复合材料学报 第23卷 第4期 8月 2006年
Acta Materiae Compositae Sinica Vol. 23 No. 4 August 2006

文章编号: 1000-3851(2006)04-0149-06

NiTi 形状记忆合金纤维拔出中的力学问题

李 [illegible], 金 明*, 田东艳, 兑关锁
(北京交通大学 土木建筑工程学院 工程力学研究所, 北京 100044)

摘 要: 对 NiTi 形状记忆合金纤维拔出的力学模型进行了探讨。在恒温状态下, 考虑纤维和基体间的界面摩擦力, 分别用两种本构理论, 即 Tanaka 的指数模型和 C. Liang 的余弦模型, 讨论了形状记忆合金纤维在变轴力作用下的拉伸问题。推导了形状记忆合金纤维拔出量的表达式, 并给出数值计算结果。由指数模型和余弦模型得到的结果非常吻合, 证明了这种理论方法是正确的。

关键词: 形状记忆合金; NiTi 纤维; 拔出; 本构模型; 变轴力
中图分类号: TB330.1 **文献标识码**: A

Mechanical behavior in the pull-out process of NiTi SMA fiber

LI Jing, JIN Ming*, TIAN Dongyan, DUI Guansuo
(Institute of Engineering Mechanics, School of Civil Engineering and Architecture, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: This article discusses the pull-out mechanical model of NiTi shape memory alloy (SMA) fiber. In constant temperature state, considering the interfacial friction between the fiber and matrix, the tensile problem of SMA fiber under varying axial force is discussed, and the formulation of memory alloy fiber's pull-out length is obtained by two theories respectively, namely the index model of Tanaka and the cosine model of C. Liang. The numerical results are given. The good agreement between the results of index model and cosine model warrants this new theoretical method.

Keywords: SMA; NiTi fiber; pull-out; constitutive model; varying axial force

形状记忆合金(SMA)是集感知与驱动为一体的新型功能材料, 具有形状记忆效应(SME)和伪弹性(PE)[1]。实验表明, 将 NiTi 形状记忆合金纤维固化在金属或高分子基体中, 可以构成智能复合材料。实验还表明, 利用 NiTi 纤维的形状记忆效应, 改变 NiTi 纤维的工作温度可以对基体中裂纹附近的应力场产生一定的影响[2-4]。这为主动控制裂纹的扩展以及裂纹的修复提供了可行的方法[5]。理论模型是其中一个重要问题, 为此, 人们进行了许多研究。但由于 NiTi 纤维和基体间的相互作用十分复杂, 到目前为止还没有一个令人满意的力学模型。本文作者将就无预应变 NiTi 纤维拔出过程中脱胶段纤维的力学性质进行理论分析, 对 NiTi 纤维拔出问题进行一个初步的讨论。

NiTi 纤维增强复合材料结构在工作中受拉产生一个 I型裂纹, 如图 1(a)所示, 在开裂区域纤维被拔出, 导致纤维与基体脱离, 见图 1(a)中虚线部分, 这个区域称为脱胶区。将脱胶段纤维及周围基体分离出来讨论, 可以把这部分简化成图 1(b)中的模型来进行分析[6], 其中, 基体半径为 R, NiTi 纤维半径为 r。模型的一端固定, 另一端施加载荷 P 进行加载。脱胶段的 NiTi 纤维受到基体对它的摩擦力作用, 这段纤维可作为一个变轴力杆来考虑, 见图 2(a), τ为基体对纤维的摩擦力。图 2(b)为轴力图。

在近年来有关 NiTi 形状记忆合金拔出问题的研究工作中, Chi-Kin Poon 等[7,8]在预应变 NiTi 形状记忆合金拔出问题上做了大量的理论及实验研究工作, 并且设计了一整套拔出实验设备。Chi-Kin Poon 等的理论模型与本文中模型有一些区别, 主

