复合材料学报 第23卷 第2期 4月 2006年
Acta Materiae Compositae Sinica Vol. 23 No. 2 April 2006

文章编号: 1000-3851(2006)02-0158-05

厚度不连续悬臂梁板的自由振动分析

卿光辉*1, 王 喆2, 刘艳红1
(1. 中国民用航空学院 机电分院, 天津 300300; 2. 天津大学 机械工程学院机械设计系, 天津 300072)

摘 要: 将厚度不连续梁板视为层合板, 分别应用 Hamilton 正则方程半解析法建立每一层的线性方程。考虑到每两层连接界面上应力和位移的连续性, 联立各层的方程得到整个结构的特征方程, 其主要的优越性表现为: 控制方程不限制不连续梁板的厚度, 并能适合处理厚度不对称且不连续的层合板。本文中的方法可修改或扩展用来分析加筋压电材料层合板或带有压电材料传感器和驱动器块的板壳等问题。

关键词: 不连续悬臂梁板; 振动特性; 层合板; Hamilton 正则方程; 半解析法
中图分类号: TB330.1 **文献标识码**: A

Vibration characteristic analysis of cantilever beam-plates with discontinuity in thickness

QING Guanghui*1, WANG Zhe2, LIU Yanhong1
(1. Aeronautical Mechanics and Avionics Engineering College, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China;
2. Department of Mechanical Design, School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: The cantilever beam-plate with discontinuity in thickness is considered as a laminated plate. Based on the semi-analytical solution for Hamilton canonical equation, the linear equation of each layer is established separately. The compatibility of displacements and stresses on the interface between layers is employed to derive the integral equation and the characteristic equation. The main advantages are there is no restriction on the thickness of the cantilever beam-plate and the present method can deal with the cantilever laminated plate with discontinuity and dissymmetry in thickness. The method can also be modified to analyze the corresponding problems of stiffened shells, stiffened piezolaminated plates, and plates or shells with piezoelectric sensor and actuator patches.

Keywords: cantilever beam-plates with discontinuity in thickness; vibration characteristics; laminated plates; Hamilton canonical equation; semi-analytical solution

弹性力学的 Hamilton 正则方程[1,2]有明显的特点, 方程中包含了二类变量, 即自成对偶的位移变量和应力变量。在弹性力学中, 把偏微分方程转化为一阶的微分方程——Hamilton 正则方程, 虽然未知量增多, 但这样处理有利于向量矩阵的代数运算, 在理论与计算机处理上有很大优点。它在厚板、厚壳和复合材料层合(厚)板壳静力学和动力学问题上的应用非常成功[1~5], 其优越性在于: 沿板或壳的厚度方向不需引入任何有关位移和应力的假设, 并能考虑到材料剪切效应的影响, 同时还保证了层间位移和应力的连续性。从理论上讲, 传递矩阵方法的引入使得正则方程对板壳的厚度没有限定。由于文献[5]在平面(曲面)内引进了有限元方法, 使 Hamilton 正则方程适用板壳结构复杂的几何边界条件问题, 在工程上有了较为广泛的应用领域。

悬臂梁板结构静力学或动力学问题的理论和试验分析有着非常丰富的历史, 研究成果很多。文献[6]以提高悬臂梁板结构(图 1(a))的固有频率为目的, 提出了减少结构自由端质量的悬臂梁板模型, 即厚度不连续的悬臂梁板(图 1(b))。文献[6]采用传统的有限元法和试验方法对不同尺寸的模型进行了分析和讨论。

本文中以文献[5,7,8]中的半解析法为基础,

收稿日期: 2005-04-30; **收修改稿日期**: 2005-08-18
基金项目: CAUC 科研启动基金(No. 05QD01S)
通讯作者: 卿光辉, 博士, 副教授, 主要从事发电机的非线性振动、磁固耦合振动、智能材料及有限元法研究 E-mail: Qingluke@126.com

