复合材料学报 第28卷 第1期 2月 2011年
Acta Materiae Compositae Sinica Vol. 28 No. 1 February 2011

文章编号：1000-3851(2011)01-0211-07

压电复合材料三维壳体简化数值建模研究

钟轶峰*[1,2]，YU Wenbin[3]
（1. 重庆大学 土木工程学院，重庆 400045；2. 山地城镇建设与新技术教育部重点实验室(重庆大学)，重庆 400045；
3. Department of Mechanics and Aerospace Engineering，Utah State University，USA）

摘　要： 为有效分析三维压电复合材料壳体结构非线性、单向耦合压电弹性问题，基于变分渐近方法(VAM)建立了壳体结构在机械和电场作用下的简化模型。推导了基于旋转张量分解概念的压电复合材料三维壳体能量表达式；利用变分渐近法将三维壳体严格拆分为二维壳体线性分析和沿法线方向的一维非线性分析；进行了降维后近似能量推导及 Reissner－Mindlin 形式转换；提供了三维场重构关系以得到沿厚度方向的准确应力分布。通过对由 4 层压电复合材料构成的壳体柱形弯曲算例分析表明：基于该理论和重构过程开发的变分渐近程序 VAPAS 重构生成的三维应力场精确性较一阶剪切变形理论和古典层合理论更好，与三维有限元精确解相吻合，表明该压电复合材料壳体模型的有效性。

关键词： 变分渐近法；压电复合材料三维壳体；应力场重构；Reissner－Mindlin 模型
中图分类号： TB330.1　　**文献标志码：** A

Simplified numerical modeling of 3D piezoelectric composite shells

ZHONG Yifeng*[1,2]，YU Wenbin[3]
（1. School of Civil Engineering，Chongqing University，Chongqing 400045，China；
2. Key Laboratory of New Technology of Construction of Cities in Mountain Area (Chongqing University)，
Ministry of Education，Chongqing 400045，China；
3. Department of Mechanics and Aerospace Engineering，Utah State University，USA）

Abstract： Based on the variational asymptotic method (VAM)，an engineering model for piezoelectric composite shell under mechanical and electronic loads was established in order to efficient analyze the nonlinear，one－way coupled piezoelectric problem. The 3D energy expressions based on the decomposition of rotation tensor (DRT) were deduced. The 3D shell model was decomposed into a 2D，nonlinear shell analysis and a linear analysis through the normal direction based on VAM. The approximate energy after dimensionality reduction was deduced and converted to a form of Reissner－Mindlin model. The 3D field recovery relations were provided to obtain accurate stress distribution through the thickness. The cylindrical bending example of 4－layer piezoelectric composite shell shows that the 3D stress field recovered by the variational asymptotic plate and shell analysis program (VAPAS) based on this theory agrees better with the exact results than those of first-order shear deformation theory (FOSDT) and classic laminated theory (CLT)，indicating the validity of this model.

Keywords： variational asymptotic method；piezoelectric composite shells；stress field recovery；Reissner－Mindlin model

近 20 年来，智能结构由于其强度高、刚度大、质量轻、阻尼可变，可很好地满足结构工程的需要，已成为研究的热点[1-3]。在众多用于致动器和传感器的智能材料中(如形状记忆合金、磁流变材料、压电材料等)压电材料最受关注，主要原因是：(1) 可直接将电子信号与应变场联系，反之亦然，因此，可集驱动和传感于一身；(2) 有较宽的频率响应范围，适合各种控制和监测。而且在很多情况下，压电材料与各向异性材料结合使用可最大化智能结构的"智慧"。尽管目前很多研究都集中于同温

收到初稿日期： 2010-05-04；**收到修改稿日期：** 2010-10-09
基金项目： 中央高校基本科研业务费(CDJZR10200017)
通讯作者： 钟轶峰，博士，讲师，主要研究方向：复合材料结构设计　E-mail：zhongjy58@sina.com

条件下压电结构的性能，对其热电力学性能的研究也在持续增长[4-6]。

许多智能结构都属于厚度尺寸比其它两方向尺寸小得多的壳体结构(板可视为衰退的、无初始曲率的壳)。基于如 Kirchhoff 薄层假设、由三维热电弹性理论推导出的古典分层理论(CLT)[7]、一阶剪切变形理论(FOSDT)[8]在现有智能壳体结构分析中占主导地位，可通过复杂的理论和大量的计算得到较可靠的结果。但若计入壳体厚度，其精度较三维有限元精确解下降很多。主要原因是这些理论假设沿壳体厚度方向位移为 C^{∞} 函数，而实际上位移函数可能是不连续函数。

从数学的观点看，简化分析源于利用壳体结构厚度相对面内变形和曲率半径很小的特点，将厚度坐标从控制偏微分方程的独立变量中消除，但许多壳体分析理论所作的变形场假设应尽量避免[9]，因此迫切需要建立一种不需任何动力学假设的三维壳体分析方法和理论，以充分发挥压电复合材料的潜力。

本文中主要研究将变分渐近方法(VAM)[10-11]扩展到由压电复合材料驱动的智能复合壳体结构分析中，在线性材料范围内研究压电复合壳体结构的热/压电致动性，建立一种简单的、便于工程应用的压电弹性二维壳体简化模型，同时利用得到的二维壳体全局响应和翘曲函数精确重构三维应力/应变/位移场，以解决压电复合材料壳体结构各向异性、非线性带来结构复杂性的关键技术问题，为今后压电复合材料壳体结构的进一步研究与应用提供新的思路和理论依据。

1 公式推导

1.1 三维壳体能量表达式

三维壳体基准面上任意一点位置可由图 1 所示的笛卡尔坐标系 x_i 表示(下标 i、j、k 代表 1、2、3；希腊字母下标 α、β 代表 1、2)。为不失一般性，选择曲率线为坐标轴以简化方程。