收稿日期: 2005-07-01; **收修改稿日期**: 2005-12-15
基金项目: 国家自然科学基金(90205007)
通讯作者: 金 明, 博士, 教授, 研究方向为非线性力学 E-mail: jinmingjinming@hotmail.com

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

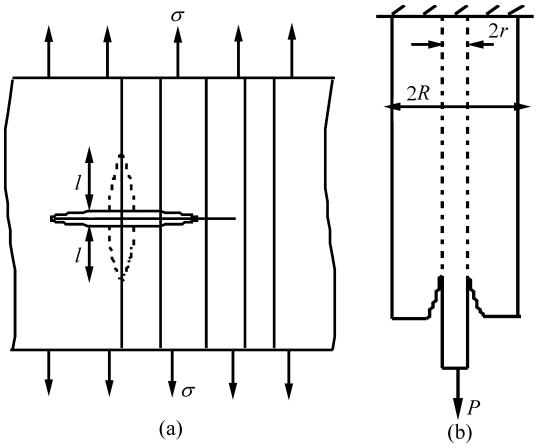

图 1　Ni Ti 复合材料构件受拉产生的裂纹和脱胶区以及 Ni Ti 纤维拔出模型

Fig. 1　The crack and debonding region of composite containing Ni Ti fibers and modeling of Ni Ti fiber pull-out problem

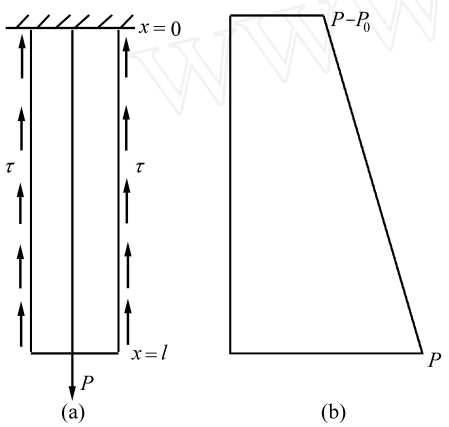

图 2　变轴力作用下的 Ni Ti 纤维和轴力图($P_0 = 2\pi r l \tau$)

Fig. 2　Ni Ti fiber under varying axial force and axial force graph($P_0 = 2\pi r l \tau$)

要包括以下三点: (1) Chi-Kin Poon 理论模型中所采用的 Ni Ti 纤维是预应变 Ni Ti 纤维, 而本文中采用的是没有预应变的 Ni Ti 纤维; (2) Chi-Kin Poon 理论模型中所采用的本构模型是 Brinson 模型, 而本文中采用的是 Tanaka 一维本构模型; (3) Chi-Kin Poon 理论模型中拔出端的基体部分是固定的, 而本文中拔出端基体是自由的。

SMA 本构关系是一个复杂的问题, 由于受拉是脱胶段纤维受力的主要特点, 本文中采用 Tanaka[9] 和 Liang[10] 一维本构模型。这两种本构模型不仅可以体现 Ni Ti 纤维受拉时的主要特性, 而且应用起来比较方便。

1　本构模型简介

Tanaka 本构方程为

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} + \Theta\dot{T} + \Omega\dot{\xi} \tag{1}$$

式中: E 为杨氏模量; Θ 为热弹性模量; Ω 为相变模量; ξ 为相变过程中马氏体百分数; T 为工作温度; σ 为第二类 Piola-Kichhoff 应力; ε 为 Green-Lagrange 应变; ($\dot{}$) 为对时间 t 的导数。

在 Tanaka 本构模型中, 马氏体含量与温度、应力的关系服从下列指数关系:

$$\begin{cases} \xi = 1 - \exp[a_M(M_s - T) + b_M\sigma] & (A \to M) \\ \xi = \exp[a_A(A_s - T) + b_A\sigma] & (M \to A) \end{cases} \tag{2}$$

式中: $a_M = \dfrac{-2\ln 10}{M_s - M_f}$, $b_M = \dfrac{a_M}{\sigma_a}(T - M_s)$;