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

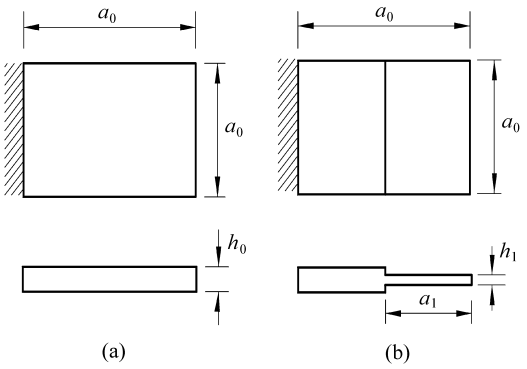

图 1　悬臂梁板和不连续悬臂梁板

Fig. 1　Cantilever beam-plate and cantilever beam-plate with discontinuity in thickness

并在文献[9]加筋板的“分离合并”模型的启发下，将不连续的悬臂梁板视为层合板(图 1、图 2(b))，根据不连续的几何特性，将每一层分离出来，分别应用 Hamilton 正则方程的半解析法构建其有关物理量的线性方程，然后考虑到各层板在连接界面上的应力和位移的连续性，联立各层的方程，最后导出系统的特征方程。所以，本文中的思想方法与文献[9]相同，边界条件的处理方法与文献[11]完全相同，数学模型是文献[9]的“分离合并”模型的拓宽应用。

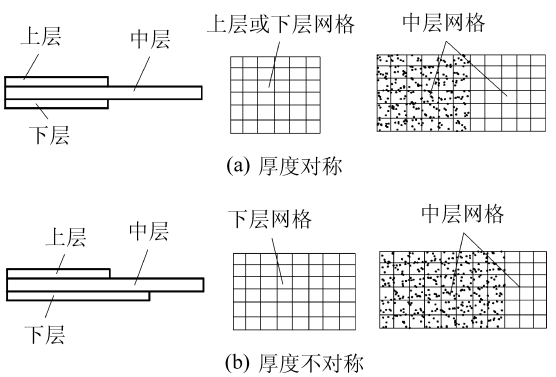

图 2　悬臂梁板的分层和网格划分

Fig. 2　Laminates and meshes of cantilever beam-plates

图 2 中层板网格的阴影部分是上层板与中层板或下层板与中层板的连接界面。

1　理论模型

不失一般性，将结构的中层看作厚板(图 2(a))，从精度要求出发，将厚板划分为 n 个子层，并对任意子层用 Hamiltonian 等参元[5,8]离散 x-y 平面(图 2)，场函数和形函数分别为

$$u = [\mathrm{N}(x,y)]\{\mathrm{u}^e(z)\},\quad v = [\mathrm{N}(x,y)]\{\mathrm{v}^e(z)\}$$
$$w = [\mathrm{N}(x,y)]\{\mathrm{w}^e(z)\},\quad \sigma_{xz} = [\mathrm{N}(x,y)]\{\sigma^e_{xz}(z)\}$$
$$\sigma_{yz} = [\mathrm{N}(x,y)]\{\sigma^e_{yz}(z)\},\ \sigma_{zz} = [\mathrm{N}(x,y)]\{\sigma^e_{zz}(z)\} \tag{1}$$

$$\mathrm{N}_i(\xi,\eta) = (1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)/4 \quad (i = 1,2,3,4) \tag{2}$$

式中的 z 坐标代表板的厚度方向。

根据文献[5,8,9](这里只讨论结构的固有频率问题)有单元的控制微分方程

$$\frac{\partial \mathrm{H}^e(z)}{\partial z} = \mathrm{K}^e\mathrm{H}^e(z) \tag{3}$$

式中：

$$\mathrm{H}^e(z) = [\mathrm{P}^e(z)\quad \mathrm{Q}^e(z)]^{\mathrm{T}}$$
$$\mathrm{p}^e(z) = [\sigma^e_{xz}(z)\quad \sigma^e_{yz}(z)\quad \sigma^e_{zz}(z)]^{\mathrm{T}}$$
$$\mathrm{Q}^e(z) = [\mathrm{u}^e(z)\quad \mathrm{v}^e(z)\quad \mathrm{w}^e(z)]^{\mathrm{T}}$$

