复合材料学报 Acta Materiae Compositae Sinica
第29卷 第2期 4月 2012年
Vol. 29 No. 2 April 2012

文章编号：1000-3851(2012)02-0150-10

压电复合材料层板弱界面的四种力-电-热物理模型

舒小平*

（淮海工学院 机械工程学院，连云港 222005）

摘 要： 基于对压电复合材料层合结构弱界面弹性场、电场、温度场的宏观和细观尺度分析，构建了四种界面力-电-热模型，分别为非耦合型、耦合型和混合型。依据这些界面模型，得到了柱面弯曲简支压电复合材料层板的力-电-热多场耦合解。结果表明，损伤界面的多场耦合物理描述介于宏观和细观尺度之间，需要多尺度考虑，且基于不同尺度的描述也可获得相似的规律。在热载和力载下，不同的界面模型对弹性场影响趋同、差异甚小，而对电场和温度场，四种模型的影响各异、但规律相似；在电载作用下，不同的界面模型无论对弹性场还是电场，都有显著的影响。

关键词： 压电材料；复合材料；层板；脱层；多尺度；多场耦合

中图分类号： TB330.1；O342 **文献标志码：** A

Four piezothermoelastic models on weak interfaces in piezoelectric composite laminates

SHU Xiaoping*

(School of Mechanical Engineering, Huaihai Institute of Technology, Lianyungang 222005, China)

Abstract: Based on macro-and meso-scales analysis on elastic, electric and thermal fields at a weak interface in piezoelectric composite laminates, four interfacial piezothermoelastic models (uncoupling, coupling and mixed) were built. According to these interfacial models, the piezothermoelastic coupling solutions of simply supported piezoelectric laminates with weak interfaces in cylindrical bending were obtained. Results show that the multi-fields coupling constitutive laws at a weak interface may be characterised in macro-and meso-scales, and some similarities among the interfaical models in different scales are observed. Under the thermal and force loads, the four models predict almost same elastic field, but similar distribution pattern of electric potential and temperature fields with different numerical results for the piezoelectric composite laminates. Under the electric loads, the differences of both elastic and elecric fields predicted by the four models are significant.

Keywords: piezoelectricity; composite; laminate; debonding; multiscale; multi-fields coupling

航空领域已实现复合材料用量占结构重量50%（A380、波音787、A350分别达到25%、50%、52%）、全机减重近20%的目标[1]，也实现了复合材料在机体主要承力结构上的应用。在传统复合材料结构迅速发展的同时，在复合材料结构中植入压电功能材料或元件，形成所谓的智能结构，也得到日益广泛的关注和应用。这类智能结构中的纤维复合材料为各向异性材料，压电材料常常也显示出各向异性，因此定义为“各向异性压电复合材料层合结构”。因其结构的呈层性，制作和使用过程均可能造成层间缺陷，这是此类结构典型的破坏形式，也是导致压电传感器或作动器失效的主要原因。本研究中针对的层间缺陷主要为两类：(1)层间弱粘贴。因粘贴层厚度不可忽略，如高温、高湿引起的松弛、蠕变，虽然界面仍有剩余强度，但导热、导电性能发生变化。(2)脆性脱层。因制造、冲击等引起的界面脱粘，界面剩余强度几乎可以忽略，脱层形成的空腔导热、导电性能急剧变化。因损伤界面的弹性场、电场、温度场耦合，物理表征困难。

收到初稿日期： 2011-04-25；**收到修改稿日期：** 2011-07-17；**网络出版时间：** 2011-11-29 9:52:02
网络出版地址： www.cnki.net/kcms/detail/11.1801.TB.20111129.0952.010.html；
DOI： CNKI:11-1801/TB.20111129.0952.010
基金项目： 江苏省高校自然科学基金(07KJB130004)
通讯作者： 舒小平，教授，研究方向为复合材料结构力学 E-mail：shuxiaoping@yeah.net

关于压电复合材料层合结构界面缺陷的研究起步较晚，一部分是利用断裂力学的方法分析界面局部裂纹，另一部分是用结构力学的方法分析大尺度界面缺陷。层合结构大尺度界面缺陷分析经历了4个阶段：(1)纤维复合材料层合结构界面缺陷。已经建立起较成熟的理论和数值方法[2-3]，Shu 和 Soldatos 进行了系列研究[4-6]。(2)压电复合材料层合结构界面缺陷，这是力-电两场耦合问题。Seeley 和 Chattopadhyay 进行了实验[7]和理论[8]分析，Icardi[9]和 Shu[10]分析了界面滑移问题，Sun 和 Tong 研究了脱层[11]问题，Chen 和 Lee 给出了弱界面问题的精确解[12]。(3)纤维复合材料层合结构界面热弹性脱层，这是力-热两场耦合问题，脱层界面力-热耦合描述目前仅见 Shu 的探索性工作[13]。(4)压电复合材料层合结构界面热脱层，这是力-电-热三场耦合问题。作为前述三个界面缺陷问题的综合，缺陷界面的力-电-热三场耦合的物理描述尚属空白。Kapuria[14]基于简单的线性“弹簧型”缺陷界面的力-电-热模型刚刚发表，属于相对简单的非耦合模型，离理论的成熟尚有距离。

针对温变环境下压电复合材料层合结构含界面缺陷的多场耦合物理描述和结构响应的建模属探索性研究，为拓展对这一复杂问题的认识，需要在定性和定量两个方面深入研究。本文中拟结合宏观和细观尺度分析，考虑耦合和非耦合因素，探索多种界面物理描述。既要研究多种损伤界面的力-电-热多场耦合的局部行为，又要着眼于建立结构宏观响应的解；损伤界面的物理描述既要尽可能精准，又要便于植入控制方程求解。

1 界面物理描述

对于压电复合材料层板的静态响应，力、电、热三物理场由以下三个控制方程决定：

$$\sigma_{ij,j}=0\ ,\ D_{i,i}=0\ ,\ (k_iT_{,i})_{,i}=0 \tag{1}$$

其力-电-热多场耦合关系为

$$\{\sigma\}=[C](\{\varepsilon\}-\Delta T\{\alpha\})-[e]\{E\},$$
$$\{D\}=[e]^{\mathrm{T}}(\{\varepsilon\}-\Delta T\{\alpha\})+[\in]\{E\}. \tag{2}$$

其中：ε—应变；σ—应力；E—电场强度；D—电位移；T—温度；C—弹性常数；e—压电系数；$\in$—介电常数；k—导热系数；α—热膨胀系数。

对于层合结构，界面粘贴状况实际上是由界面强制条件来表达的。在粘贴完好的界面，位移、横向应力、温度、横向热流、电势、横向电位移等均连续。而在弱粘贴乃至脱层的界面，部分物理量不连续。由于三场耦合，这些损伤界面的精确物理表述是非常复杂的，甚至是不可能的，但是，界面条件对于压电传感或作动元件有至关重要的影响。应尽可能精确地描述界面缺陷的物理机制，并予简化，使控制方程求解成为可能。

1.1 力学条件

弱粘贴界面的力学条件相对成熟，其中一类能够用于描述宏观力学行为，表现为界面位移跃变值与界面横向应力的关系：

$$F(\boldsymbol{\Delta}^{(i)},\boldsymbol{S}^{(i)})=0 \tag{3}$$

式中：

$$\boldsymbol{\Delta}^{(i)}=[\Delta U^{(i)}\quad \Delta V^{(i)}\quad \Delta W^{(i)}]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{S}^{(i)}=[\tau_{xz}(z_i)\quad \tau_{yz}(z_i)\quad \sigma_z(z_i)]^{\mathrm{T}}$$