$a_A = \dfrac{-2\ln 10}{A_f - A_s}$, $b_A = \dfrac{a_A}{\sigma_c}(T - A_s)$;

$\sigma_a = C_M(T - M_s)$, $\sigma_b = \dfrac{-2\ln 10}{b_M} + \dfrac{a_M}{b_M}(T - M_s)$;

$\sigma_c = C_A(T - A_s)$, $\sigma_d = \dfrac{-2\ln 10}{b_A} + \dfrac{a_A}{b_A}(T - A_s)$;

M_s 和 M_f 分别表示马氏体相变开始和结束时的温度; A_s 和 A_f 分别表示逆相变开始和结束时的温度; σ_a 和 σ_b 分别表示马氏体相变开始和结束时的应力; σ_c 和 σ_d 分别表示逆相变开始和结束时的应力; A→M 表示奥氏体向马氏体的相变过程; M→A 表示马氏体向奥氏体的相变过程; C_M 和 C_A 表示应力对相变温度的影响系数, 为材料常数。

在 Liang 本构模型中, 本构方程的形式同式(1), 与 Tanaka 本构模型不同的是马氏体含量由下列余弦关系确定:

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{1}{2}\{\cos[a_m(T - M_f) + b_m\sigma] + 1\} & (A \to M) \\ \xi = \dfrac{1}{2}\{\cos[a_a(T - A_s) + b_a\sigma] + 1\} & (M \to A) \end{cases} \tag{3}$$

式中: $a_m = \dfrac{\pi}{M_s - M_f}$, $b_m = -\dfrac{a_m}{C_M}$; $a_a = \dfrac{\pi}{A_f - A_s}$, $b_a = -\dfrac{a_a}{C_A}$。

Brinson 经过分析发现, Liang 的模型在 $T < M_s$ 或在较高温度又存在温度诱导马氏体相变时, 不能反映 SMA 的行为, 于是以 Tanaka 率形式的本构方程(1)为基础提出了适用于所有温度的 SMA 本构关系[11,12], 即

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}\dot{\varepsilon} + \frac{\partial \sigma}{\partial T}\dot{T} + \frac{\partial \sigma}{\partial \xi_S}\dot{\xi}_S + \frac{\partial \sigma}{\partial \xi_T}\dot{\xi}_T$$
$$= E\dot{\varepsilon} + \Theta\dot{T} + \Omega_S\dot{\xi}_S + \Omega_T\dot{\xi}_T \qquad (4)$$

式中: ξ_T 表示温度诱发马氏体份数; ξ_S 表示应力诱发马氏体份数。在 Brinson 提出的一维本构模型中, 建议采用 $\xi = \xi_T + \xi_S$, 即把由温度引起的马氏体相变和由应力引起的马氏体相变分开考虑, 并且认为 $E(\xi) = E_A + \xi(E_M - E_A)$ (E_A 表示奥氏体弹性模量, E_M 表示马氏体弹性模量), $\Omega(\xi) = -\varepsilon_L E(\xi)$ (ε_L 是由相变引起的最大残余应变)。

本文中, 为了简化计算, 将弹性模量 E 暂当作常数来考虑。

2 恒温加载过程中本构关系的具体表达式

以 Tanaka 本构模型为例, 考虑在 NiTi 纤维工作温度 T 恒定不变的情况下, 由式(1)、式(2)可以得到各个不同阶段的应力和应变的具体关系。加载过程为 1、2、3 段, 见图 3。