引入一组沿 x_i 方向的单位向量 b_i，三维壳体基准面上任一点的位置可由固定点 o 到 x_α 确定点的位置向量 $\hat{r}$ 描述为

$$\hat{r}(x_1, x_2, x_3)=r(x_1, x_2)+x_3 b_3(x_1, x_2) \tag{1}$$

若选择三维壳体中间层作为基准面时，可得到

$$\langle \hat{r}(x_1, x_2, x_3)\rangle = hr(x_1, x_2) \tag{2}$$

式中：尖括号表示沿三维壳体厚度方向的积分，下同。

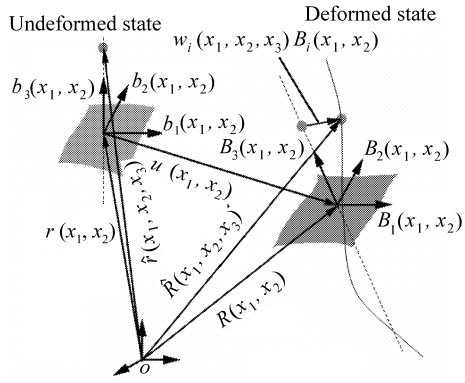

图 1 三维壳体基准面变形前后坐标系

Fig. 1 Coordinates system of 3D shell before and after deformation

二维基向量可照惯例定义为

$$a_\alpha(x_1, x_2)=r_{,\alpha} \tag{3}$$

式中；$()_{,\alpha}=\partial()/\partial x_\alpha$，下同。

由此定义可得 Lamé 参数为

$$A_\alpha(x_1, x_2)=\sqrt{a_\alpha \cdot a_\alpha} \tag{4}$$

沿坐标系 x_α 的单位向量可表示为

$$b_\alpha(x_1, x_2)=a_\alpha/A_\alpha \tag{5}$$

由式(3)可得到三维协变基向量 $g_i=\hat{r}_{,i}$ 为

$$g_\alpha=a_\alpha+x_3 b_{3,\alpha},\ g_3=b_3 \tag{6}$$

逆变基向量为

$$g^\alpha=\frac{b_\alpha}{A_\alpha(1+x_3 k_{\alpha\alpha})},\ g_3=b_3 \tag{7}$$

式中 $k_{\alpha\alpha}$ 为未变形几何曲率。

当壳体变形后，位置向量 $\hat{r}$ 转换为变形状态的位置向量 $\hat{R}$，后者可通过引入与变形形状相关的单位向量 B_i 唯一确定。值得注意的是 B_i 仅是为方便表达向量引入的工具，其方向不必与变形壳体相切。B_i 和 b_i 之间的关系可由方向余弦函数矩阵 $C(x_1, x_2)$ 确定为

$$B_i=C_{ij} b_j,\quad C_{ij}=B_i \cdot b_j \tag{8}$$

变形壳体上任一点的位置向量可表示为

$$\hat{R}=R+x_3 B_3+w_i(x_1, x_2, x_3) B_i \tag{9}$$

式中 w_i 是翘曲分量。在这里视为未知的三维函数求解，以考虑包括翘曲变形在内的所有可能变形。

由于翘曲函数的引入，式(9)有 6 次冗余，需通过选择 6 个适当的约束在 $\hat{R}$ 和($\hat{R}$, B_i, w_i)之间建立一一对应的关系。与式(2)类似，可定义 $\hat{R}$ 在变形壳体的中间层，这样，翘曲函数必须满足以下 3 个约束：

$$\langle w_i(x_1, x_2, x_3)\rangle=0 \tag{10}$$

将 B_3 设为与变形壳体基准面垂直可确定其它 2 个约束。最后 1 个约束可由 B_α 的旋转得到，$B_1 \cdot R_{,2} = B_2 \cdot R_{,1}$。

基于旋转张量分解理论[12-13]，由局部小旋转的条件，Jauman－Biot－Cauchy 应变分量可表示为

$$\Gamma_{ij} = 1/2(F_{ij} + F_{ji}) - \delta_{ij} \tag{11}$$

式中 F_{ij} 是变形梯度张量的混合基分量

$$F_{ij} = B_i \cdot G_k g^k \cdot b_j \tag{12}$$

式中：g^k 是未变形状态的逆变基，$g^k = g_k = b_k$；$G_k = \hat{R}_{,k}$ 为变形状态的协变基，可由广义二维应变定义得到

$$\begin{aligned} R_{,\alpha} &= A_\alpha(B_\alpha + e_{\alpha\beta}B_\beta) \\ B_{i,\alpha} &= A_\alpha(-K_{\alpha 2}B_1 + K_{\alpha 1}B_2 + K_{\alpha 3}B_3) \times B_i \end{aligned} \tag{13}$$

式中：$\varepsilon_{\alpha\beta}$ 为 n 阶二维应变；K_{ij} 为变形曲面的曲率，是未变形几何曲率 k_{ij} 和变形曲率 κ_{ij} 之和。

对大多数中等厚度的壳体结构，h/R 约为 0.1，h/l 约为 0.5（h，l，R 分别为三维壳体的厚度、长度和翘曲变形值）。假设应变很小，可忽略一维广义应变和翘曲的乘积项，得到含 h/R、h/l、$(h/l)^2$ 阶次项的三维应变场为

$$\Gamma = \Gamma_h w + \Gamma_\varepsilon \varepsilon + \Gamma_{Rh} w + \Gamma_{R\varepsilon}\varepsilon + \Gamma_{l_\alpha} w_{,\alpha} \tag{14}$$

式中：

$$\begin{aligned} \Gamma &= [\Gamma_{11} \quad 2\Gamma_{12} \quad 2\Gamma_{22} \quad 2\Gamma_{13} \quad 2\Gamma_{23} \quad \Gamma_{33}]^{\mathrm{T}} \\ w &= [w_1 \quad w_2 \quad w_3]^{\mathrm{T}} \\ \varepsilon &= [\varepsilon_{11} \quad 2\varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{22} \quad \kappa_{11} \quad \kappa_{12} + \kappa_{21} \quad \kappa_{22}]^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{15}$$