$\boldsymbol{\Delta}^{(i)}$和$\boldsymbol{S}^{(i)}$分别表示第$i$个材料界面处的位移跃变向量和横向应力向量；$\boldsymbol{\Delta}^{(i)}$中的$\Delta U^{(i)}$和$\Delta V^{(i)}$表示界面滑移，$\Delta W^{(i)}$表示界面张开。界面粘贴完好时，$\boldsymbol{\Delta}^{(i)}$为零；界面完全脱层时，$\boldsymbol{S}^{(i)}$取零值；界面弱粘贴时，$\boldsymbol{\Delta}^{(i)}$和$\boldsymbol{S}^{(i)}$均取非零值。式(3)往往是非常复杂的，为避免严重非线性，需要对式(3)合理线性化，对于复合材料层合结构脱层问题常采用下式[2-6]：

$$\Delta U^{(i)}=R_{\mathrm{t}x}^{(i)}\tau_{xz}(z_i),\ \Delta V^{(i)}=R_{\mathrm{t}y}^{(i)}\tau_{yz}(z_i),$$
$$\Delta W^{(i)}=R_{\mathrm{n}}^{(i)}\sigma_z(z_i) \tag{4}$$

式中：$R_{\mathrm{t}x}^{(i)}$和$R_{\mathrm{t}y}^{(i)}$为第i个界面切向柔度系数；$R_{\mathrm{n}}^{(i)}$为法向柔度系数；用它们来描述界面粘贴状况。这些柔度系数在0与∞之间取值，零值表明界面粘贴完好；取无穷大时表明界面完全脱离；取有限值时，表示界面弱粘贴。

因此，界面力学条件可由下式表达：

$$\tau_{xz}^{(i+1)}(x,y,z_i)=\tau_{xz}^{(i)}(x,y,z_i)=\tau_{xz}(x,y,z_i)$$
$$\tau_{yz}^{(i+1)}(x,y,z_i)=\tau_{yz}^{(i)}(x,y,z_i)=\tau_{yz}(x,y,z_i)$$
$$\sigma_z^{(i+1)}(x,y,z_i)=\sigma_z^{(i)}(x,y,z_i)=\sigma_z(x,y,z_i)$$
$$U^{(i+1)}(x,y,z_i)-U^{(i)}(x,y,z_i)=R_{\mathrm{t}x}^{(i)}\tau_{xz}(x,y,z_i)$$
$$V^{(i+1)}(x,y,z_i)-V^{(i)}(x,y,z_i)=R_{\mathrm{t}y}^{(i)}\tau_{yz}(x,y,z_i)$$
$$W^{(i+1)}(x,y,z_i)-W^{(i)}(x,y,z_i)=R_{\mathrm{n}}^{(i)}\sigma_z(x,y,z_i) \tag{5}$$

式中：U，V，W为位移；其余同前式。

1.2 热传导条件

理想界面的传热条件是温度和横向热流$q_z(=k_{33}T_{,z})$在界面连续。在含缺陷界面，界面处形成脱层$\Delta W^{(i)}$(图1)，其传热机制非常复杂，本质上是一个多尺度问题，本文中拟基于细观和宏观两个尺

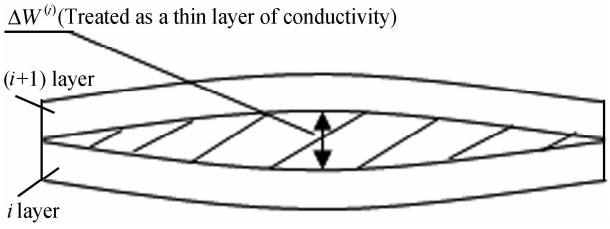

图 1　弱界面传导模型

Fig. 1　Conductivity model at a weak interface

度予以描述。

1.2.1　界面相模型

两组分材料之间的界面相(interphase)热、电传导研究比较充分，用于研究复合材料夹杂和材料性能表征等细观问题。其机制可被用于描述弱界面的传导问题，即将两组分材料之间的一个厚 h 的薄界面相的传热行为比拟为层板中的弱界面传热行为[16-17]，见图 2。界面相的传导性能分为两类：(1) 界面低导热模型。认为界面传热远低于层板的传热，因此弱界面处有温度跃变 $\Delta t^{(i)}$，而横向热流 q_z 连续。(2) 界面高导热模型。认为界面传热远高于层板的传热，因此弱界面处温度连续，而横向热流 q_z 发生跃变。对于层合结构，脱层时界面处形成空腔 $\Delta W^{(i)}$(见图 1)，其横向热传导系数 k_{33}^* 比层板材料的 k_{33} 低 3～4 个数量级，因此低导热模型更适合层板脱层问题。

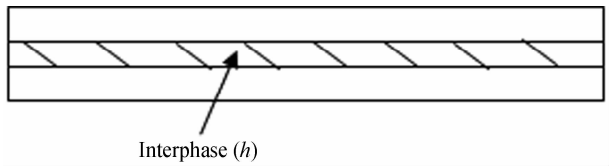

图 2　层板中的界面相

Fig. 2　Thin interphase in a laminate

界面相低导模型中，温度跃变 $\Delta t^{(i)}$ 服从规律[16-17]

$$\Delta t^{(i)} = R_{\theta q}^{(i)} q_z(z_i) \tag{6}$$

式中：$R_{\theta q}^{(i)}$ 是一个反映损伤界面热传导的系数，根据低导模型，$R_{\theta q}^{(i)}$ 定义为[17-18]

$$R_{\theta q}^{(i)} = \lim_{h,k_{33}^* \to 0} (h/k_{33}^*) \tag{7}$$

因此，界面传热条件可由下式表达：

$$q_z^{(i+1)}(x,y,z_i) = q_z^{(i)}(x,y,z_i) = q_z(x,y,z_i),$$
$$T^{(i+1)}(x,y,z_i) - T^{(i)}(x,y,z_i) = R_{\theta q}^{(i)} q_z(x,y,z_i). \tag{8}$$

该模型是一个非耦合模型，温度场可由控制方程(1)中的第三式单独解得。如果弱界面参数 $R_{\theta q}^{(i)}$ 事先给定，温度场求解也是一个线性问题。因此，在目前相关研究中该模型或类似的模型因其简便得以采用[14]。但是，该模型的界面温度跃变 $\Delta t^{(i)}$ 与界面几何变形(尤其是界面张开量 $\Delta W^{(i)}$)是非耦合的，因此可能忽略了界面损伤对热传导影响的关键因素。

1.2.2　界面耦合模型

温度场的分布与界面几何变形相关，界面温度跃变 $\Delta t^{(i)}$ 随界面几何变形(尤其界面张开量 $\Delta W^{(i)}$)而变化。尽管影响温度跃变 $\Delta t^{(i)}$ 的因素复杂，但关键因素为界面张开量 $\Delta W^{(i)}$，脱层形成的空腔会显著影响热传导，其影响可以表达为函数

$$\Delta t^{(i)} = f(\Delta W^{(i)}) \tag{9}$$

这个假设因位移场、温度场耦合可能引起非线性问题。基于结构力学的宏观尺度分析，笔者[13]在研究纤维复合材料层板热脱层时首次提出了这一耦合模型，可以借鉴用于研究压电复合材料层板。该假设将层间张开的区域 $\Delta W^{(i)}$ 视为一个传热的薄层(图 1)，在温度沿层板厚度折线分布的近似假设下，导出了界面温度跃变的解析表达并予验证。在此基础上，合理忽略影响小的非线性项，可得到一个线性公式：

$$\Delta t^{(i)} = R_{\theta w}^{(i)} \Delta W^{(i)} \tag{10}$$

此处 $R_{\theta w}^{(i)}$ 也与损伤界面热传导有关，针对本文问题，$R_{\theta w}^{(i)}$ 取

$$R_{\theta w} = \frac{k_{33}}{k_{33}^*} \frac{\Delta t}{H} \tag{11}$$

式中：Δt 是层板上下板面的温差；k_{33} 和 k_{33}^* 分别是层板材料和损伤界面的法向热传导系数。如界面只发生剪切滑移(非张开型的脱层)，$\Delta W^{(i)}$ 为零，$\Delta t^{(i)}$ 消失。这个模型克服了上一个模型温度场独立、与界面损伤无直接关系的不足，更能反映界面损伤的实质。

