复合材料学报 第23卷 第4期 8月 2006年
Acta Materiae Compositae Sinica Vol. 23 No. 4 August 2006

文章编号: 1000-3851(2006)04-0164-05

复合材料非对称正交薄层板的固化变形

戴福洪*, 张博明, 杜善义
(哈尔滨工业大学 复合材料研究所, 哈尔滨 150001)

摘 要: 利用 Rayleigh-Ritz 法研究了复合材料非对称正交薄层板的固化变形。建立了考虑几何非线性的固化变形分析模型, 预报了其固化后的变形形状及变形量。利用热压釜工艺进行了实验研究。实验发现, 方板边缘发生了较大的向内卷曲变形, 板边缘附近理论预报值与实验结果差别较大, 在距板边缘一定距离内理论预报值和实验结果吻合较好, 矩形板实验结果与理论预报值吻合良好。

关键词: 复合材料; Rayleigh-Ritz; 固化; 层板
中图分类号: TB330.1; V214.8 **文献标识码**: A

Cured shape of cross-ply thin unsymmetric composite laminates

DAI Fuhong*, ZHANG Boming, DU Shanyi
(Center for Composite Materials, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: The cured shapes of cross-ply unsymmetric composite laminates were investigated using Ritz method. An analytical model to predict the cured shape of unsymmetric thin composite laminates was established based on the geometric nonlinearity. The shape and deformation of the unsymmetric composite laminates were obtained. It shows that the predicted deformations are well agreed with the experiments for the regions a little far away from the edges of the square plates and for the rectangular plates.

Keywords: composites; Ritz method; cure; laminates

目前, 纤维增强复合材料的应用大多限于对称铺层的层合板。非对称复合材料层板的拉弯、弯扭耦合效应显著, 复合材料的可设计性得到充分体现。但由于存在热固化变形等问题, 非对称复合材料层板的应用一直受到限制。尤其是非对称薄层板固化变形大, 同时其形状稳定性也与对称层板有显著不同。早在 20 世纪 80 年代初, Hyer 等人在实验中观察到[0/90]铺层的非对称复合材料层板固化后产生大变形, 而且固化后形状为圆筒形, 这与经典层合板理论预测的鞍形截然不同[1]。Hyer 认为板的固化变形研究中应考虑几何非线性的影响, 提出了一个数学模型,并做了进一步改进[2,3]。运用能量方法, Hyer 等人成功预报了正交非对称层板的变形, 并指出其变形行为与板的尺寸有密切关系。Rayleigh-Ritz 法实质上是拓展的经典层合板理论, 它将几何方程附加上高阶项, 然后利用最小势能原理导出代数方程组来求解。位移函数的选取从早期的二阶多项式发展到五阶多项式以及包含剪切效应和滑移效应等更复杂的形式[4-6]。该方法的优点是求解速度快, 便于进行参数敏感性分析。任立波等[7]对薄壳的固化变形进行了研究, 王平等[8]对含非对称分层层合板进行了解析研究。

Rayleigh-Ritz 法是预报非对称正交薄层板固化变形时最普遍采用的半解析法。实验研究中发现方板固化变形后边缘附近产生了较大的向内卷曲现象, 这一个现象在以往的文献中还没有引起注意, 而该现象引起的一个问题是, 利用 Rayleigh-Ritz 法还能否准确预报此处的固化变形。

本文中给出了包括方板和矩形板的几个实验结果, 同时用 Rayleigh-Ritz 法对其固化变形进行了理论预报, 并将二者结果进行了比较研究。

1 理论与方法

非对称层合板固化变形分析不仅涉及几何非线

收稿日期: 2005-09-29; 收修改稿日期: 2006-01-16
基金项目: 国家自然基金项目(10502016)
通讯作者: 戴福洪, 讲师, 研究方向树脂基复合材料工艺模拟与监测 E-mail: daifh@hit.edu.cn