符号 z 是一子层的厚度；K^e 是等较刚度矩阵[7,9]。

把一子层的全部单元按一般有限元方法组装，可得到子层总的控制微分方程

$$\frac{\partial \mathrm{H}_m(z)}{\partial z} = \mathrm{K}_m\mathrm{H}_m(0) \tag{4}$$

式中的下标 m 表示第 m 层。

式(4)的精确解为

$$\mathrm{H}_m(z) = \mathrm{T}_m(z)\,\mathrm{H}_m(0) \tag{5}$$

在式(5)中 $\mathrm{T}_m(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{K}_m\cdot z}$，计算 $\mathrm{e}^{\mathrm{K}_m\cdot z}$ 的方法很多[10]。实际上，文献[10]中所提到的多种方法都有其适用范围。为确保计算过程的稳定性和结果的精确度，本文中采用文献[2]附录 A 中提出的精细积分方法。

根据每两层间的连续性，有下列关系：

$$\mathrm{H}_m(z_m) = \mathrm{H}_{m+1}(z_m) \quad (m = 1,2,\cdots,n-1) \tag{6}$$

所以厚板的方程可表达成

$$\mathrm{H}_n(z_n) = \left(\prod_{m=1}^{n}\mathrm{T}_m\right)\mathrm{H}_1(0) \tag{7}$$

式(7)将中层板上下表面的有关物理量联系起来，是有关节点物理量的线性方程组，矩阵形式如下：

$$\begin{Bmatrix}\mathrm{P}_n(z_n^m)\\ \mathrm{Q}_n(z_n^m)\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathrm{T}_{11}^m & \mathrm{T}_{12}^m\\ \mathrm{T}_{21}^m & \mathrm{T}_{22}^m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathrm{P}_1(0^m)\\ \mathrm{Q}_1(0^m)\end{Bmatrix} \tag{8a}$$

式中的上标 m 表示式(8a)为中层板的方程。

将上层板和下层板划分为 l 个子层，单元划分与图 2 中层板阴影部分的网格完全一致，并保持节点的编号也一致，对其实施与中层板相似的操作过程，则有

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\begin{Bmatrix} P_l(z_l^t) \\ Q_l(z_l^t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}^t & T_{12}^t \\ T_{21}^t & T_{22}^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1(0^t) \\ Q_1(0^t) \end{Bmatrix} \tag{8b}$$

$$\begin{Bmatrix} P_l(z_l^b) \\ Q_l(z_l^b) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}^b & T_{12}^b \\ T_{21}^b & T_{22}^b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1(0^b) \\ Q_1(0^b) \end{Bmatrix} \tag{8c}$$

t 表示式(8b)是上层板的方程; b 表示式(8c)是下层板的方程。

上层板下表面节点 $i(i \in k,\ k$ 为节点总数)的应力和位移与中层板上表面对应节点的应力和位移的关系为

$$\hat{P}(z^t) = \hat{P}(0^m),\ \hat{Q}(z^t) = \hat{Q}(0^m) \tag{9a}$$

下层板上表面节点 i 的应力和位移与中层板下表面对应节点的应力和位移的关系为

$$\hat{P}(0^b) = \hat{P}(z^m),\ \hat{Q}(0^b) = \hat{Q}(z^m) \tag{9b}$$

考虑到上层、中层和下层间连接界面上应力和位移的连续,联立各层板的线性方程(8a)、(8b)和(8c),消去连接界面上所有节点共有的应力和位移变量,得到整个结构的控制方程

$$\begin{Bmatrix} P(z) \\ Q(z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P(0) \\ Q(0) \end{Bmatrix} \tag{10}$$

值得说明的是:中层控制方程(8a)联立了上层和下层的控制方程(8b)和(8c)后,并没有增加中层方程(8a)的未知量,也就是说整个结构的方程(10)的未知量由中层板的网格节点数决定。