因此，界面传热条件可由下式表达：

$$T^{(i+1)}(x,y,z_i) - T^{(i)}(x,y,z_i) = R_{\theta w}^{(i)}(W^{(i+1)}(x,y,z_i) - W^{(i)}(x,y,z_i)),$$
$$q_z^{(i+1)}(x,y,z_i) = q_z^{(i)}(x,y,z_i) = q_z(x,y,z_i). \tag{12}$$

在界面相低导热模型中，Hashin[15-16]将两组分材料间的界面相比拟为层板中的损伤界面。考虑到界面相厚度 h 远小于层板厚度 H，可将温度场沿界面相厚度 h 作 Taylor 展开：

$$T^*(z_i + h) = T^*(z_i) + T^*(z_i)_{,z} h + O(h^2) \tag{13}$$

式中：* 表示界面相内的物理量。因界面相厚度 h 与层板的宏观尺度相比小 2～3 个数量级以上，高次项 $O(h^2)$ 可以忽略。从以往有关层合板的热传导的研究经验可知，温度场沿每一单层的厚度近似于

线性分布，对于厚度小 2～3 个数量级的界面相而言，保留线性项可以满足精度要求[17-18]。因此，界面相温度跃变 $\Delta t^{(i)}$ 取为

$$\Delta t^{(i)} = T^{*}(z_i)_{,z}h \tag{14}$$

考虑到层板材料与界面相之间($z=z_i$)横向热流连续，有

$$\Delta t^{(i)} = \frac{k_{33}}{k_{33}^{*}}T^{(i)}(z_i)_{,z}h \tag{15}$$

可以将两组分材料间的界面相比拟为脱层界面，因此，当上式用于描述脱层界面时，用 $\Delta W^{(i)}$ 替换 h，变成

$$\Delta t^{(i)} = \frac{k_{33}}{k_{33}^{*}}T^{(i)}(z_i)_{,z}\Delta W^{(i)} \tag{16}$$

比较式(10)与式(16)，有

$$R_{\theta\mathrm{w}}^{(i)} = \frac{k_{33}}{k_{33}^{*}}T^{(i)}(z_i)_{,z} \tag{17}$$

比较式(11)和(17)中 $R_{\theta\mathrm{w}}^{(i)}$ 的定义，两者非常相似。在式(11)中，$\Delta t/H$ 代表沿整个层板厚度 H 的温度梯度，是一个已知量；$T^{(i)}(z_i)_{,z}$ 为在界面处 $z=z_i$ 的温度梯度，是一个待求值。由于压电层合结构通常内部无热源，温度沿厚度是单调变化的，可以用平均温度梯度 $\Delta t/H$ 近似代替界面处的温度梯度 $T^{(i)}(z_i)_{,z}$。在算例 1 中(图 3(d))将看到 $T^{(i)}(z_i)_{,z}$ 是趋近 $\Delta t/H$ 的，其比值为 1.04，即两式有相同的精度水平。但 $\Delta t/H$ 是已知量，而 $T^{(i)}(z_i)_{,z}$ 是待求值，只有在温度场求出后才能得到，式(17)中 $R_{\theta\mathrm{w}}^{(i)}$ 无法事先确定，会导致非线性问题。因此，式(11)是一个理想的选择。

本研究基于细观和宏观尺度建立界面物理描述，并力图探寻跨尺度模型之间的内在机制。上述讨论表明源自不同尺度的分析可获得相似的规律。

1.3 电学条件

相对前两者，电学条件更复杂，对界面损伤也越敏感，电场在脱层界面的物理表达极少见诸报道。

1.3.1 裂纹模型与界面相模型

压电层合结构界面缺陷的研究不充分，但针对压电体裂纹问题的研究较多[19-22]，得到了一些关于裂纹处的电学条件假设。界面脱层可以类比为裂纹，关于裂纹处的电学条件假设可资借鉴用于描述压电复合材料层合结构的界面脱层的电学条件。主要的裂纹电学条件假设如下。

(1) 电可导通裂纹[19]。该假设认为电势 Φ 和横向电位移 D_z 在裂纹界面仍连续，即

$$\Phi^{(i+1)}(x,y,z_i) = \Phi^{(i)}(x,y,z_i) = \Phi(x,y,z_i),$$
$$D_z^{(i+1)}(x,y,z_i) = D_z^{(i)}(x,y,z_i) = D_z(x,y,z_i) \tag{18}$$

这一假设比较适合于不张开的Ⅱ型和Ⅲ型裂纹。对于界面缺陷问题，这一假设比较适合于非张开型的脱层，即界面剪切滑移现象，Shu[10]在研究层间滑移时使用了这一假设。

(2) 电不可导通裂纹[20]。该假设认为横向电位移在裂纹上下界面为零，即裂纹空腔内电场消失：

$$D_z^{(i)}(x,y,z_i) = 0,\ D_z^{(i+1)}(x,y,z_i) = 0. \tag{19}$$

(3) 电半可导通裂纹[21]。这一假设认为裂纹上下界面之间电势有一跃变 $\Delta\Phi$，其间横向电位移 D_z 不为零。Fan 和 Sze[22]研究了两个压电体之间的损伤界面，基于自洽理论提出了细观力学模型，建立了电半可导通界面的线性假设：

$$\Delta\Phi^{(i)} = R_{\mathrm{eD}}^{(i)}D_z(z_i) \tag{20}$$

式中：$R_{\mathrm{eD}}^{(i)}$ 为界面电损伤因子。因此，界面服从下列条件：

$$D_z^{(i+1)}(x,y,z_i) = D_z^{(i)}(x,y,z_i) = D_z(x,y,z_i),$$
$$\Phi^{(i+1)}(x,y,z_i) - \Phi^{(i)}(x,y,z_i) = R_{\mathrm{eD}}^{(i)}D_z(x,y,z_i). \tag{21}$$

当 $R_{\mathrm{eD}}^{(i)}$ 取零或无穷大值时，由电半可导通模型(20)可得电可导通模型(18)或电不可导通模型(19)。

这是借助裂纹的电学假设用于研究脱层问题，也可以借助界面相的细观分析得到同一模型。与界面导热相似，将两组分之间的一个厚 h 的薄界面相的导电行为用来刻画层板中的弱界面导电行为。界面相的导电性能也分为两类：(1) 界面低导电模型[16-17]。认为界面导电远低于层板的导电，因此弱界面处有电势跃变 $\Delta\Phi^{(i)}$，而横向电位移 D_z 连续。(2) 界面高导电模型。认为界面导电远高于层板的导电，因此弱界面处电势连续，而横向电位移 D_z 发生跃变。因脱层时界面处形成空腔 $\Delta W^{(i)}$，其介电系数比层板材料低多个数量级，因此低导电模型更适合层板脱层问题。

根据界面相低导模型，同样可以得到界面电学条件(20)，$R_{\mathrm{eD}}^{(i)}$ 定义为

$$R_{\mathrm{eD}}^{(i)} = \lim_{h,\epsilon_{33}^{*}\to 0}(h/\epsilon_{33}^{*}) \tag{22}$$

从裂纹和界面相两类电学描述出发，得到了同样的损伤界面电学条件。因模型(20)是在研究单相电场问题时得到的，它的优点是线性化、非耦合，

但与脱层界面的几何变形(尤其是 $\Delta W^{(i)}$)无显式关系，未充分反映多相耦合问题。

1.3.2　界面耦合模型

在界面相低导电模型中，也可参照温度跃变式(16)的推导过程，导出耦合模型。将电势沿界面相厚度 h 作 Taylor 展开，电势跃变 $\Delta\Phi^{(i)}$ 服从类似规律

$$\Delta\Phi^{(i)} = \Phi^{*}(z_i)_{,z}h = \frac{\in_{33}}{\in_{33}^{*}}\Phi^{(i)}(z_i)_{,z}h \tag{23}$$