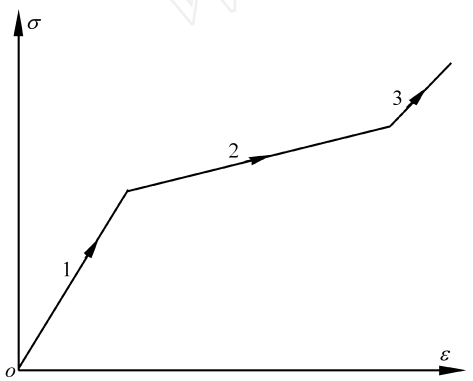

图 3 恒温条件下 NiTi 纤维本构关系

Fig. 3 The constitutive relation of NiTi fiber under constant temperature

第 1 段为奥氏体相, 是线弹性阶段, 本构关系为

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\sigma_1 \qquad (5)$$

式中, σ_1 和 ε_1 分别表示图 3 中第 1 段的应力和应变。

第 2 段为应力诱发马氏体相变段, 本构关系为

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\sigma_2 - \varepsilon_L \exp[a_M(M_s - T) + b_M\sigma_2] + \varepsilon_L \qquad (6)$$

式中: σ_2 和 ε_2 分别表示图 3 中第 2 段的应力和应变; $\varepsilon_L = -\frac{\Omega}{E}$ 为 NiTi 纤维的最大残余应变。

第 3 段为马氏体相段, 本构关系为

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\sigma_3 + 0.99\varepsilon_L \qquad (7)$$

式中, σ_3 和 ε_3 分别表示图 3 中第 3 段的应力和应变。

3 变轴力作用下 NiTi 纤维的力学模型

NiTi 纤维拔出是一个非常复杂的问题, 随着所加载荷的增加, 脱胶长度和基体对纤维的摩擦力都是变化的。在本文中对这些问题进行了简化, 做出了以下几点假设:

(1) 将拔出问题看作一维问题, 采用一维本构模型;

(2) 假设弹性模量 E 的常数[9,10];

(3) 假设整个加载过程中温度是恒定不变的;

(4) 假设脱胶长度 l 在整个加载过程中是不变的, 即在加载过程中基体与纤维不再进一步脱胶;

(5) 假设基体对纤维的摩擦力在加载过程中是恒定不变的, 并且假设基体只受纤维对它的摩擦力作用;

(6) 将脱胶段 NiTi 纤维作为一个变轴力杆来处理, 如图 2(a)所示。

设脱胶段纤维长度为 l, 半径为 r, 以固定端为原点建立坐标系, 纤维的轴线为 x 轴, 在自由端 ($x = l$) 加载, τ 为基体对纤维的摩擦力。考虑纤维始终处于受拉状态, 轴力图由图 2(b)给出。

在恒温加载过程中, 纤维会经历 5 种状态, 如图 4 所示。图 4(a)是初始状态, 纤维完全处于奥氏体阶段。随着端部载荷 P 的增加, 端部应力逐渐达到马氏体相变开始的应力, 此时, 端部开始出现马氏体相变。继续增加载荷, 马氏体和奥氏体的混合区逐渐扩大, 纤维进入第 2 种状态, 如图 4(b)所示。当固定端的应力逐渐达到马氏体相变开始的应力时, 整个纤维完全为马氏体和奥氏体的混合体, 纤维进入第 3 种状态, 如图 4(c)所示。端部的应力达到马氏体相变结束的应力时, 端部的马氏体相变结束, 继续增加载荷, 马氏体区逐渐扩大, 纤维进入第 4 种状态, 如图 4(d)所示。固定端的应力达到相变结束应力时, 整个纤维的马氏体相变结束, 完全变为马氏体, 纤维进入第 5 种状态, 如图 4(e)所示。对于加载的不同阶段, 由式(5)、式(6)及式(7)可以得到相应的端部位移。

由于纤维始终处于受拉状态, 所以从 P_0 开始加载, 这里 $P_0 = 2\pi r l \tau$, τ 为给定值。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

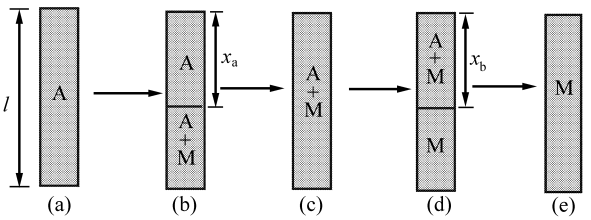

图 4　恒温加载过程中 NiTi 纤维的相态

Fig. 4　The phase of NiTi fiber with isothermal loading

当 $P_0 \le P \le \sigma_a \pi r^2$ 时，纤维处于线弹性阶段，即图 4(a) 状态，由式(5) 可得端部位移

$$u_{f1}(P) = \int_0^l \varepsilon_1(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{E\pi r^2}(Pl - \pi r\tau l^2) \quad (8)$$