因为这里只研究结构的固有频率,所以有整个结构上下表面的应力列向量 $P(z) = P(0) = 0$。

从方程(10)可导出

$$T_{12}Q(0) = 0 \tag{11}$$

要得到方程(11)的非零解,只有令

$$|T_{12}| = 0 \tag{12}$$

通过二分法可求取结构的低阶固有频率。

2　实例分析和讨论

2.1　实例 1

该例取自文献[6](如图 1,一端固支)。各层的材料参数相同: $E = 7.3 \times 10^{10}$ N/m^2, $\mu = 0.33$, $\rho = 2770$ kg/m^3。几何参数: $a_0 = 0.21$ m, $h_0 = 0.003$ m。考虑一种情况: $h_1/h_0 = 0.7$, a_1/a_0 是变化的。首先用原形板即 $h_0/h_1 = 1$; $a_1/a_0 = 0$ 的情况进行了试算,比较网格密度 50 ×50 与 60 ×60 前三阶固有频率的结果,最大误差不到 1.06 %,所以单元密度 60 ×60 是可接受的。下面各种情况都以中层板的网格为 60 ×60 进行计算,由于每一层较薄,每一层可视为一个子层。从表 1 中的数值结果可以看出,目前的解与文献的解吻合得很好。

表 1　结果比较($h_1/h_0 = 0.7$)

Table 1　Comparison of results ($h_1/h_0 = 0.7$)

a_1/a_0	Mesh $k \times m$ Top or bottom layer	$\Omega_i = \omega_i a_0^2 \sqrt{\rho h_0/D_0}$ $(i = 1,2,3,4)$		
		1	2	3
0	50 ×50	3.433 (3.48)	8.650 (8.93)	21.49 (21.4)
0	60 ×60	3.426 (3.48)	8.632 (8.93)	21.35 (21.4)
1/12	55 ×55	3.624 (3.64)	9.085 (9.12)	21.87 (22.0)
1/6	50 ×50	3.788 (3.79)	9.250 (9.25)	22.09 (22.1)
1/4	45 ×45	3.825 (3.90)	9.206 (9.27)	21.44 (21.5)
1/3	40 ×40	3.925 (3.97)	9.097 (9.16)	20.25 (20.3)
5/12	35 ×35	3.973 (3.98)	8.902 (8.91)	18.90 (18.9)
1/2	30 ×30	3.965 (3.98)	8.523 (8.56)	17.88 (17.9)
7/12	25 ×25	3.742 (3.78)	8.074 (8.16)	17.48 (17.6)
2/3	20 ×20	3.501 (3.56)	7.708 (7.75)	17.41 (17.6)
3/4	15 ×15	3.287 (3.29)	7.324 (7.36)	17.54 (17.7)
5/6	10 ×10	2.992 (3.00)	6.924 (7.00)	17.21 (17.3)

注:括号中的数据取自文献[6]。

文献[6]中的有限元法以薄板理论为基础,结构的厚度受到限制。另外,就图 2(b)所示的厚度不对称的结构而言,文献[6]的有限元方法难以适应。事实上,本文中的方法的确可分析厚度不连续且不对称的层合厚板问题(图 3),处理方法与上例相同。

2.2　实例 2

一边固支的不连续层合矩形板(图 3)。几何参数: $a_0 = 0.60$ m, $a_1 = 0.30$ m, $a_2 = 0.20$ m,两个外层的 $t_1 = 0.0025$ m,两个中层的 $t_2 = 0.005$ m, $h_1 = 0.02$ m, $h_0 = 0.025$ m。材料参数说明:每层均是正交异性的,坐标轴沿主方向,刚度系数比如

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

下[4]：

$C_{22}/C_{11}=0.543103$，$C_{12}/C_{11}=0.23319$，

$C_{23}/C_{11}=0.098276$，$C_{13}/C_{11}=0.010776$，

$C_{33}/C_{11}=0.530172$，$C_{44}/C_{11}=0.26681$，

$C_{55}/C_{11}=0.159914$，$C_{66}/C_{11}=0.262931$。

假设结构上下层和中层的 $C_{11}^1=150$ GPa，$\rho^1=1600$ kg/m^3；C_{11}^2 和 ρ^2 为中心层的参数；$C_{11}^1/C_{11}^2=2$，$\rho^1/\rho^2=2$。