当上式用于描述弱界面时，用 $\Delta W^{(i)}$ 替换 h，变成

$$\Delta\Phi^{(i)} = \frac{\in_{33}}{\in_{33}^{*}}\Phi^{(i)}(z_i)_{,z}\Delta W^{(i)} = R_{\mathrm{ew}}^{(i)}\Delta W^{(i)} \tag{24}$$

即在界面相低导热模型中，$R_{\mathrm{ew}}^{(i)}$ 为

$$R_{\mathrm{ew}}^{(i)} = \frac{\in_{33}}{\in_{33}^{*}}\Phi^{(i)}(z_i)_{,z} \tag{25}$$

因此，界面服从下列条件：

$$\begin{aligned}&\Phi^{(i+1)}(x,y,z_i) - \Phi^{(i)}(x,y,z_i) = \\ &\quad R_{\mathrm{ew}}^{(i)}(W^{(i+1)}(x,y,z_i) - W^{(i)}(x,y,z_i)),\\ &D_z^{(i+1)}(x,y,z_r) = D_z^{(i)}(x,y,z_i) = D_z(x,y,z_i).\end{aligned} \tag{26}$$

该模型界面电势跃变与界面几何变形 $\Delta W^{(i)}$ 耦合，是一个耦合模型。与式(17)中的 $R_{\theta\mathrm{w}}^{(i)}$ 一样，$\Phi^{(i)}(z_i)_{,z}$ 为界面处 $z=z_i$ 的电势梯度，是一个待求值，只有在电场求出后才能得到，式(25)中的 $R_{\mathrm{ew}}^{(i)}$ 无法事先确定，会导致非线性问题。与温度场不同，压电层合结构内部可接电源，或由弹性变形产生电场，导致电势沿厚度变化复杂，一般不能用沿厚度的平均电势梯度代替界面处的电势梯度 $\Phi^{(i)}(z_i)_{,z}$，只能估算其值。只有当结构仅在板面施加电势载荷、电势沿板厚近似线性分布时(见图5(c))，才能用沿厚度的平均电势梯度近似代替界面处的电势梯度 $\Phi^{(i)}(z_i)_{,z}$。

1.4　界面力-电-热综合模型

综上所述，依据损伤界面力、电、热的单一物理场描述，可以组合出 4 种界面力-电-热综合模型，分别为

模型 1：(1)+(8)+(21)

模型 2：(1)+(12)+(21)

模型 3：(1)+(8)+(26)

模型 4：(1)+(12)+(26)

其中模型 1 为非耦合模型，界面温度跃变与界面几何变形是非耦合的，界面电势跃变与界面几何变形也是非显式耦合的，与 Kapuria[14] 的模型同；模型 4 为全耦合模型，界面温度跃变和电势跃变都与界面几何变形显式耦合的；模型 2、模型 3 是混合模型(部分耦合)。据此可见，力-电-热三场耦合的损伤界面物理描述非常复杂，即使线性化也会出现多种组合。不同的条件组合，可能使得解呈发散性，各类模型的合理性将在算例中讨论。

2　力-电-热多场耦合解

界面模型需与控制方程(1)联合方能求解，或与能量原理结合得到板壳理论或有限元方程。本文中选择以相对简单的柱面弯曲问题为例，得到其解，用以讨论各种界面模型的性质和合理性。设 N 层正交铺层压电层板，简支，沿 x 方向板长为 L，沿 z 方向板厚为 H。对于柱面弯曲问题，应变和电场可相应简化为

$$\begin{aligned}&\varepsilon_x = U_{,x},\ \varepsilon_z = W_{,z},\ \gamma_{xz} = U_{,z} + W_{,x},\\ &E_x = -\Phi_{,x},\ E_z = -\Phi_{,z}\end{aligned} \tag{27}$$

式(2)也简化为

$$\begin{aligned}\sigma_x &= C_{11}^{(i)}(\varepsilon_x - \alpha_1^{(i)}\Delta T) + C_{13}^{(i)}(\varepsilon_z - \alpha_3^{(i)}\Delta T) - e_{31}^{(i)}E_z\\ \sigma_z &= C_{13}^{(i)}(\varepsilon_x - \alpha_1^{(i)}\Delta T) + C_{33}^{(i)}(\varepsilon_z - \alpha_3^{(i)}\Delta T) - e_{33}^{(i)}E_z\\ \tau_{xz} &= C_{55}^{(i)}\gamma_{xz} - e_{15}^{(i)}E_x\\ D_x &= e_{15}^{(i)}\gamma_{xz} + \in_{11}^{(i)}E_x\\ D_z &= e_{31}^{(i)}(\varepsilon_x - \alpha_1^{(i)}\Delta T) + e_{33}^{(i)}(\varepsilon_z - \alpha_3^{(i)}\Delta T) + \in_{33}^{(i)}E_z\end{aligned} \tag{28}$$

温度变化 $\Delta T(=T-T_0)$，不失一般性，取初始温度 T_0 为零。

因为涉及三场问题，设上下板面($z=\pm H/2$)承受以下所有或部分载荷：

(1) 力载

$$\begin{aligned}&\sigma_z(x,H/2) = q_m^{+}\sin\beta x,\\ &\sigma_z(x,-H/2) = q_m^{-}\sin\beta x,\quad \beta = m\pi/L,\\ &\tau_{xz}(x,\pm H/2) = 0.\end{aligned} \tag{29}$$

(2) 热载

$$\begin{aligned}&T(x,H/2) = T_m^{+}\sin\beta x,\\ &T(x,-H/2) = T_m^{-}\sin\beta x.\end{aligned} \tag{30}$$

(3) 电载

$$\begin{aligned}&\Phi(x,H/2) = \phi_m^{+}\sin\beta x,\\ &\Phi(x,-H/2) = \phi_m^{-}\sin\beta x.\end{aligned} \tag{31}$$

对于实际承受的任何板面力、电、热载荷，均可将其展开为傅里叶级数，上式可视为级数中的一项。

对简支边界，与 Pagano、Heyliger[23] 的经典解一样，第 i 层的位移、电势和温度场取如下 Navier

形式的解：

$$\begin{cases} U^{(i)}(x,z) = \overline{U}^{(i)}(z)\cos\beta x \\ W^{(i)}(x,z) = \overline{W}^{(i)}(z)\sin\beta x \\ \Phi^{(i)}(x,z) = \overline{\Phi}^{(i)}(z)\sin\beta x \\ T^{(i)}(x,z) = \overline{T}^{(i)}(z)\sin\beta x \end{cases} \tag{32}$$

在控制方程(1)中，第 i 层温度场可首先解得

$$\overline{T}^{(i)}(z) = t_1^{(i)} e^{\mu z} + t_2^{(i)} e^{-\mu z}, \mu = \beta\sqrt{k_{11}^{(i)}/k_{33}^{(i)}} \tag{33}$$

继而控制方程(1)中的前两个方程可以表达为

$$C_{55}^{(i)}\overline{U}_{,zz}^{(i)} - C_{11}^{(i)}\beta^2\overline{U}^{(i)} + (C_{13}^{(i)} + C_{55}^{(i)})\beta\overline{W}_{,z}^{(i)} + (e_{31}^{(i)} + e_{15}^{(i)})\beta\overline{\Phi}_{,z}^{(i)} = (C_{11}^{(i)}\alpha_1^{(i)} + C_{13}^{(i)}\alpha_3^{(i)})\beta\overline{T}^{(i)} -$$
$$(C_{13}^{(i)} + C_{55}^{(i)})\beta\overline{U}_{,z}^{(i)} + C_{33}^{(i)}\overline{W}_{,zz}^{(i)} - C_{55}^{(i)}\beta^2\overline{W}^{(i)} + e_{33}^{(i)}\overline{\Phi}_{,zz}^{(i)} - e_{15}^{(i)}\beta^2\overline{\Phi}^{(i)} = (C_{13}^{(i)}\alpha_1^{(i)} + C_{33}^{(i)}\alpha_3^{(i)})\overline{T}_{,z}^{(i)},$$
$$-(e_{31}^{(i)} + e_{15}^{(i)})\beta\overline{U}_{,z}^{(i)} + e_{33}^{(i)}\overline{W}_{,zz}^{(i)} - e_{15}^{(i)}\beta^2\overline{W}^{(i)} - \in_{33}^{(i)}\overline{\Phi}_{,zz}^{(i)} + \in_{11}^{(i)}\beta^2\overline{\Phi}^{(i)} = (e_{31}^{(i)}\alpha_1^{(i)} + e_{33}^{(i)}\alpha_3^{(i)})\overline{T}_{,z}^{(i)} \tag{34}$$