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

性的问题，而且涉及形状稳定性等问题。本文作者将非线性影响引入经典层合板理论中[2]，并利用最小势能原理导出需要求解的代数方程组。这里假设层板固化后的变形仅由热应力引起，忽略树脂固化收缩等因素，则层板的总势能 Π 等于应变能密度的体积积分，即

$$\Pi = \int \omega \mathrm{d}V \tag{1}$$

$$\omega = \frac{1}{2} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl} - \beta_{ij} e_{ij} \Delta T \tag{2}$$

式中：ω 表示应变能密度；C_{ijkl} 表示材料的弹性常数；β_{ij} 是与弹性常数和热膨胀系数有关的系数；e_{ij} 是材料应变；ΔT 表示材料冷却时的温度变化。公式(2)中 i，j 分别取为 1，2，有

$$e_{11} = \varepsilon_x^0 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{3}$$

$$e_{22} = \varepsilon_y^0 - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{4}$$

$$e_{12} = \varepsilon_{xy}^0 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{5}$$

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \tag{6}$$

$$\varepsilon_y^0 = \frac{\partial v^0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \tag{7}$$

$$\varepsilon_{xy}^0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{8}$$

其中：$z = 0$ 的面为层板中面；u^0 是 x 向的中面位移；v^0 是 y 向的中面位移；w 是中面法线方向上的位移。

$w(x, y)$ 假设为

$$w(x, y) = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2) \tag{9}$$

式中，a 和 b 都是常数。u^0 和 v^0 取为[2]

$$u^0(x, y) = cx - \frac{a^2 x^3}{6} - \frac{abxy^2}{4} \tag{10}$$

$$v^0(x, y) = dy - \frac{b^2 y^3}{6} - \frac{abx^2 y}{4} \tag{11}$$

式中，c 和 d 是常数。将 a、b、c 和 d 作为广义坐标来考虑，使势能 Π 达到最小的问题变成寻找 a、b、c 和 d 的值，使 Π 的变分为 0，即

$$\delta\Pi = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial a}\right)\delta a + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial b}\right)\delta b + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial c}\right)\delta c + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial d}\right)\delta d \equiv 0 \tag{12}$$

$$\delta\Pi = f_1(a, b, c, d)\delta a + f_2(a, b, c, d)\delta b + f_3(a, b, c, d)\delta c + f_4(a, b, c, d)\delta d = 0 \tag{13}$$

由方程(13)可以得到关于 a、b、c 和 d 的四个代数方程组，其具体表达式可以参考文献[2]。解上面的非线性方程组可以得到板的挠曲变形，本文中利用 Mathematic 软件求解上面方程组。根据方程(13)可以得到多组解，还需判断这些解的稳定性，即哪些是真实解，可以根据势能的二阶变分正定性来判断解的稳定性。下面的雅可比矩阵必须是正定的，该组解才是稳定的，即

$$\delta^2\Pi = \frac{\partial(f_1, f_2, f_3, f_4)}{\partial(a, b, c, d)} \tag{14}$$

2 数值算例

数值算例中采用了与文献[2]相同的计算参数，算例中的材料体系为石墨/环氧，假定固化温度是 177 ℃，层板冷却到室温 21 ℃。材料属性是：E_1 = 181 GPa；E_2 = 10.3 GPa；ν_{12} = 0.28；G_{12} = 7.17 GPa；α_1 = -0.106 ×10^{-6}/℃；α_2 = 25.6 ×10^{-6}/℃，算例铺层为[0_2/90_2]。挠曲函数 $w(x, y)$ 的二阶偏导数分别为 a 和 b，将它们近似为挠曲函数分别沿 x 和 y 方向的曲率，这说明系数 a 和 b 的物理意义代表了固化变形后层板分别沿 x 和 y 方向的曲率。不同边长的方板固化后挠曲函数的系数 a 和 b 的变化情况(即方程(9)中的 a 和 b)如图 1，本算例的结果与文献[2]中的基本一致。