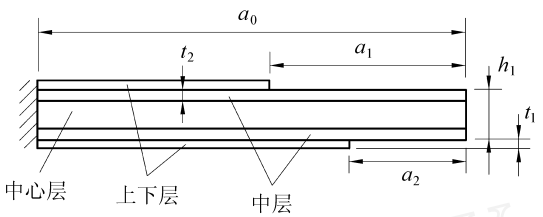

图 3　厚度不连续悬臂层合板

Fig. 3　Cantilever laminated plate with discontinuity in thickness

因为中心层较厚，将其视为 4 个子层；两个中层各被看作两个子层；上层和下层各被看作一个子层。以中心层的网格 60 ×60 计算结构前三阶固有频率，分析结果列于表 2。

表 2　前三阶固有频率(Hz)

Table 2　First three natural frequencies (Hz)

a_2/a_0	Element $k\times m$		Mode numbers		
a_1/a_0	Top layer	Bottom layer	1	2	3
0 0	50 ×50	50 ×50	118.5	257.5	662.9
0 0	60 ×60	60 ×60	117.7	254.3	656.2
1/3 1/2	30 ×30	40 ×40	127.6	251.8	607.4

从表 2 中可以看出，$a_2/a_0=1/3$，$a_1/a_0=1/2$ 不连续层合板的基频相对于源板 $a_2/a_0=0$，$a_1/a_0=0$ 的基频有所提高，但第二阶频率和第三阶频率有所降低。这一现象说明：在某一程度下减少悬臂梁板自由端的质量可提高结构低阶的固有频率，但是高阶的固有频率可能降低。这是因为在减少了悬臂梁板自由端的质量的同时，结构整体刚度也有所下降。整体刚度的下降影响了阶数较高的固有频率。

分析总结：文献[6]采用了基于薄板假设理论的有限元法，局限于不连续悬臂薄梁板结构，并要求结构厚度方向上的不连续特性是对称的，目前的方法没有这些限制，所以，本文中的方法具有更广泛的应用领域。

3　结　论

本文中以弹性力学的 Hamilton 正则方程的半解析法理论为基础，给不连续层合厚板的固有频率分析提出了一种新的数学模型，并拓展了弹性力学正则方程的应用领域。具体的优越性是：(1) 本文中所提出的模型借助了“分离合并”的方法，能处理厚度方向不对称的不连续层合板；(2) 在分析不连续层合厚板时，层数的增加不会使方程未知量增加；(3) 从理论上分析可知，模型对不连续层合板的厚度没有限制。

其实，对复杂结构进行分离简化处理的思想是人们常用的方法。本文中简单的思想方法还有更多应用领域，例如，图 4 中所示的智能结构与厚度不连续或加筋板等结构有相似之处，当然其本身又有许多挑战性的问题：(1) 结构由两种以上的材料组成，不同材料的本构方程差别大；(2) 以压电材料为例，其机电耦合效应是必然要考虑的主要问题；(3) 结构涉及到了两种边界条件，即所建立的数学模型既要满足有关力学物理量的边界条件，同时又要满足电学物理量的边界条件。总之，在智能结构中，由于智能材料的存在，有关整体结构力学特性的数学模型或控制方程变得复杂，数值模拟也变得困难。文献[12]成功地建立了压电材料修正后的 H-R 变分原理，并证明了相应的广义 Hamilton 正则方程的精确法是可行的。文献[13]在理论上推导了磁电弹性材料(包括压电材料)修正后的 H-R 变分原理和相应的广义 Hamilton 正则方程(状态方程)的半解析法。本文作者在文献[14]中成功地应用本文中的思想方法分析了图 4 所示的智能结构的相关问题，获得了令人满意的结果。

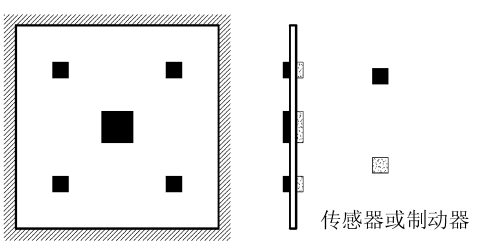

图 4　智能板结构

Fig. 4　Smart structure

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

参考文献:

[1] 唐立民. 弹性力学的混合方程和 Hamilton 正则方程 [J]. 计算结构力学及其应用, 1991, 8(4): 343 - 349.
Tang Limin. Mixed formulation and Hamilton canonical equations of theory of elasticity [J]. *Computational Structural Mechanics and Applications*, 1991, 8(4): 343 - 349.