由上式得到第 i 层位移、电势的解

$$\overline{U}^{(i)}(z) = \widetilde{U}^{(i)}(z) + D_1^{(i)}(t_1^{(i)}e^{\mu z} + t_2^{(i)}e^{-\mu z}),$$
$$\overline{W}^{(i)}(z) = \widetilde{W}^{(i)}(z) + D_2^{(i)}(t_1^{(i)}e^{\mu z} - t_2^{(i)}e^{-\mu z}),$$
$$\overline{\Phi}^{(i)}(z) = \widetilde{\Phi}^{(i)}(z) + D_3^{(i)}(t_1^{(i)}e^{\mu z} - t_2^{(i)}e^{-\mu z}). \tag{35}$$

式中：

$$D_1^{(i)} = s_1 D_3^{(i)} + s_3, D_2^{(i)} = s_2 D_3^{(i)} + s_4,$$
$$D_3^{(i)} = \frac{(e_{31}^{(i)}\alpha_1^{(i)} + e_{33}^{(i)}\alpha_3^{(i)})\mu + (e_{31}^{(i)} + e_{15}^{(i)})\beta\mu s_3 - (e_{33}^{(i)}\mu^2 + e_{15}^{(i)}\beta^2)s_4}{\in_{11}^{(i)}\beta^2 - \in_{33}^{(i)}\mu^2 - (e_{31}^{(i)} + e_{15}^{(i)})\beta\mu s_1 + (e_{33}^{(i)}\mu^2 - e_{15}^{(i)}\beta^2)s_2},$$
$$s_1 = \beta\mu\frac{-(C_{33}^{(i)}\mu^2 - C_{55}^{(i)}\beta^2)(e_{31}^{(i)} + e_{15}^{(i)}) + (C_{13}^{(i)} + C_{55}^{(i)})(e_{33}^{(i)}\mu^2 - e_{15}^{(i)}\beta^2)}{(C_{55}^{(i)}\mu^2 - C_{11}^{(i)}\beta^2)(C_{33}^{(i)}\mu^2 - C_{55}^{(i)}\beta^2) + (C_{13}^{(i)} + C_{55}^{(i)})^2\beta^2\mu^2},$$
$$s_2 = \frac{-(C_{13}^{(i)} + C_{55}^{(i)})(e_{31}^{(i)} + e_{15}^{(i)})\beta^2\mu^2 - (C_{55}^{(i)}\mu^2 - C_{11}^{(i)}\beta^2)(e_{33}^{(i)}\mu^2 - e_{15}^{(i)}\beta^2)}{(C_{55}^{(i)}\mu^2 - C_{11}^{(i)}\beta^2)(C_{33}^{(i)}\mu^2 - C_{55}^{(i)}\beta^2) + (C_{13}^{(i)} + C_{55}^{(i)})^2\beta^2\mu^2},$$
$$s_3 = \beta\frac{(C_{11}^{(i)}\alpha_1^{(i)} + C_{13}^{(i)}\alpha_3^{(i)})(C_{33}^{(i)}\mu^2 - C_{55}^{(i)}\beta^2) - (C_{13}^{(i)}\alpha_1^{(i)} + C_{33}^{(i)}\alpha_3^{(i)})(C_{13}^{(i)} + C_{55}^{(i)})\mu^2}{(C_{55}^{(i)}\mu^2 - C_{11}^{(i)}\beta^2)(C_{33}^{(i)}\mu^2 - C_{55}^{(i)}\beta^2) + (C_{13}^{(i)} + C_{55}^{(i)})^2\beta^2\mu^2},$$
$$s_4 = \mu\frac{(C_{11}^{(i)}\alpha_1^{(i)} + C_{13}^{(i)}\alpha_3^{(i)})(C_{13}^{(i)} + C_{55}^{(i)})\beta^2 + (C_{13}^{(i)}\alpha_1^{(i)} + C_{33}^{(i)}\alpha_3^{(i)})(C_{55}^{(i)}\mu^2 - C_{11}^{(i)}\beta^2)}{(C_{55}^{(i)}\mu^2 - C_{11}^{(i)}\beta^2)(C_{33}^{(i)}\mu^2 - C_{55}^{(i)}\beta^2) + (C_{13}^{(i)} + C_{55}^{(i)})^2\beta^2\mu^2}. \tag{36}$$

解式(35)中的第一部分 $\widetilde{U}^{(i)}$ 、$\widetilde{W}^{(i)}$ 和 $\widetilde{\Phi}^{(i)}$ 为通解，与 Heyliger[23] 无温度效应的解一致，为

$$\widetilde{U}^{(i)}(z) = \sum_{j=1}^{3}(F_j^{(i)}C_j^{(i)}(z) + G_j^{(i)}S_j^{(i)}(z)),$$
$$\widetilde{W}^{(i)}(z) = \sum_{j=1}^{3}L_j^{(i)}(G_j^{(i)}C_j^{(i)}(z) + a_jF_j^{(i)}S_j^{(i)}(z)),$$
$$\widetilde{\Phi}^{(i)}(z) = \sum_{j=1}^{3}R_j^{(i)}(G_j^{(i)}C_j^{(i)}(z) + a_jF_j^{(i)}S_j^{(i)}(z)). \tag{37}$$

其详细解释见文献[23]，此处不赘述。解式(35)中的第二部分为特解，由温度场引起。对于 N 层层板，通解部分涉及到 $6N$ 个积分常数 $F_j^{(i)}$ 和 $G_j^{(i)}$ ($j=1,2,3$; $i=1,2,\cdots,N$)，特解部分涉及 $2N$ 个积分常数 $t_1^{(i)}$ 和 $t_2^{(i)}$ ，总共有 $8N$ 个积分常数。它们由 8 个板面条件和 $8(N-1)$ 个层间界面条件来确定：(1)8 个板面条件(如式(29)～(31))。这 8 个板面条件是常见的组合，但不是唯一的组合，也可以有其它形式的板面条件。(2)$8(N-1)$ 个界面条件，包括力学条件(5)、传热条件(8)或(12)、电学条件(21)或(26)中的一组，不同的界面条件组合分别构成界面模型 1～4。

因三场耦合的控制方程加之耦合的弱界面模型，很难获得解析解。关键在于弱界面模型与控制方程的匹配。一是物理参数的匹配，本文中选择各种界面模型的物理参数时与控制方程的物理量保持了一致，使之能方便地植入控制方程的解中。二是克服非线性问题，以往一些界面损伤模型不能采用，大多由于模型含非线性项，本文模型力求以合理的线性表达来描述界面，从而获得控制方程的解。

3 算例和讨论

依据弱界面力、电、热的不同物理表述，可以组合出 4 种界面力-电-热模型。目前涉及弱界面力、电、热三场问题的文献仅见 Kapuria 刚发表的的非耦合模型[14]，也是唯一可资比较的文献，本文中的非耦合模型 1 与 Kapuria 的模型[14]完全相同。本文算例着重四种模型之间的比较(也包括了与 Kapuria 模型[14]的比较)，讨论各界面模型的适用性、合理性，以及各界面模型的相互关系，为以后的深入研究提供借鉴。所用压电材料常数为