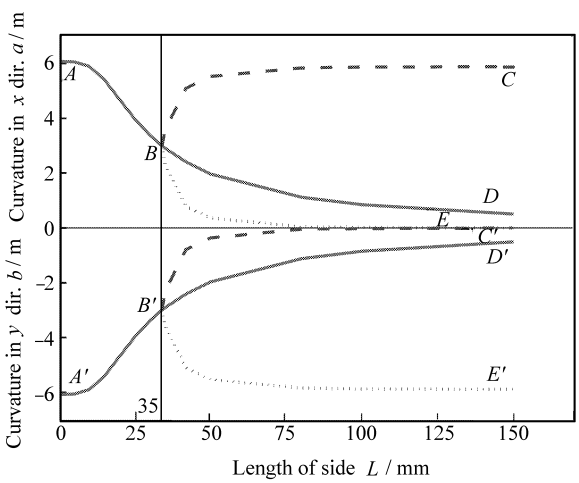


图 1 数值算例计算结果

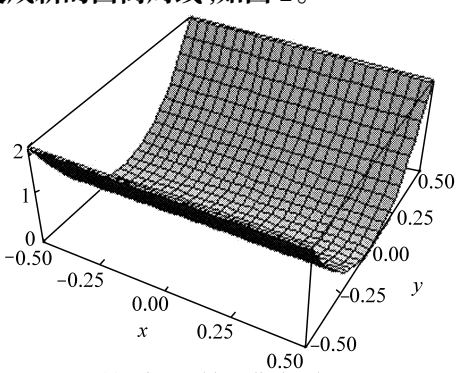
Fig. 1 Results of the numerical example

图 1 中的曲线 ABD 和 $A'B'D'$ 是 a 和 b 的第 1 组解随边长变化情况，BC 和 $B'C'$ 是 a 和 b 的第 2 组解随边长变化情况，BE 和 $B'E'$ 分别是是 a 和 b 的第 3 组解随边长变化情况。从图 1 可以看到板的

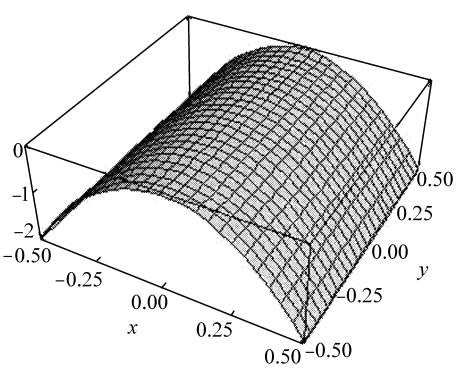
© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

边长存在某一临界值(本例为 35 mm) , 当边长小于该临界值时 , a 和 b 只有唯一的一组解 , 且 $a = -b$, 这说明固化变形后板沿两个垂直方向上的曲率大小相等而符号相反 , 呈马鞍形状。

当边长超过该临界值(35 mm) 时 , a 和 b 有三组可能的解 , 如图 1 中的 BD 和 $B'D'$, BC 和 $B'C'$ 以及 BE 和 $B'E'$。根据曲线 BD 和 $B'D'$ 得到的解有 $a = -b$, 其预报的固化后形状仍然为鞍形 , 由方程(14) 可以判断该形状是不稳定的。根据曲线 BC 和 $B'C'$ 以及 BE 和 $B'E'$ 得到的解中 a 和 b 的大小相差很大 , 当板边长大于 70 mm 时 , 曲线 BC 上的 a 值很大 , 而相应的 $B'C'$ 上的 b 接近于 0 , 这表示沿 x 轴方向有很大的曲率而相对于 y 轴曲率几乎为 0 , 其预报的固化后形状为半圆筒形。同理对于曲线 BE 和 $B'E'$ 可以得到类似的结论。由方程(14) 判断这两组解都是稳定的 , 这种固化后呈圆筒形的薄板(实际上已是一薄壳结构) 还存在所谓的“Snap through”现象[3-5] , 即在一定外力作用下 , 原来向下凹的圆筒变成向上凹的 , 并且原来的圆筒母线变成新的圆筒周线 ,如图 2。



(a) First stable cylinder shape
(with generatrixes along x- direction)