算子 Γ_h、Γ_ε、$\Gamma_{R\varepsilon}$、Γ_{Rh}、Γ_{l_α} 可参阅文献[8]。

为完善三维公式，需提供三维壳体应变-应力本构模型，以得到规定温度和电场下单向耦合热压电弹性性能。在这里未考虑由壳体变形引起的温度和电场的变化，以及温度与电场之间的交互作用。所采用的三维本构模型是包含温度和电场的一次线性电热函，每单位面积上的电热函为

$$U = (\langle 1/2\Gamma^{\mathrm{T}} D\Gamma - \Gamma^{\mathrm{T}} D\alpha T - \Gamma^{\mathrm{T}} Dd\varepsilon \rangle \rho) \tag{16}$$

式中：D 为弹性材料矩阵；α 为热膨胀系数；T 为温度差；d 为应变压电弹性常数；ε 为电势场；ρ 为壳体几何修正系数，$\rho = 1 + x_3(k_{11} + k_{22}) + O(h^2/R^2)$。其中，$O(h^2/R^2)$ 是含 h^2/R^2 的阶次的项。

通过引入实际变形的拉格朗日变量虚拟位移和旋转可得到载荷产生的虚功为

$$\delta\hat{R} = \delta\bar{q}_{B_i} B_i + x_3 \delta B_3 + \delta w_i B_i + w_j \delta B_j \tag{17}$$

式中虚拟位移为

$$\delta\bar{q}_{B_i} = \delta u \cdot B_i \tag{18}$$

虚拟旋转为

$$\delta B_i = (-\delta\bar{\psi}_{B_\beta} B_\beta \times B_3 + \delta\bar{\psi}_{B_3} B_3) \times B_i \tag{19}$$

由于应变很小，可安全地忽略虚拟旋转中翘曲与载荷的乘积项。由载荷 $\tau_i B_i$、$\beta_i B_i$、$\phi_i B_i$（分别作用在壳体的顶面、底面和厚度方向）产生的虚功为

$$\begin{aligned} \delta\overline{W} = {} & (\tau_i + \beta_i + \langle \phi_i \rangle)\delta\bar{q}_{B_i} + \delta(\tau_i w_i^+ + \beta_i w_i^- + \langle \phi_i w_i \rangle) \\ & + \delta\bar{\psi}_{B_\alpha}[h/2(\tau_\alpha - \beta_\alpha) + \langle x_3 \phi_\alpha \rangle] \end{aligned} \tag{20}$$

式中：τ_i、β_i、ϕ_i 视为独立变形；$()^+ = ()|_{x_3 = h/2}$，$()^- = ()|_{x_3 = -h/2}$，下同。

通过引入 δq、$\delta\psi$、τ、β、ϕ 列阵，得到矩阵形式的虚功

$$\delta\overline{W} = \delta\bar{q}^{\mathrm{T}} f + \delta\bar{\psi}^{\mathrm{T}} m + \delta(\tau^{\mathrm{T}} w^+ + \beta^{\mathrm{T}} w^- + \langle \phi^{\mathrm{T}} w \rangle) \tag{21}$$

式中：

$$f = \tau + \beta + \langle \phi \rangle;\ m = \begin{Bmatrix} h/2(\tau_1 - \beta_1) + \langle x_3 \phi_1 \rangle \\ h/2(\tau_2 - \beta_2) + \langle x_3 \phi_2 \rangle \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{22}$$

在这里，载荷的阶数是 h/l 阶或更高阶。为与近似相一致，去掉虚功中所有 h/R 阶修正项。根据虚功原理，三维壳体变形后的能量问题可完整表述为

$$\delta U - \delta\overline{W} = 0 \tag{23}$$

虚拟量有 3 种：虚拟位移 $\delta\bar{q}$，虚拟旋转 $\delta\bar{\psi}$ 和翘曲场变量 δw。前 2 个量可由二维壳体变形分析求解，w 是建模过程中唯一需要确定的未知量，可通过对能量泛函最小化求得：

$$\delta\Pi = 0 \tag{24}$$

式中 $\Pi = U - (\tau^{\mathrm{T}} w^+ + \beta^{\mathrm{T}} w^- + \langle \phi^{\mathrm{T}} w \rangle)$

到目前为止，建立了基于三维位移的压电复合材料壳体分析公式，但这仅是原三维壳体问题的另一表达形式，若直接进行求解，会遇到与原三维热电弹性问题同样的困难。若三维壳体由多层压电复合层构成，该计算过程将变得十分繁琐。本文中借助变分渐近法渐近计算三维翘曲函数，可使计算得到简化。

1.2　降维后的近似能量公式推导

为将原三维壳体问题严格降维为二维壳体问题，必须将原三维壳体中的能量用二维公式再现。可利用壳体 h/l、h/R 很小的特点，进行渐近降维。为在渐近分析中减少小参数量，设由温度和电场产生的应变为 n 阶，则各分量的阶数为

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{\alpha\beta} \sim h\kappa_{\alpha\beta} \sim n,\ f_3 \sim \mu(h/l)^2 n,\ f_\alpha \sim \mu(h/l)n, \\ & m_\alpha \sim \mu h(h/l)n,\ \alpha T \sim n,\ d\varepsilon \sim n. \end{aligned} \tag{25}$$

式中 μ 为弹性材料常量。

渐近修正到 $O(h/R)$ 和 $O(h^2/R^2)$ 阶的二维能量范函为

$$\Pi = \mu\varepsilon^2[O(1)+O(h/R)+O(h/l)+O(h^2/l^2)] \tag{26}$$

为能处理多层壳体结构和任意单斜材料，并与二维有限元求解器相容，应用有限元方法将三维翘曲场离散为一维有限元单元形式

$$w(x_i)=S(x_3)V(x_1,x_2) \tag{27}$$

式中：S 为形函数；V 为沿横向法线方向的翘曲场节点位移。

将式(27)代入式(24)，可将能量范函在近似精度范围内以离散形式表示为

$$\begin{aligned}2\Pi = {} & V^{\mathrm{T}}EV+2V^{\mathrm{T}}(D_{h\varepsilon}\varepsilon+D_{Rh\varepsilon}\varepsilon+D_{hRh}V+D_{hR\varepsilon}\varepsilon \\ & +D_{hl_\alpha}V_{;\alpha})+\varepsilon^{\mathrm{T}}(D_{\varepsilon\varepsilon}+2D_{\varepsilon R\varepsilon})\varepsilon+V_{;\alpha}^{\mathrm{T}}D_{l_\alpha l_\beta}V_{;\beta} \\ & +2V_{;\alpha}^{\mathrm{T}}D_{l_\alpha\varepsilon}\varepsilon-2V^{\mathrm{T}}(\alpha_h+\alpha_{Rh})-2\varepsilon^{\mathrm{T}}(\alpha_\varepsilon+\alpha_{R\varepsilon}) \\ & -2V_{;\alpha}^{\mathrm{T}}\alpha_{l_\alpha}-2V^{\mathrm{T}}(\varepsilon_h+\varepsilon_{Rh})-2\varepsilon^{\mathrm{T}}(\varepsilon_\varepsilon+\varepsilon_{R\varepsilon}) \\ & -2V_{;\alpha}^{\mathrm{T}}\varepsilon_{l_\alpha}+2V^{\mathrm{T}}L\end{aligned} \tag{28}$$