$E_{11}=237$ GPa，$E_{22}=23.2$ GPa，$E_{33}=10.5$ GPa，$G_{12}=6.43$ GPa，$G_{13}=4.4$ GPa，$G_{23}=2.15$ GPa，

$\nu_{12}=0.154$，$\nu_{13}=0.178$，$\nu_{23}=0.177$，

$e_{31}=e_{32}=-1\ \mathrm{C/m^2}$，$e_{15}=-0.13\ \mathrm{C/m^2}$，

$e_{24}=-0.14\ \mathrm{C/m^2}$，$e_{33}=-0.28\ \mathrm{C/m^2}$，

$\in_{11}=\in_{22}=1.106\times10^{-10}\ \mathrm{C^2/(Nm^2)}$，

$\in_{33}=1.06\times10^{-10}\ \mathrm{C^2/(Nm^2)}$，

$\alpha_1=10^{-7}\mathrm{K^{-1}}$，$\alpha_2=\alpha_3=10^{-5}\mathrm{K^{-1}}$，

$k_{11}=10\ \mathrm{W/(mK)}$，$k_{22}=k_{33}=1\ \mathrm{W/(mK)}$. (38)

采用下列无量纲参数：

$\bar{z}=z/h$，$(\bar{R}_t,\bar{R}_n)=(R_t,R_n)E_{22}/L$，

$\bar{R}_{eD}=R_{eD}\in_{22}/L$，$\bar{R}_{eW}=R_{eW}e_{31}/E_{22}$，

$\bar{R}_{\theta q}=R_{\theta q}k_{22}/L$，$\bar{R}_{\theta W}=R_{\theta W}\alpha_2 L$. (39)

设结构为两层[90°/0°]压电层板，$H=0.01$ m，$L/H=5$。分别承受热载、力载、电载。

3.1　热载下四种界面模型比较

设上下板面温度分别为 $100\sin\pi x/L$ 和 0，上下板面接地。这是一个力-电-热三场耦合问题。取损伤界面参数 $\bar{R}_t=\bar{R}_n=1$，$\bar{R}_{eD}=0.02$，$\bar{R}_{eW}=0.04$，$\bar{R}_{\theta q}=0.02$，$\bar{R}_{\theta W}=5$。图 3 为四种界面模型得到的挠度 W、应力 σ_x、温度 T、电势 Φ 在 $x=L/2$ 处沿板厚的分布。可见，界面松弛显著降低了因温变引起的热应力、位移，也显著改变了电场、温度场的分布，界面出现了位移、电势和温度跃变，但各种界面模型对力、电、热场的影响程度和方式不同。算例表明：(1)四种界面模型对位移、应力等弹性场的影响非常趋同，其差异可以忽略，因此为清晰起见，图 3(a)和 3(b)只给出了模型 1～4 中一条曲线的结果，这说明对弹性场的影响主要取决于界面弹性损伤参数 R_t、R_n，界面电、热损伤参数 R_e、R_θ 对弹性场影响有限；(2)对电场(图 3(c))，四种模型给出了几乎同样规律的电势分布，表明基于不同尺度、不同物理描述的界面模型可以定性地反映相似的规律，只是由于界面电损伤参数 R_{eD}、R_{ew} 的选取不同而有量的区别，模型 1 和模型 2 趋近，模型 3 和模型 4 趋近；(3)对于温度场(图 3(d))，不同模型可以预测相似的温度响应，也只是由于界面温度损伤参数 $R_{\theta D}$、$R_{\theta w}$ 的选取不同而有量的区别，模型 2 和模型 4 趋近，模型 1 和模型 3 因温度场的非耦合表征(8)导致结果完全相同。

这个算例比较了四种界面模型，但由于界面参数选取不是来源于实测的数据，难以从定量的角度对模型优劣作出精准判断。但是，有一些定性的规律清晰可见：比较两个压电层板，一个仍为[90°/0°]铺层，另一个为[0°/90°]铺层(即将[90°/0°]板反转)，表 1 给出了这两个层板在同样的热载下界面温度跃变值 Δt 和电势跃变值 $\Delta\Phi$。前者界面会产生张开型脱层($\Delta W>0$)，后者界面仅产生剪切滑移($\Delta W=0$)。对于前者，前面有详细的讨论，四种理论产生相似的结果，难以比较优劣。对于后者，因界面仍保持接触($\Delta W=0$)，温度和电势在界面应该连续，即界面 Δt 和 $\Delta\Phi$ 均应为零。根据耦合模型 4，因 $\Delta W=0$，Δt 和 $\Delta\Phi$ 自然为零；根据非耦合模型 1，则无论 ΔW 是否为零，Δt 和 $\Delta\Phi$ 均不为零；根据混合(部分耦合)模型 2 和 3，或 Δt 为零，或 $\Delta\Phi$ 为零。由此可见耦合模型更具合理性，应该成为研究的方向。

表 1　不同界面模型得到的[90°/0°]和[0°/90°]压电层板界面温度和电势跃变值

Table 1　Interfacial temperature and potential jumps of [90°/0°] and [0°/90°] piezoelectric laminates using four interfacial models

		Model 1	Model 2	Model 3	Model 4
[90°/0°]	Δt/K	9.86	4.79	9.86	4.79
($\Delta W>0$)	$\Delta\Phi$/V	314	275	444	445
[0°/90°]	Δt/K	6.74	0	6.74	0
($\Delta W=0$)	$\Delta\Phi$/V	494	557	0	0

3.2　力载下四种界面模型比较

若结构受力载或电载，则退化为力-电两相耦合问题，原有的四个模型退化为两个：模型 1(或模型 3)、模型 4(或模型 2)。设上下板面分布力载荷分别为 0 和 $q_0\sin\pi x/L$，上下板面接地。取界面损伤参数 $\bar{R}_t=\bar{R}_n=1$，$\bar{R}_{eD}=0.02$，$\bar{R}_{eW}=0.02$。结果再次表明，两种界面模型对位移、应力等弹性场影响非常趋同，其差异可以忽略(因此图 4 中的位移、应力图略)，也再次说明对弹性场的影响主要取决于界面弹性损伤参数 R_t、R_n，电界面损伤参数影响有限。对电场，图 4 给出了两种界面模型得到的电势、横向电位移在 $x=L/2$ 处沿板厚的分布，$\bar{\Phi}(=\Phi/q_0)$，$\bar{D}_z(=D_z/q_0)$。两种模型给出了几乎同样规律的电物理量分布，只是由于界面电损伤参数 R_{eD}、R_{ew} 的选取不同而有量的区别。

3.3　电载下四种界面模型比较

设结构仅受电载，上下板面电势分别为 $\phi_0\sin\pi x/L$ 和 0。这也是一个力-电两场耦合问题。取界面损伤参数 $\bar{R}_t=\bar{R}_n=1$，$\bar{R}_{eD}=0.02$，$\bar{R}_{eW}=4$。图 5 给出了两种界面模型得到的挠度、应力、电势在 $x=L/2$ 处沿板厚的分布，$\bar{W}(=W/\phi_0)$、