(b) Second stable cylinder shape
(with generatrixes along y- direction)

图 2　非对称复合材料层板固化变形后的多稳定构型

Fig. 2　Multi- stable configurations of cured shape of unsymmetric laminates

3　实验研究

实验中采用碳纤维/ 环氧树脂(T300/ 5222A) 材料体系 ,工艺制度如图 3 , 单向 T300/ 5222A 层板的力学性能见表 1。

表 1　T300/ 5222A 材料体系力学性能

Table 1　Mechanical properties of unidirection T300/ 5222A laminates

E_1/ GPa	E_2/ GPa	ν_{12}	α_1/ 10^{-6} ℃$^{-1}$	α_2/ 10^{-6} ℃$^{-1}$
137.47	10.07	0.23	0.37	24.91

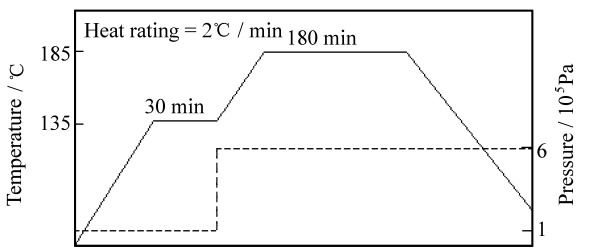


图 3　T300/ 5222A 预浸料的固化工艺制度

Fig. 3　Curing curve of T300/ 5222A prepregs

3.1　实验 1

实验 1 为[0/ 90]薄板 , 尺寸为 300 mm ×300 mm ×0. 25 mm。固化后的形状为半圆柱形 , 见图 4。外表面平行于纤维方向 , 内表面垂直于纤维方向。为了便于分析结果 , 定义 OX 和 OZ 轴如图 4 所示 , 同时还给出了几个关键点的位置坐标。可以看到曲线 OA 与 AB 段形状类似抛物线 , 而曲线段 BA 则向内侧卷曲。

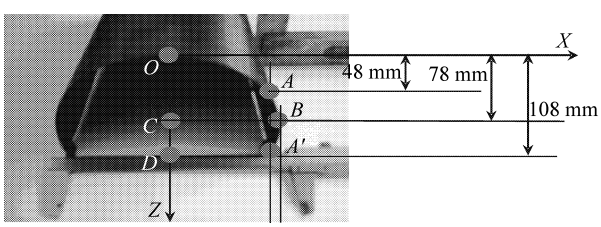


图 4　[0/ 90]非对称层板的固化后形状

Fig. 4　Cured shape of [0/ 90] unsymmetric laminates

预报的三组解分别为

$$\begin{cases} a_1 = 0.0000341, & b_1 = -12.3448 \\ a_2 = 0.1706660, & b_2 = -0.17066 \\ a_3 = 12.344800, & b_3 = 0.0000341 \end{cases}$$

根据第 3 组解得到的挠曲函数绘出的固化变形后形状见图 5 ,它是一个抛物面。按照图 5 坐标系测量了板边缘一些点(如图 4 中的 A 和 B 等) 距离

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

中线 OZ 的水平距离, 以及距离水平线 OX 的距离, 结果如图 6 所示。可以看出在挠度值小于 58 mm 的情况下, 预报值与实验结果基本一致。对于挠度值大于 58 mm 的情况, 预报的挠度值明显大于实际值, 预报的最大挠度值在板边缘处为 138 mm, 这主要是由于接近边缘处, 挠度不再是关于 X(图 4 中的 OX 轴) 坐标的单值函数, 如图 4 中的 ABA' 段。假设的挠曲函数已经不能描述这种情况, 因此这一方面仍然需要进一步研究。