式中$()_{;\alpha}=()_{,\alpha}/A_\alpha$，下同。

$L=-S^{+\mathrm{T}}\tau-S^{-\mathrm{T}}\beta-\langle S^{\mathrm{T}}\phi\rangle$为载荷相关项；新引入的与几何形状和材料属性有关的矩阵包括

$E=\langle[\Gamma_hS]^{\mathrm{T}}D[\Gamma_hS]\rho\rangle$，$D_{h\varepsilon}=\langle[\Gamma_hS]^{\mathrm{T}}D\Gamma_\varepsilon\rho\rangle$

$D_{hl_\alpha}=\langle[\Gamma_hS]^{\mathrm{T}}D[\Gamma_{l_\alpha S}]\rangle$，$D_{l_\alpha l_\beta}=\langle[\Gamma_{l_\alpha}S]^{\mathrm{T}}D[\Gamma_{L_\beta}S]\rangle$

$D_{\varepsilon\varepsilon}=\langle\Gamma_\varepsilon^{\mathrm{T}}D\Gamma_\varepsilon\rho\rangle$，$D_{l_\alpha\varepsilon}=\langle[\Gamma_{l_\alpha}S]^{\mathrm{T}}D\Gamma_\varepsilon\rangle$，

$D_{hRh}=\langle[\Gamma_hS]^{\mathrm{T}}D[\Gamma_{Rh}S]\rangle$，$D_{hR\varepsilon}=\langle[\Gamma_hS]^{\mathrm{T}}D\Gamma_{R\varepsilon}\rangle$

$\alpha_h=\langle[\Gamma_hS]^{\mathrm{T}}DT\rho\rangle$，$\alpha_\varepsilon=\langle[\Gamma_\varepsilon]^{\mathrm{T}}D\alpha T\rho\rangle$

$\alpha_{Rh}=\langle[\Gamma_{Rh}S]^{\mathrm{T}}D\alpha T\rangle$，$\alpha_{R\varepsilon}=\langle[\Gamma_{R\varepsilon}]^{\mathrm{T}}D\alpha T\rangle$

$\varepsilon_h=\langle[\Gamma_hS]^{\mathrm{T}}Dd\varepsilon\rho\rangle$，$\varepsilon_\varepsilon=\langle[\Gamma_\varepsilon]^{\mathrm{T}}Dd\varepsilon\rho\rangle$，

$\varepsilon_{Rh}=\langle[\Gamma_{Rh}S]^{\mathrm{T}}Dd\varepsilon\rangle$，$\varepsilon_{R\varepsilon}=\langle[\Gamma_{R\varepsilon}]^{\mathrm{T}}Dd\varepsilon\rangle$，

$$\alpha_{l_\alpha}=\langle[\Gamma_{l_\alpha}S]^{\mathrm{T}}D\alpha T\rangle,\ \varepsilon_{l_\alpha}=\langle[\Gamma_{l_\alpha}S]^{\mathrm{T}}Dd\varepsilon\rangle. \tag{29}$$

式(10)翘曲函数约束的离散形式为

$$V^{\mathrm{T}}H\psi=0 \tag{30}$$

式中：$H=\langle S^{\mathrm{T}}S\rangle$；$\psi$ 为零初始曲率 E_0 的正交化核心矩阵，$\psi^{\mathrm{T}}H\psi=I$。这样问题转化为式(30)约束下式(28)最小化问题。

应用 VAM，首先需根据泛函的不同阶数找到主导项，由于只有翘曲是变化的，只需找到含翘曲的主导项。对式(28) 零阶近似后泛函的主导项为

$$2\Pi_0^*=V^{\mathrm{T}}E_0V+2V^{\mathrm{T}}D_{h\varepsilon0}\varepsilon-2V^{\mathrm{T}}\alpha_{h0}-2V^{\mathrm{T}}\varepsilon_{h0} \tag{31}$$

式中 E_0、$D_{h\varepsilon0}$、α_{h0}、ε_{h0}分别为 $\rho=1$(无几何修正)时由式(29) 定义的相关矩阵。

最小化式(28)，可得到零阶翘曲函数为

$$V_0=\hat{V}_0\varepsilon+V_T+V_\varepsilon \tag{32}$$

将式(32)代回式(28)，可得到渐近修正到 μn^2 阶的二维电热函为

$$2\Pi_0=\varepsilon^{\mathrm{T}}A\varepsilon-2\varepsilon^{\mathrm{T}}N_T-2\varepsilon^{\mathrm{T}}N_\varepsilon \tag{33}$$

式中：A 为二维刚度矩阵，$A=(\hat{V}_0^{\mathrm{T}}D_{h\varepsilon0}+V_{\varepsilon\varepsilon0})$；$N_T$、$N_\varepsilon$ 分别为给定温度和电场下的应力之和

$$N_T=\alpha_{\varepsilon0}+1/2(\hat{V}_0^{\mathrm{T}}\alpha_{h0}-D_{h\varepsilon0}^{\mathrm{T}}V_T)$$

$$N_\varepsilon=\varepsilon_{\varepsilon0}+1/2(\hat{V}_0^{\mathrm{T}}\varepsilon_{h0}-D_{h\varepsilon0}^{\mathrm{T}}V_\varepsilon) \tag{34}$$