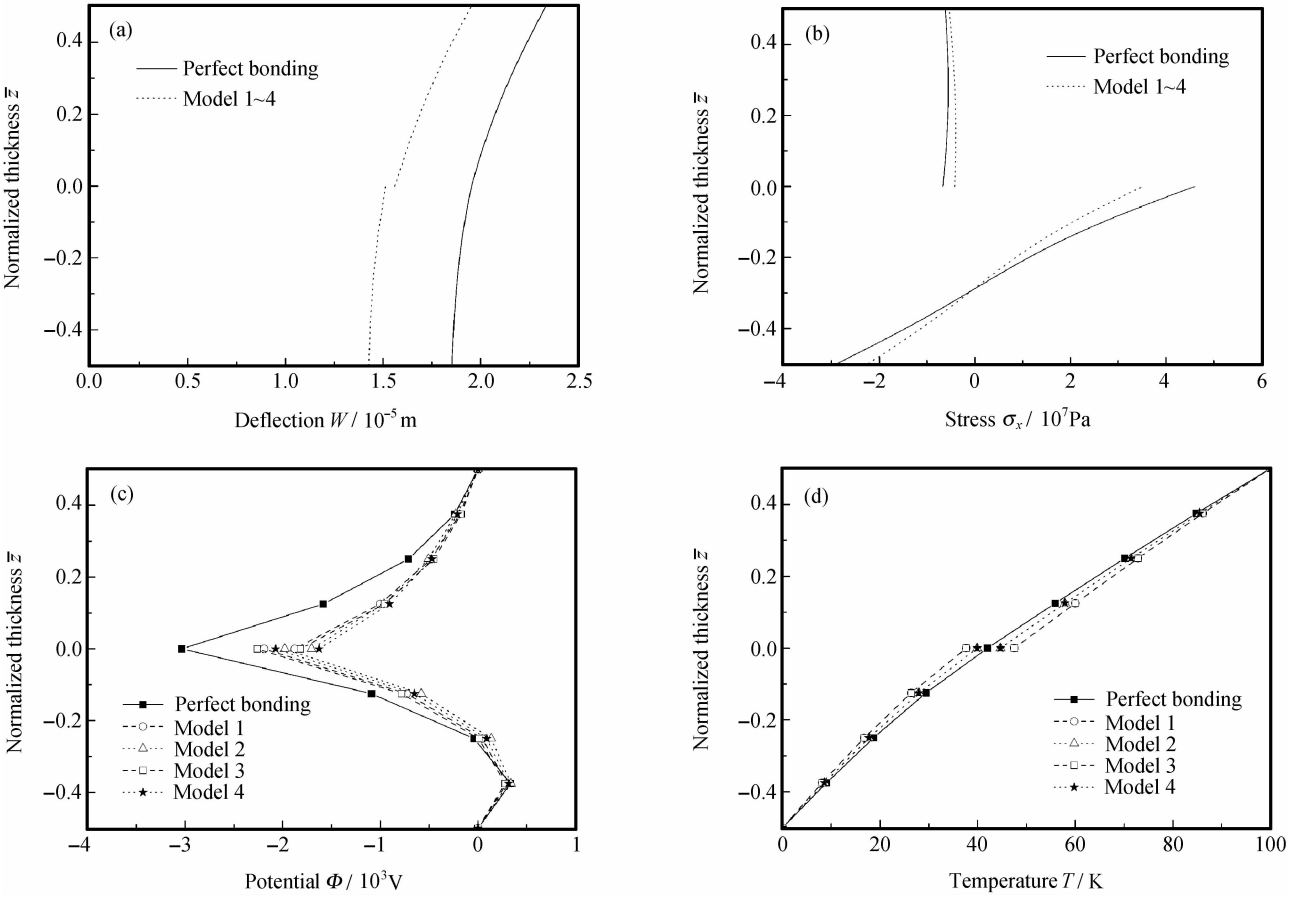

图 3　热载下含弱界面[90°/0°]压电层板弹性场、电场和温度场沿板厚分布(不同界面模型)

Fig. 3　Through-thickness elastic, electric and temperature fields in a [90°/0°] piezoelectric laminate with a weak interface under thermal load (different interfacial models)

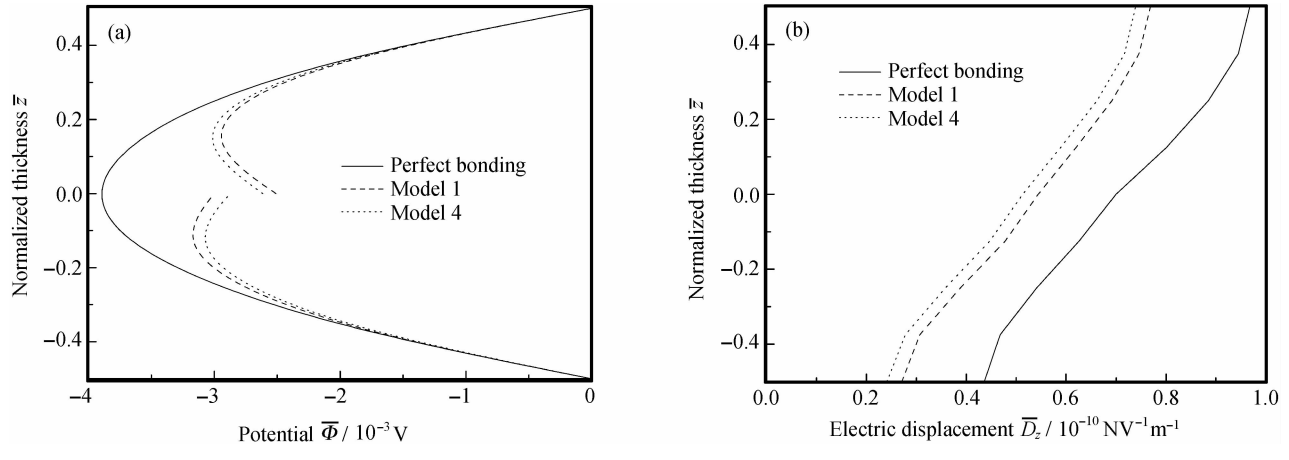

图 4　力载下含弱界面[90°/0°]压电层板电场沿板厚之分布(不同界面模型)

Fig. 4　Through-thickness electric fields in a [90°/0°] piezoelectric laminate with a weak interface under mechanical load (different interfacial models)

$\bar{\sigma}_x$(=σ_x/ϕ_0)、$\bar{\Phi}$(=Φ/ϕ_0)。与承受热载和力载时不同，不同界面模型无论对位移、应力，还是电势都有显著的影响，即所有物理量对界面弹性和电损伤参数都非常敏感。需要特别指出的是，图 5(c)显示两种界面模型得到的界面电势跃变符号相反，其中机制难以解释，表明损伤界面的电场变化规律最难刻画。承受电载的压电层合结构，对界面物理描述非常敏感，而恰恰电物理量的采集是压电元件主

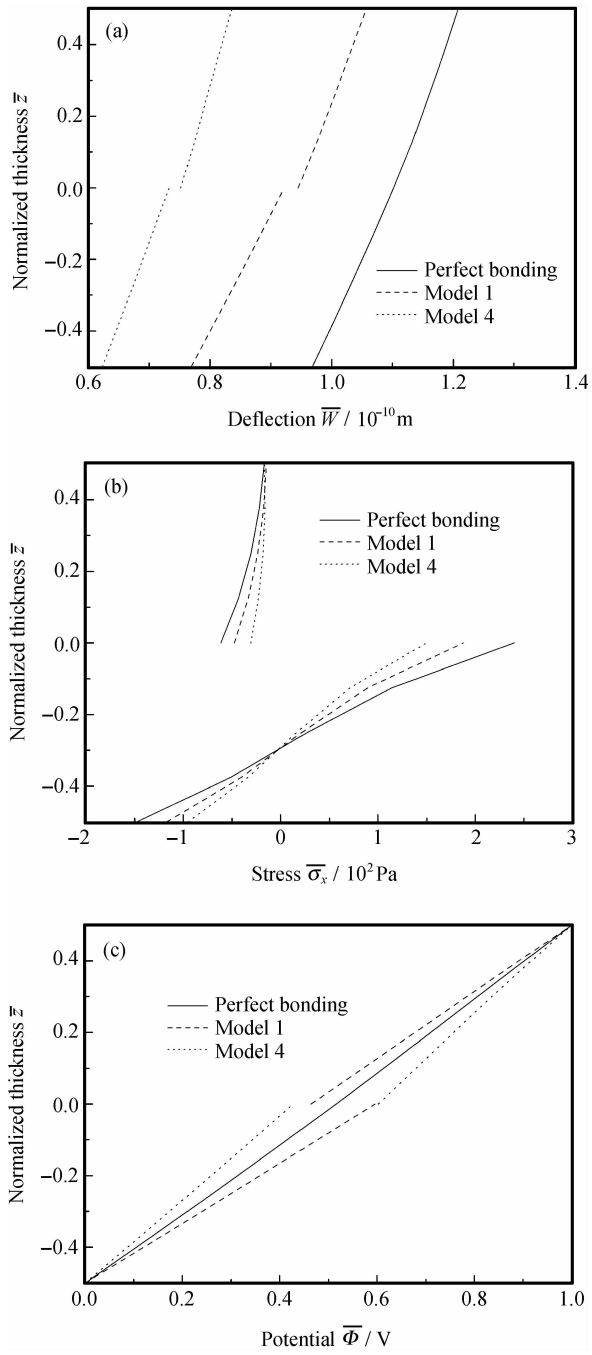

图 5　电载下含弱界面[90°/0°]压电层板弹性场和电场沿板厚之分布(不同界面模型)