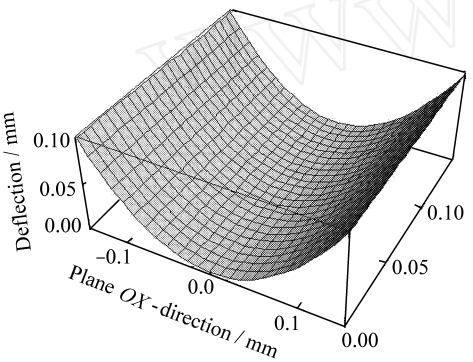


图 5 理论预报的[0/90]非对称层板的固化后形状

Fig. 5 Predicted cured shape of [0/90] unsymmetric laminates

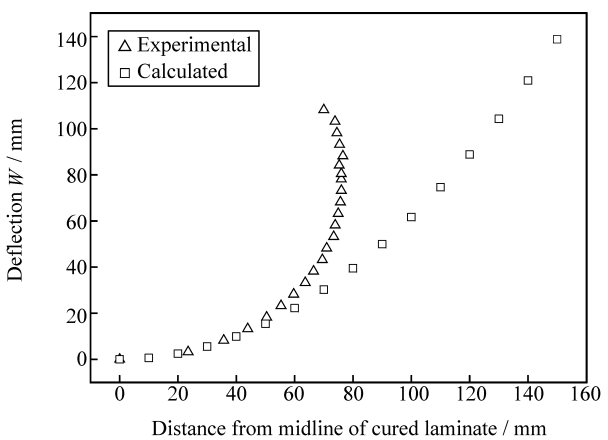


图 6 板边缘各点的挠度

Fig. 6 Deflection of points at the edge of laminates

3.2 实验 2

实验 2 中采用铺层数为 4, 铺设方式为[0/0/90/90](一个构件) 和[90/90/0/0](两个构件)。吸胶布 1 层, 放置在构件上面。构件尺寸为 295 mm ×90 mm ×0.5 mm, 2 个, 295 mm ×110 mm ×0.5 mm, 1 个, 如图 7。固化工艺制度同实验 1, 全过程抽真空(固化结束冷却开始前停止)。实验过程中没有施加压力, 但一直施加一个重物加压, 此压力一直维持到冷却过程结束。

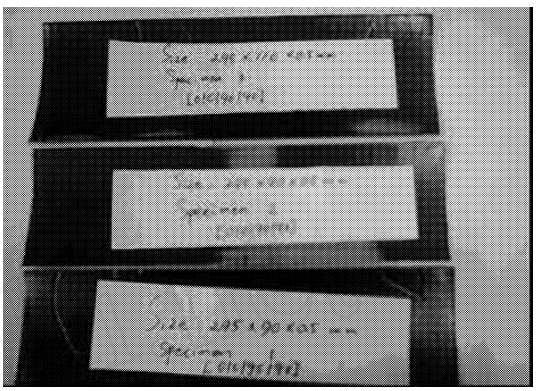


图 7 实验 2 中三个构件的尺寸和固化后变形

Fig. 7 Sizes and cured shape of three samples in Experiment 2

对于 295 mm ×110 mm ×0.5 mm 构件得到的曲率值为 6.172, 预报的最大挠度值为 6.25 mm, 而实验值为 6.8 mm, 可见二者吻合良好。对于 295 mm ×90 mm ×0.5 mm 构件预报的最大挠度值为 6.19 mm, 而实验值为 5.1 mm, 这其中的原因还不是很清楚, 很可能是实验误差引起这样大的差值。

4 结 论

本文中对非对称层板的固化后变形进行了预报, 并与实验结果进行了比较。以往采用的经典层合板理论预报其固化后的形状总是鞍形, 而本文中采用相关文献提出的理论与方法更准确地预报了其形状。对于翘曲不是很严重的情况, 预报的结果与实验结果比较吻合, 但是当翘曲很严重时, 如板边缘向内卷曲等, 仍需要进行探索研究。

参考文献:

[1] Hyer M W. Some observations on the cured shape of thin unsymmetric laminates [J]. J Composite Materials, 1981, 15(3): 175 - 194.

[2] Hyer M W. Calculations of the room-temperature shapes of unsymmetric laminates [J]. J Composite Materials, 1981, 15(5): 296 - 310.

[3] Hyer M W. The room-temperature shapes of four-layer unsymmetric cross-ply laminates [J]. J Composite Materials, 1982, 16(5): 318 - 340.