该近似能量与古典压电弹性壳理论相吻合，但未引入 Kirchhoff 假设。尽管基于零阶近似的壳体修正理论可对薄壳结构的全局和面内变形量进行很好的预测，但对中等厚度的壳结构，还需利用小参数 h/R、h/l 进行修正，以对全局变形、面内变形量及面外应力和应变进行准确预测。首先得到 h/R 的修正值以考虑壳体初始曲率的影响。对大多数工程应用，渐近修正到 h/R 一阶的热函已具有足够精度，可表示为

$$2\Pi_R=\varepsilon^{\mathrm{T}}A_R\varepsilon-2\varepsilon^{\mathrm{T}}N_{TR}-2\varepsilon^{\mathrm{T}}N_{\varepsilon R} \tag{35}$$

式中：

$$\begin{aligned}A_R &= A+\hat{V}_0^{\mathrm{T}}E^*\hat{V}_0^{\mathrm{T}}+D_{\varepsilon\varepsilon}^*+2\hat{V}_0^{\mathrm{T}}(D_{h\varepsilon}^*+D_{hR\varepsilon}+D_{Rh\varepsilon}) \\ &\quad +2D_{\varepsilon R\varepsilon}+2\hat{V}_0^{\mathrm{T}}V_{hRh}\hat{V}_0, \\ N_{TR} &= N_T+\alpha_\varepsilon^*+\alpha_{R\varepsilon}-(D_{h\varepsilon}^*+D_{hR\varepsilon}+D_{Rh\varepsilon})^{\mathrm{T}}V_T \\ &\quad +\hat{V}_0^{\mathrm{T}}[\alpha_{Rh}+\alpha_h^*-(E^*+D_{hRh}+D_{hRh}^{\mathrm{T}})V_T], \\ N_{\varepsilon R} &= N_\varepsilon+\varepsilon_\varepsilon^*+\varepsilon_{R\varepsilon}-(D_{h\varepsilon}^*+D_{hR\varepsilon}+D_{Rh\varepsilon})^{\mathrm{T}}V_\varepsilon \\ &\quad +\hat{V}_0^{\mathrm{T}}[\varepsilon_{Rh}+\varepsilon_h^*-(E^*+D_{hRh}+D_{hRh}^{\mathrm{T}})V_\varepsilon].\end{aligned} \tag{36}$$

为准确描述壳体的横向剪切变形，需推导与主导项对应的修正到$(h/l)^2$ 的能量，以计算修正到 h/l 阶的翘曲场。对零阶翘曲进行如下摄动

$$V=V_0+V_1 \tag{37}$$

将式(37)代回式(29)，可得到能量泛函一阶近似的主导项为

$$\begin{aligned}2H_1^* = {} & V_1^TEV_1+2V_1^TD_\alpha\varepsilon_{;\alpha}+2V_1TL_T+ \\ & 2V_1L_\varepsilon+2V_1^TL\end{aligned} \tag{38}$$

式中：

$$\begin{aligned}D_\alpha &= (D_{hl_\alpha}-D_{hl_\alpha}^{\mathrm{T}})\hat{V}_0-D_{l_\alpha\varepsilon}, \\ L_T &= (D_{hl_\alpha}-D_{hl_\alpha}^{\mathrm{T}})V_{T;\alpha}+\alpha_{l_\alpha;\alpha}, \\ L_\varepsilon &= (D_{hl_\alpha}-D_{hl_\alpha}^{\mathrm{T}})V_{\varepsilon;\alpha}+\varepsilon_{l_\alpha;\alpha}.\end{aligned} \tag{39}$$

与零阶近似类似，一阶翘曲可由下式求解：

$$V_1=V_{1\alpha}\varepsilon_{;\alpha}+V_{1T}+V_{1\varepsilon}+V_{1L} \tag{40}$$

代入式(38)，得到渐近修正到 $\mu(h/l)^2n$、$\mu(h/R)n$ 阶总泛函为

$$\begin{aligned}2\Pi_1 = {} & \varepsilon^TA_R\varepsilon+\varepsilon_{;1}^TC_1\varepsilon_{;1}+2\varepsilon_{;1}^TC_2\varepsilon_{;2}+\varepsilon_{;2}^TC_3\varepsilon_{;2}- \\ & 2\varepsilon^TF_T-2\varepsilon^TF_\varepsilon-2\varepsilon^tF\end{aligned} \tag{41}$$

式中：

$$C_1=\hat{V}_0^{\mathrm{T}}D_{l_1l_1}\hat{V}_0+\hat{V}_{11}^{\mathrm{T}}D_1,$$

$$C_2=\hat{V}_0^{\mathrm{T}}D_{l_1l_2}\hat{V}_0+1/2(V_{11}^{\mathrm{T}}D_2+D_1^{\mathrm{T}}V_{12}),$$

$$C_3=\hat{V}_0^{\mathrm{T}}D_{l_2l_2}\hat{V}_0+V_{12}^{\mathrm{T}}D_2. \tag{42}$$

F、F_T、F_ε 分别为由载荷、温度和电场产生的合力

$$F=1/2(D_\alpha^{\mathrm{T}}V_{1L;\alpha}+V_{1\alpha}^{\mathrm{T}}L_{;\alpha})-\hat{V}_0^{\mathrm{T}}L,$$

$$F_T=N_{TR}+\hat{V}_0^{\mathrm{T}}D_{l_\alpha l_\beta}V_{T;\alpha\beta}+1/2(V_{1\alpha}^{\mathrm{T}}L_{T;\alpha}+D_\alpha^{\mathrm{T}}V_{1T;\alpha}),$$

$$F_\varepsilon=N_{\varepsilon R}-\hat{V}_0^{\mathrm{T}}D_{hl_\alpha}V_{\varepsilon;\alpha}-D_{l_\alpha\varepsilon}^{\mathrm{T}}V_{\varepsilon;\alpha}+\hat{V}_0^{\mathrm{T}}D_{l_\alpha l_\beta}V_{\varepsilon;\alpha\beta}$$
$$+1/2(V_{1\alpha}^{\mathrm{T}}L_{\varepsilon;\alpha}+D_\alpha^{\mathrm{T}}V_{1\varepsilon;\alpha}). \tag{43}$$