Fig. 5　Through-thickness elastic and electric fields in a [90°/0°] piezoelectric laminate with a weak interface under electric load (different interfacial models)

要的功能，需要精准的表达。

总之，电场在三场中最敏感，弹性场和温度场的轻微变化都可能引起电场的显著变化，电物理量的变化规律已不仅取决于电场本身，其物理机制甚为复杂，在研究或选取界面电学假设时减少了规律性、增加了不确定性，研究远不充分，需要在定性和定量两个方面深入探索，尤其对实验的依赖大。

通过以上力、电、热三种载荷的讨论可见，不同尺度特性对结果的影响既有相似的一面，也有相异的一面。从定性的角度看，界面温度场的两尺度描述相似(文中有理论证明式(13)～(17)和算例的数值比较)；界面电场的两尺度描述在热载和力载时呈现出相似性，在电载时出现差异，原因在于电场较力、热两场敏感得多，更难描述。从定量的角度看，差异取决于各种模型中力、电、热三种界面损伤因子的选定，这需要大量的实验为基础。本文的理论模型提供了实验方案设计的方向、物理参数的选择。

4　结　论

(1) 基于宏观和细观尺度分析，在对损伤界面弹性场、电场、温度场的多相描述的基础上，组合成了四种界面力-电-热模型，分别为耦合型、非耦合型、混合型。基于这些界面模型，以柱面弯曲简支压电复合材料层板为例，得到了其力-电-热多场耦合解，算例及其数值结果可供后续研究者比较使用。

(2) 界面问题介于宏观和细观尺度之间，需要多尺度、跨尺度考虑。且基于不同尺度的模型也可获得相似的规律。

(3) 损伤界面的响应也是多场耦合的，在建立界面模型时，基于单一场的描述往往简洁，但考虑多场耦合的描述更趋本质。在各类模型中，耦合模型更具合理性，应该成为研究的方向。

(4) 在热载和力载下，不同界面模型对弹性场影响有限，其差异可以忽略，说明对弹性场的影响主要取决于界面弹性损伤参数 R_t、R_n，界面电、热损伤参数 R_e、R_θ 对弹性场影响有限。对电场和温度场，四种模型给出了数值有别、但规律相似的电势和温度分布，表明基于不同尺度、不同物理描述的界面模型可以定性地反映相似的规律。

(5) 在电载作用下，不同界面模型无论对弹性场还是电场，都有显著的影响，即所有物理量对界面弹性和电损伤参数都非常敏感，表明损伤界面的电场变化规律最难把握，是界面多场耦合描述的关键所在。而以电信号传递为主的压电传感元件，准确反映界面损伤信息非常重要。

(6) 各种界面损伤参数的确定，各类界面模型的定量比较，都需要大量的实验为基础，须加强实验研究。本文的理论模型提供了实验方案设计的方向、实验参数的选择。

参考文献：

[1] 杜善义. 先进复合材料与航空航天 [J]. 复合材料学报，2007，24(1)：1-12.
Du Shanyi. Advanced composite materials and aerospace engineering [J]. Acta Materiae Compositae Sinica，2007，24(1)：1-12.

[2] Lu X，Liu D. Interlayer shear slip theory for cross - ply laminates with nonrigid interfaces [J]. AIAA Journal，1992，30：1063-1073.

[3] Williams T O，Addessio F L. A general theory for laminated plates with delaminations [J]. Interational Journal of Solids and Structures，1997，34(16)：2003-2024.

[4] Shu X P，Soldatos K P. An accurate stress analysis model for angle- ply laminates with weak bounded layers [J]. Acta Mechanica，2001，150(3/4)：161-178.

[5] Shu X P，Soldatos K P. An accurate de-lamination model for weakly bonded laminates subjected to different sets of edge boundary conditions [J]. International Journal of Mechanical Science，2001，43(4)：935-959.

[6] Soldatos K P，Shu X P. Modelling of perfectly and weakly bonded laminated plates and shallow shells [J]. Composite Science and Technology，2001，61(2)：247-260.

[7] Seeley C E，Chattopadhyay A. Experimental investigation of composite beams with piezoelectric actuation and debonding [J]. Smart Material Structures，1998，7(4)：502-511.

[8] Seeley C E，Chattopadhyay A. Modeling of adaptive composites including debonding [J]. International Journal of Solids and Structures，1999，36(12)：1823-1843.

[9] Icardi U，Di Sciuva M，Librescu L. Dynamic response of adaptive cross - ply cantilevers featuring interlaminar bonding imperfections [J]. AIAA Journal，2000，38：499-506.

[10] Shu X P. Modelling of cross - ply piezoelectric composite laminates in cylindrical bending with interfacial shear slip [J]. International Journal of Mechanical Sciences，2005，47(11)：1673-1692.

[11] Sun D，Tong L. Control stability analysis of smart beams with debonded piezoelectric actutor layer [J]. AIAA Journal，2002，40：1852-1859.

[12] Chen W Q，Cai J B，Ye G R，Wang Y F. Exact three - dimensional solutions of laminated orthotropic piezoelectric rectangular plates featuring interlaminar bonding imperfections modeled by a general spring layer [J]. International Journal of Solids and Structures，2004，41(18/19)：5247-5263.

[13] Shu X P. Thermoelastic delamination of composite laminates with weak interfaces [J]. Composite Structures，2008，84(4)：310-318.

[14] Kapuria S，Nair P G. Exact three - dimensional piezothermoelasticity solution for dynamics of rectangular cross - ply hybrid plates featuring interlaminar bonding imperfections [J]. Composites Science and Technology，2010，70(5)：752-762.

[15] Hashin Z. Thermoelastic properties of fiber composites with imperfect interface [J]. Mechanics of Materials，1990，8(4)：333-348.

[16] Hashin Z. Thin interphase/imperfect interface in conduction [J]. Journal of Applied Physics，2001，89(4)：2261-2267.

[17] Benveniste Y. On the decay of end effects in conduction phenomena：A sandwich strip with imperfect interfaces of low or high conductivity [J]. Journal of Applied Physics，1999，86(3)：1273-1279.

[18] Benveniste Y. A general interface model for a three - dimensional curved thin anisotropic interphase between two anisotropic media [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids，2006，54(4)：708-734.

[19] Parton V Z. Fracture mechanics of piezoelectric materials [J]. Acta Astronautics，1976，3(9/10)：671-683.

[20] Deeg W F. The analysis of dislocation crack and inclusion problems in piezoelectric solid [D]. Stanford：Stanford University，1980.

[21] Pak Y E. Crack extension force in a piezoelectric material [J]. Journal of Applied Mechanics，1990，57：647-653.

[22] Fan H，Sze K Y. A micro - mechanics model for imperfect interface in dielectric materials [J]. Mechanics of Materials，2001，33(6)：363-373.

[23] Heyliger P R，Brooks S. Exact solutions for laminated piezoelectric plates in cylindrical bending [J]. Journal of Applied Mechanics，1996，63(4)：903-910.