[4] Jun W J, Hong C S. Effect of residual shear strain on the cured shape of unsymmetric cross-ply thin laminates [J]. Composites Science Technology, 1990, 38(1): 55 - 67.

[5] Cho Maenghyo, Yuel Roh-Hee. Non-linear analysis of the curved shapes of unsymmetric laminates accounting for slippage effects [J]. Composites Science and Technology, 2003,

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

63(16) : 2265 - 2275.

[6] Dano M L , Hyer M W. Thermally-induced deformation behavior of unsymmetric laminates [J]. International Journal of Solids and Structures , 1998 , 35(17) : 2101 - 2120.

[7] 任立波 , 罗小东 , 崔德刚. 复合材料非对称正交层合薄壳固化变形研究 [J]. 航空学报 , 1996 , 17(增刊) : 128 - 130.
Ren Libo , Luo Xiaodong , Cui Degang. Research on the cured shape of cross-ply unsymmetric composite laminated shell [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica , 1996 , 17(S) : S128 - S130.

[8] 王　平 , 孟庆春 , 张　行. 复合材料层合梁非对称分层问题的解析解法 [J]. 复合材料学报 , 2004 , 21(1) : 95 - 99.
Wang Ping , Meng Qingchun , Zhang Xing. Analytical method of solution on symmetric delamination in symmetric orthogonal composite laminated beams [J]. Acta Materiae Compositae Sinica , 2004 , 21(1) : 95 - 99.

www.cnki.net

书讯

《中国材料工程大典 ·复合材料工程》出版

《中国材料工程大典》是关于材料的结构和性能、制备和测试、成形和加工、热处理和表面工程的大型工具书。《中国材料工程大典》共 26 卷 ,近 7000 万字 ,由中国机械工程学会、中国材料研究学会牵头组织编写 ,1200 多名专家学者 ,包括 39 名两院院士、百余名各学科学术带头人参加了编写和审稿工作。是我国迄今为止篇幅最大、涵盖内容最为新颖、全面、丰富和权威的材料工程工具书。《中国材料工程大典》由化学工业出版社出版。2006 月 1 月成批出版 ,2006 年 3 月全套出齐。

《复合材料工程》是《中国材料工程大典》卷目之一(第 10 卷) ,是反映在金属、无机非金属和高分子材料三大材料基础上发展起来的第四大类材料 ——复合材料当前开发和应用水平的专业工具书。主要内容包括 :复合材料理论和应用基础 ,如增强体材料、复合材料界面等 ;各种类型的复合材料 ,如工业聚合物基复合材料与玻璃钢、先进树脂基复合材料、热塑性聚合物基复合材料、金属基复合材料、陶瓷(玻璃)基复合材料、碳基复合材料、水泥基复合材料、功能复合材料与新型复合材料 ;复合材料的应用和分析检测技术 ,如复合材料力学问题与设计、复合材料结构设计与分析、复合材料性能实验、表征与质量控制等。

《复合材料工程》以国内外复合材料领域中产量、应用等需求较大的品种为重点 ,选择其中关键性、共性的技术参数、图表、科研与应用成果为核心。力求对复合材料各领域进行比较全面、比较系统、能够综合反映其当前现状及发展前景的介绍。《复合材料工程》共 16 篇 ,约 290 万字。由益小苏教授、杜善义院士和张立同院士主编 ,40 多位专家教授参加编写和审稿。是材料科学与工程、制造业的科研、教学、工程技术及管理人员不可多得的一本综合性专业工具书。

◆第 10 卷　复合材料工程　益小苏　杜善义　张立同　主编　　2006. 3 出版/ 160 元

◆《中国材料工程大典》各卷图书信息和其他详情 ,请登录化学工业出版社网站 www. cip. com. cn

◆联系地址 : 北京市朝阳区惠新里 3 号楼(邮政编码 100029)　　咨询电话 : 010-64982532

◆销售电话 :010-64918083 ,　64982530(销售中心)　　传真 :010-64982630

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net