1.3　将近似能量转换为 Reissner 模型形式

尽管式(35)渐近修正到 $O(h^2/l^2)$、$O(h/R)$，但因其含广义应变的导数，涉及复杂、超过必要的边界条件。为得到实用的能量范函，可将这种近似能量转换为实践中经常使用的 Reissner - Mindlin 模型形式。

在 Reissner - Mindlin 模型中，有 2 个增加的横向剪切自由度 $\gamma=[2\gamma_{13}\quad 2\gamma_{23}]^{\mathrm{T}}$，将其纳入到横向法线方向的旋转变量中。古典应变量的 Reissner 形式可表示为

$$\varepsilon=R-D_\alpha\gamma_{,\alpha} \tag{44}$$

式中

$$D_1=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$D_2=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$R=[\varepsilon_{11}^*\quad 2\varepsilon_{12}^*\quad \varepsilon_{22}^*\quad K_{11}^*\quad K_{12}^*+K_{21}^*\quad K_{22}^*]^{\mathrm{T}}. \tag{45}$$

将式(44)代入式(41)，可得到 Reissner 应变表示的修正到二阶的总能量泛函为

$$2\Pi_R=R^{\mathrm{T}}AR-2R^{\mathrm{T}}AD_\alpha\gamma_{;\alpha}+R_{;1}^{\mathrm{T}}C_1R_{;1}$$
$$+2R_{;1}^{\mathrm{T}}C_2R_{;2}+R_{;2}^{\mathrm{T}}C_3R_{;2}-2R^{\mathrm{T}}(F_T+F_\varepsilon$$
$$+F)+2\gamma_{;\alpha}^{\mathrm{T}}D_\alpha^{\mathrm{T}}(N_T+N_\varepsilon) \tag{46}$$

1.4　三维场重构关系推导

经渐近修正的 Reissner - Mindlin 压电壳体模型尽可能与总电热函一致，但简化模型的可靠性取决于其对原三维结构的三维场预测的精确性，因此需提供重构关系以完善简化模型。本文中通过二维变量和 x_3 来重构三维位移、应变和应力场。

对二阶渐近修正到 $O(h/R)$、$O(h^2/l^2)$ 的热函，可重构包含所有 h/l 项和部分对热函有贡献的 h/R 项构成的三维场，由式(1)、式(3)、式(4)可得重构的三维变形

$$U_{3\mathrm{D}}=u_{2\mathrm{D}}+x_3[C_{31}\quad C_{32}\quad C_{33}-1]^{\mathrm{T}}+SV_0+SV_1 \tag{47}$$

式中：$U_{3\mathrm{D}}$ 是三维壳体变形列阵；$u_{2\mathrm{D}}$ 为二维壳体变形；C_{ij} 是由式(3)得到的全局旋转张量。

由式(9)可得到重构的三维应变场

$$\Gamma=\Gamma_hS(V_0+V_1)+\Gamma_\varepsilon\varepsilon+\Gamma_{l_\alpha}SV_{0\alpha}+\Gamma_{Rh}V_0+\Gamma_{R\varepsilon}\varepsilon \tag{48}$$

最后可由材料本构定律得到三维应力 σ_{ij}。

2　算　例

基于前述理论和重构关系开发变分渐近法板/壳计算机分析程序(VAPAS)对由 4 层压电复合材料构成的壳体柱形弯曲问题进行分析。重构的三维应力分布与一阶剪切变形理论(FOSDT)、古典分层理论(CLT)和精确解[14]进行比较以验证该理论和程序的有效性、准确性。

2.1　模型参数

计算模型为 4 层压电复合材料壳体结构，如图 2 所示，上下 2 层采用压电材料，各厚 0.1 mm；内部 2 层为石墨/环氧复合材料，各厚 0.4 mm。各层的倾角由底至顶分别是[0°/−45°/45°/0°]。壳体高度 $h=1$ mm，半径 $R=10$ mm，夹角 $\varphi=\pi/3$。采用的坐标系为 $x_1\in[0,\varphi]$，$x_2\in[0,\infty)$，$x_3\in[-h/2,h/2]$。载荷大小为 $\tau_3=\beta_3=0.5\sin(3x_1)$，N/mm²；压电层下表面接地，上表面作用电势 $V_{\mathrm{p}}=100\sin(3x_1)$。压电复合材料工程弹性常数列于表 1。

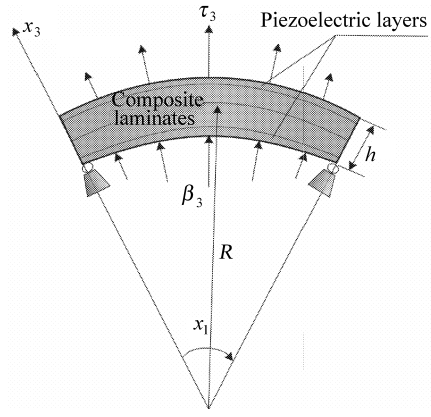

图 2　4 层压电复合壳体结构示意图：简支无限长圆柱壳

Fig. 2　Sketch of a four-layer smart shell: Simple-supported infinitely long cylindrical shell

2.2　三维应力数值分析

沿厚度方向分布的三维应力场所有 6 个分量数值计算结果绘于图 3，应变的精确性与应力结果相

表 1　压电复合材料工程弹性常数

Table 1　Piezoelectric composite material engineering properties

	Stiffness /GPa				ν_{12}	ν_{22}	$d_{113}=d_{223}/(\mathrm{m\cdot V^{-1}})$
	E_1	E_2	G_{12}	G_{22}			
Composite fiber	172.4	6.9	3.45	1.38	0.25	0.25	—
Piezoelectric fiber	63	63	24.6	24.6	0.28	0.28	150×10^{-12}