[2] 钟万勰. 弹性力学求解新体系 [M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1995. 1 - 252.
Zhong Wanxie. A new systematic methodology for theory of elasticity [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1995. 1 - 252.

[3] Fan J R, Ye J Q. A series solution of the exact equation for thick orthotropic plates [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1990, 26(7): 773 - 778.

[4] 范家让. 强厚叠层板壳的精确理论 [M]. 北京: 科学出版社, 1996. 1 - 450.
Fan J R. Exact Theory of Laminated Thick Plates and Shells [M]. Beijing: Science Press, 1996. 1 - 450.

[5] 唐立民, 褚致中, 邹贵平, 等. 混合状态 Hamiltonian 元的半解析解和叠层板的计算 [J]. 计算结构力学及其应用, 1992, 9(4): 347 - 360.
Tang Limin, Chu Zhizhong, Zou Guiping, *et al*. The semi-analytical solutions of mixed state Hamiltonian element and the computation laminated plates [J]. *Computational Structural Mechanics and Applications*, 1992, 9(4): 347 - 360.

[6] Rossi R E, Belles P M, Laura P A A, *et al*. Transverse vibrations of a rectangular cantilever plate with thickness varying in a discontinuous fashion [J]. *Ocean Engineering*, 1996, 23(3): 271 - 276.

[7] 王治国, 朱德懋, 唐立民. 复合材料叠层板圆柱壳曲板振动分析的半解析法 [J]. 振动工程学报, 1995, 8(2): 91 - 98.
Wang Zhiguo, Zhu Demao, Tang Limin. A semi-analysis solution for free vibration of laminated composite cylindrical panels [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 1995, 8(2): 91 - 98.

[8] 邹贵平. 复合材料层合板壳的混合状态方程、Hamilton 正则方程及其半解析法 [D]. 大连: 大连理工大学, 1994. 9 - 126.
Zou G P. The mixed state equation, Hamilton canonical equation and a semi-analytical solution for the analysis of laminated composite plate and shells [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 1994. 9 - 126.

[9] 卿光辉, 邱家俊, 塔 娜. 弹性体的 Hamilton 正则方程和整体加筋板的固有频率分析 [J]. 力学学报, 2004, 36(6): 749 - 756.
Qing Guanghui, Qiu Jiajun, Ta Na. Hamilton canonical equation for elastic bodies and natural frequencies analysis of integral stiffened plates [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, 36(4): 749 - 756.

[10] Moler C, Van L C. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix [J]. *SIAM Review (Society for Industrial and Applied Mathematics)*, 1978, 20(4): 801 - 836.

[11] Sheng H Y, Ye J Q. A state space finite element for laminated composite plates [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2002, 191(37 - 38): 4259 - 4276.

[12] 卿光辉, 邱家俊, 塔 娜. 压电体的变分原理及叠层板的自由振动分析 [J]. 振动工程学报, 2004, 17(3): 285 - 290.
Qing Guanghui, Qiu Jiajun, Ta Na. Modified mixed variational principle for piezoelectric materials and free vibration analysis [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2004, 17(3): 285 - 290.

[13] Qing Guanghui, Qiu Jiajun, Liu Yanhong. Modified mixed variational principle for magnetoelectroelastic solids and state-vector equation [J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2005, 26(6): 722 - 728.

[14] Qing Guanghui, Qiu Jiajun, Liu Yanhong. A semi-analytical solution for static and dynamic analysis of plates with piezoelectric patches [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, 43(6): 1388 - 1403.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net