线界面裂纹问题。两个不同材料的半平面在界面上($x_2 = 0$) 除裂纹区 $a_j < x_1 < b_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 外胶接起来就构成一双介质共线界面裂纹问题,如图 1 所示。$x_2 > 0$ 的上半平面为第 Ⅰ 种材料,$x_2 < 0$ 的下半平面为第 Ⅱ 种材料。全部裂纹 $a_j < x_1 < b_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 组成区域 $L$。在胶接面上位移、电势、面力、电位移、温度和法向热流都连续;在裂纹面上面力、电位移和法向热流连续,即

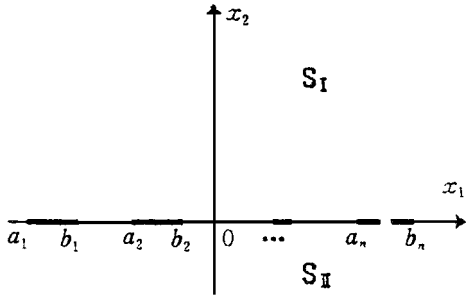


图1 共线界面裂纹

$$(\Phi_{,1})_{\mathrm{I}} = (\Phi_{,1})_{\mathrm{II}}, \quad T_{\mathrm{I}} = T_{\mathrm{II}}, \quad (h_2)_{\mathrm{I}} = (h_2)_{\mathrm{II}}, \quad x_1 \notin L \tag{46}$$

$$(\Phi_{,1})_{\mathrm{I}} = (\Phi_{,1})_{\mathrm{II}} = \boldsymbol{t}^0(x_1), \quad (h_2)_{\mathrm{I}} = (h_2)_{\mathrm{II}} = h^0(x_1), \quad x \in L \tag{47}$$

式中 $\boldsymbol{t}^0 = [t_1^0 \quad t_2^0 \quad t_3^0 \quad -\omega^0]^T$。由(46) 和(47) 式可知在全部界面上有

$$(\Phi_{,1})_{\mathrm{I}} = (\Phi_{,1})_{\mathrm{II}}, \quad (h_2)_{\mathrm{I}} = (h_2)_{\mathrm{II}}, \quad -\infty < x_1 < +\infty \tag{48}$$

如果本征值问题(7) 不出现重根,而且各根与热本征值互不相等时,非退化热释电材料的一般解为(19) 式,那么,在裂纹面上规定面力、电位移面密度和热流(47) 式时,问题转化为求解 Hilbert 问题[2]。

对于 $p_1$ 是二重根且只对应一个本征向量 $\boldsymbol{a}_1$ 时,与热本征值也互不相等时,由(28) 式和(36) 式可将退化热释电材料的一般解写成

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}'(z)\boldsymbol{f}(z) + x_2\boldsymbol{a}_1 f'_1(z_1) + \boldsymbol{c}' g(z_t) + \bar{\boldsymbol{A}}'\overline{\boldsymbol{f}(z)} + x_2\bar{\boldsymbol{a}}_1\overline{f'_1(z_1)} + \bar{\boldsymbol{c}}'\overline{g(z_t)} \tag{49a}$$

$$\Phi = \boldsymbol{B}'(z)\boldsymbol{f}(z) + x_2\boldsymbol{b}_1 f'_1(z_1) + \boldsymbol{d}' g(z_t) + \bar{\boldsymbol{B}}'\overline{\boldsymbol{f}(z)} + x_2\bar{\boldsymbol{b}}_1\overline{f'_1(z_1)} + \bar{\boldsymbol{d}}'\overline{g(z_t)} \tag{49b}$$

式中 $\boldsymbol{d}'$ 可由 (16) 式将 $\boldsymbol{c}$ 替换成 $\boldsymbol{c}'$ 确定。把(49) 式代入边界条件,那么退化热释电材料共线界面裂纹问题同样可以归结为在裂纹面上给定面力、电位移面密度和热流的 Hilbert 问题。

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://ww

有关 Hilbert 问题的求解过程及结果可参照文献[2, 8], 这里不再赘述。通过上述分析可知, 对于退化热释电材料由边界条件确定的任意函数 $\boldsymbol{f}(z_\alpha)$ 的形式与非退化热释电材料的 $\boldsymbol{f}(z_\alpha)$ 形式完全相同, 只是其中的某些参数由 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$、$\boldsymbol{Y}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 换成了 $\boldsymbol{A}'$、$\boldsymbol{B}'$、$\boldsymbol{c}'$、$\boldsymbol{d}'$、$\boldsymbol{Y}'$ 和 $\boldsymbol{H}'$。类似地, 对于 $p_1$ 是三重根的情况, 把 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$、$\boldsymbol{Y}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 换成 $\boldsymbol{A}''$、$\boldsymbol{B}''$、$\boldsymbol{c}''$、$\boldsymbol{d}''$、$\boldsymbol{Y}''$ 和 $\boldsymbol{H}''$ 即可。

## 5 结　　论

本文给出了热释电材料热弹性问题的一般解。并且给出了压电本征值出现重根时, 或者热本征值与一个或多个压电本征值相等时, 退化热释电材料热弹性问题通解及特解的具体形式。最后又给出了退化热释电材料热弹性界面裂纹问题的闭合形式解。

## 参 考 文 献


1 Suo Z G, Kuo C M, Barnett D M. Fracture mechanics for piezoelectric solids. J Mech Phys Solids, 1992, 40(4): 739～765

2 申胜平, 王旭, 匡震邦. 热释电材料中的热弹性界面裂纹. 固体力学学报, 1995, 8(4)

3 Stroh A N. Dislocation and cracks in anisotropic elasticity. Phil Mag, 1958, 7: 625～646

4 Barnett D M, Lothe J. Synthesis of the sextic and the integral formalism for dislocation, Green's functions and surface waves in anisotropic solids. Phys Norv, 1993, 7: 13～19

5 丁启才. 二维各向异性弹性力学的 Stroh 公式和某些不变量. 力学进展. 1992, 22(2): 145～160

6 Ting T C T, Chou S C. Edge singularities in anisotropic composites. Int J Solids Structures, 1981, 17(11): 1057～1068

7 Wu C H. Plane anisotropic thermoelasticity. JAM, 1984, 51: 724～726

8 Dempsey J P, Sinclair G B. On the stress singularities in the composite wedge. J Elasticity, 1979, 9: 373～391


## GENERAL SOLUTION FOR PIEZOTHERMOELASTIC MATERIALS


Yang Xiaoxiang　　Shen Shengping　　Kuang Zhenbang

(Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

Fan Jiaqi

(Daqing Petroleum Institute, Anda 151400)



**Abstract**　A general solution for piezothermoelastic materials is obtained by applying the extended version of Stroh's formulation when all eigenvalues are distinct. When some piezoelectric eigenvalues are equal, the general solution for this degenerate case has also been given and discussed. Attention is also paid to the case where the heat eigenvalue pair becomes equal to one or more pairs of the piezoelectric eigenvalues and the particular solution for this degenerate piezothermoelastic problem is also given. Finally, it is shown that one can make the form of the arbitrary function $\boldsymbol{f}_\alpha(z_\alpha)$ for the degenerate piezothermoelastic solution the same as that for the undegenerate case except for some parameters included in the formulation.



**Key words**　piezothermoelastic material, eigenvalue problem, interface crack


© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://ww