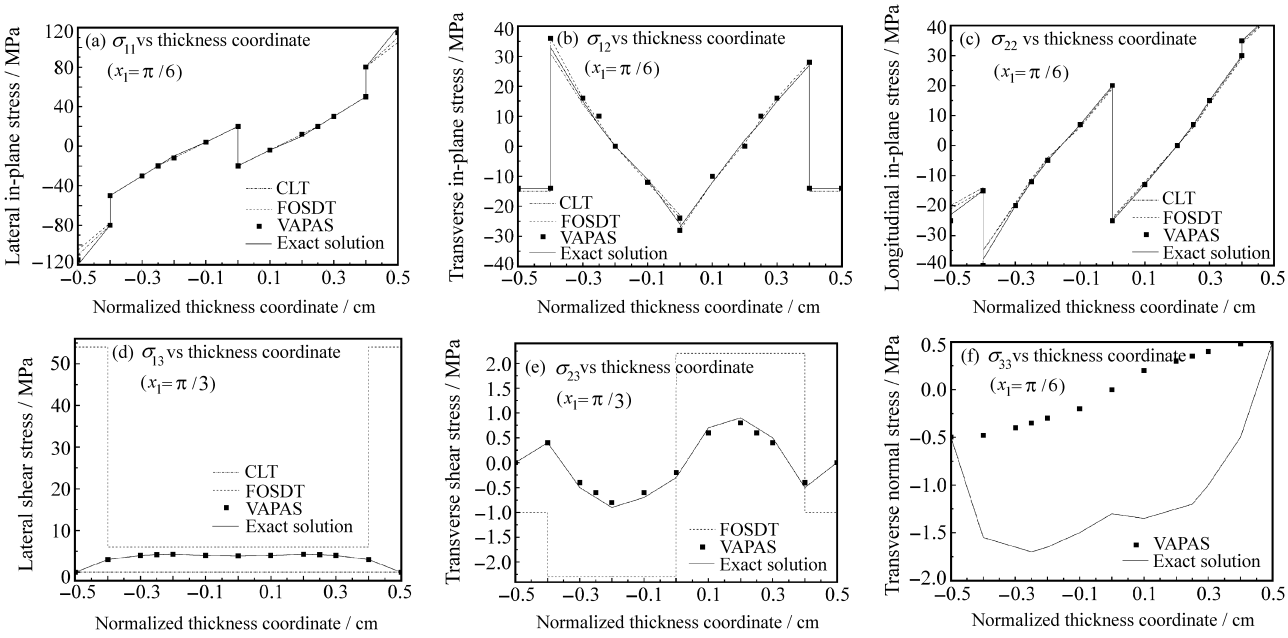

图 3　荷载和电场下压电复合材料壳体沿厚度方向分布的 6 个三维应力分量数值分析结果

Fig. 3　Numerical results of six components of 3D stress filed along the thickness direction due to prescribed electric potential and mechanical load

一致，未在此列出。值得注意的是，因 $\sigma_{\alpha\beta}$ 和 σ_{33} 是 x_1 的正弦函数，应力分布绘于 $x_1=\pi/6$ 处；而 $\sigma_{\alpha3}$ 是 x_1 的余弦函数，其应力分布绘于 $x_1=0$ 或 $x_1=\pi/3$ 处。

由图 3 可看出：(1) 所有模型沿厚度方向的平面应力分量 σ_{11}、σ_{12}、σ_{22} 均与精确解吻合较好。(2) 对于横向应力分量 σ_{13}、σ_{23}，CLT 不能提供横向剪应力；因 FOSDT 无法通过内在手段得到压电复合壳体的剪切刚度系数 G，其结果并不可靠；而 VAPAS 可通过优化剪切刚度系数，获得比 CLT 和 FOSDT 解更精确的结果，且因将三维壳体重构关系中的初始曲率效应限制在平面分量中，可满足各层分界面的边界和连续性条件。(3) 因横向法向应力 σ_{33} 为二阶量，其对热函的贡献并未包括在 Reissner-Mindlin 模型中，由 VAPAS 重构的横向法向应力与精确解吻合性较差。理想的解决方法是依据 h/R 和 h/l 建立一个完整的二阶理论，可准确重构实际的横向法线方向应力，这将在下一步工作中加以解决。(4) 由于 VAPAS 将三维壳体等效为单层壳结构，不需在三维平衡方程内沿厚度方向积分以得到横向法线方向应力和应变，与三维有限元相比可节省 2～3 阶计算量，在一般台式机上 1 s 内即可完成所有计算。

2.3　极化刚度分析

考虑平面极化(极化方向为 x_2 方向)和沿厚度极化 2 种极化情况，由 VAPAS 计算的非零刚度与文献[15]和 CLT 比较列于表 2、表 3。对于平面极化，由 VAPAS 计算得到的 A_{11}、A_{13}、A_{22}、A_{33}、A_{44}、A_{46}、A_{55}、A_{66} 刚度与 CLT 相一致，且能准确计算出与电场相关的刚度 A_{18}、A_{27}、A_{38}、A_{77}、A_{88}(CLT 无法准确计算)；对于厚度极化，由 VAPAS 计算出的 A_{11}、A_{13}、A_{22}、A_{33}、A_{44}、A_{46}、A_{66} 刚度较 CLT 大，其偏差大小取决于材料的压电和介电性能；A_{f7}、A_{f8}($f=4$，5，6)刚度为零，表明电场与壳体曲率间无耦合。

3　结　论

(1)基于变分渐近法和旋转张量分解理论，建

表 2　压电复合材料壳体平面极化刚度比较

Table 2　Comparison of stiffness for in-plane polarization of piezoelectric composite shell

Stiffness	Le[15]	Present	CLT[a]
$A_{11}/(\times10^{9}\mathrm{N\cdot m^{-1}})$	9.54292	9.54292	9.54292
$A_{13}/(\times10^{8}\mathrm{N\cdot m^{-1}})$	3.27065	3.27065	3.27065
$A_{22}/(\times10^{8}\mathrm{N\cdot m^{-1}})$	2.56000	2.56000	2.56000
$A_{33}/(\times10^{9}\mathrm{N\cdot m^{-1}})$	7.57095	7.57095	7.57095
$A_{44}/(\times10^{3}\mathrm{N\cdot m^{-1}})$	7.95243	7.95243	7.95243
$A_{46}/(\times10^{3}\mathrm{N\cdot m^{-1}})$	2.72554	2.72554	2.72554
$A_{55}/(\times10^{3}\mathrm{N\cdot m^{-1}})$	2.13333	2.13333	2.13333
$A_{66}/(\times10^{3}\mathrm{N\cdot m^{-1}})$	6.30913	6.30913	6.30913
$A_{18}/(\times10^{-2}\mathrm{C\cdot m^{-1}})$	2.05278	2.05278	—
$A_{27}/(\mathrm{C\cdot m^{-1}})$	−0.12720	−0.12720	—
$A_{38}/(\mathrm{C\cdot m^{-1}})$	−0.18405	−0.18405	—
$A_{77}(\times10^{-10}\mathrm{C\cdot V^{-1}})$	−1.30538	−1.30538	—
$A_{88}/(\times10^{-10}\mathrm{C\cdot V^{-1}})$	−1.16556	−1.16556	—
$G_{11}/(\times10^{8}\mathrm{N\cdot m^{-1}})$	—	2.76730	—
$G_{22}/(\times10^{8}\mathrm{N\cdot m^{-1}})$	—	2.31848	—

a："CLT" denotes results obtained by classic laminated theory.

表 3　压电复合材料壳体厚度极化刚度比较

Table 3　Comparison of stiffness for thickness polarization of piezoelectric composite shell

Stiffness	Le[15]	Present	CLT[a]
$A_{11}/(\times10^{9}\mathrm{N\cdot m^{-1}})$	1.07663	1.07663	0.911681
$A_{13}/(\times10^{8}\mathrm{N\cdot m^{-1}})$	4.64896	4.64896	2.99943
$A_{22}/(\times10^{8}\mathrm{N\cdot m^{-1}})$	3.06000	3.06000	3.06000
$A_{33}/(\times10^{9}\mathrm{N\cdot m^{-1}})$	1.07663	1.07663	0.911681
$A_{44}/(\times10^{3}\mathrm{N\cdot m^{-1}})$	8.97195	8.97195	7.359734
$A_{46}/(\times10^{3}\mathrm{N\cdot m^{-1}})$	3.87414	3.87414	2.49953
$A_{55}/(\times10^{3}\mathrm{N\cdot m^{-1}})$	2.55000	2.55000	2.55000
$A_{66}/(\times10^{3}\mathrm{N\cdot m^{-1}})$	8.97195	8.97195	7.59734
$A_{77}/(\times10^{-10}\mathrm{C\cdot V^{-1}})$	−1.93740	−1.93740	—
$A_{88}/(\times10^{-10}\mathrm{C\cdot V^{-1}})$	−1.93740	−1.93740	—

a："CLT" denotes results obtained by classic laminated theory.

立压电复合材料壳体结构修正后的 Reissner - Mindlin 模型。具体给出了原三维壳体模型降维和三维场重构推导的详细步骤。该方法将壳体建模过程完全从三维壳体分析中解耦出来，得到的二维本构模型可作为求解器输入二维壳体分析中，不需任何动力学假设，使计算过程大为简化。

(2)在实例分析中，将基于该模型和重构关系开发的变分渐近法板/壳分析程序(VAPAS)解与 CLT、FOSDT 和精确解的结果进行了比较，算例表明重构的三维应力结果与原三维模型相吻合，且完全满足各层分界面的边界和连续性条件，证明了本文中提出的简化模型的可靠性。

参考文献：

[1] Saravanos D A. Heyliger P R. Mechanics and computational models for laminated piezoelectric beams, plates, and shells [J]. Applied Mechanics Review, 1999, 52(11): 305-319.

[2] Giurgiutiu V. Review of smart materials actuation solutions for aeroelastic and vibration control [J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2000, 40(11): 525-544.

[3] Chopra I. Review of state of art of smart structures and integrated systems [J]. AIAA Journal, 2002, 40(11): 2145-2187.

[4] Tauchert T R. Piezothermoelastic behavior of a laminated Plate [J]. Journal of Thermal Stresses, 1992, 15(1): 25-37.

[5] Lee H J, Saravanos D A. Generalized finite element formulation for smart multilayered thermal piezoelectric composite plates [J]. International Journal of Solids and Structures, 1997, 34(5): 3355-3371.

[6] Chattopadhyay A, Li J, Gu H. Coupled thermo-piezoelectric-mechanical model for smart composite laminates [J]. AIAA Journal, 1999, 37(12): 1633-1638.

[7] Lee C K. Theory of laminated piezoelectric plates for the design of distributed sensors/actuators [J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1990, 87(3): 1144-1158.

[8] Tzou H S, Zhong J P. Electromechanics and vibrations of piezoelectric shell distributed systems [J]. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 1993, 115(4): 506-517.

[9] 尹维龙，向锦武，冷劲松. 压电纤维复合材料桨叶的动力学建模 [J]. 复合材料学报，2009，26(6)：173-179.
Yin Weilong, Xiang Jinwu, Leng Jinsong. Dynamic modeling of composite rotor blade with piezoelectric fibe [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2009, 26(6): 173-179.

[10] Bar-Yosephl Pinhas. New variational-asymptotic formulations for interlaminar stress analysis in laminated plates [J]. Journal of Applied Mathematics and Physics, 1986, 37(3): 305-321.

[11] Lee Chang-Yong, Hodges D H. Dynamic variational asymptotic procedure for laminated composite shells Ⅰ: Low-frequency vibration analysis [J/OL]. Journal of Applied Mechanics, 2009, 76(1): 011002. http://dx.doi.org/10.1115/1.3002761.

[12] Danielson D A. Finite rotation with small strain in beams and plates [C]// Proceedings of the 2nd pan american congress of applied mechanics. Valparaiso, Chile: The American Academy Mechanics(AMM), 1991: 156-164.

[13] Danielson D A, Hodges D H. Nonlinear beam kinematics by decomposition of the rotation tensor [J]. Journal of Applied Mechanics, 1987, 54(2): 258-262.

[14] Dube G P, Kapuria S, Dumir P C. Exact piezothermoelastic solution of simply-supported orthotropic cylindrical panel in cylindrical bending [J]. Archive of Applied Mechanics, 1996, 66(8): 537-554.

[15] Le K C. Vibrations of shells and rods [M]. Germany: Springer, 1999.