当 $\sigma_a \pi r^2 \le P \le \sigma_a \pi r^2 + P_0$ 时，纤维处于第 2 种状态，即图 4(b) 所示的状态，由式(5)、式(6) 可得端部位移

$$\begin{aligned} u_{f2}(P) &= \int_0^{x_a} \varepsilon_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_a}^{l} \varepsilon_2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{E\pi r^2}(Pl - \pi r\tau l^2) - \\ &\quad \frac{\varepsilon_L r}{2\tau b_M}\exp\left[a_M(M_s - T) + \frac{b_M P}{\pi r^2}\right] + \\ &\quad \frac{\varepsilon_L r}{2\tau b_M}\exp[a_M(M_s - T) + b_M\sigma_a] + \\ &\quad \varepsilon_L(l - x_a) \end{aligned} \quad (9)$$

式中，$x_a = l - \dfrac{P - \sigma_a \pi r^2}{2\pi r\tau}$。

当 $\sigma_a \pi r^2 + P_0 \le P \le \sigma_b \pi r^2$ 时，纤维处于第 3 种状态，见图 4(c)，由式(6) 可得端部位移

$$\begin{aligned} u_{f3}(P) &= \int_0^l \varepsilon_2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{E\pi r^2}(Pl - \pi r\tau l^2) - \\ &\quad \frac{\varepsilon_L r}{2\tau b_M}\exp\left[a_M(M_s - T) + \frac{b_M P}{\pi r^2}\right] + \\ &\quad \frac{\varepsilon_L r}{2\tau b_M}\exp\left[a_M(M_s - T) + \right. \\ &\quad \left. b_M\left(\frac{P - P_0}{\pi r^2}\right)\right] + \varepsilon_L l \end{aligned} \quad (10)$$

当 $\sigma_b \pi r^2 \le P \le \sigma_b \pi r^2 + P_0$ 时，纤维处于第 4 种状态，见图 4(d)，由式(6)、式(7) 可得端部位移

$$\begin{aligned} u_{f4}(P) &= \int_0^{x_b} \varepsilon_2(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_b}^{l} \varepsilon_3(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{E\pi r^2}(Pl - \pi r\tau l^2) - \\ &\quad \frac{\varepsilon_L r}{2\tau b_M}\exp[a_M(M_s - T) + b_M\sigma_b] + \\ &\quad \frac{\varepsilon_L r}{2\tau b_M}\exp\left[a_M(M_s - T) + b_M\left(\frac{P - P_0}{\pi r^2}\right)\right] + \\ &\quad \varepsilon_L x_b + 0.99\varepsilon_L(l - x_b) \end{aligned} \quad (11)$$

式中，$x_b = l - \dfrac{P - \sigma_b \pi r^2}{2\pi r\tau}$。

当 $P \ge \sigma_b \pi r^2 + P_0$ 时，纤维处于第 5 种状态，见图 4(e)，由式(7) 可得

$$\begin{aligned} u_{f5}(P) &= \int_0^l \varepsilon_3(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{E\pi r^2}(Pl - \pi r\tau l^2) + 0.99\varepsilon_L l \end{aligned} \quad (12)$$

在式(8)～式(12) 中，$u_{f1}(P)$～$u_{f5}(P)$ 分别表示加载过程中的 5 种状态的端部位移。

对于 Liang 本构模型，同样也可以得到这 5 种状态的端部位移，整个分析过程同上。

4　算　例

表 1 中列出了一种 NiTi 纤维的材料常数及几何尺寸。令 $\tau = 1.30$ MPa，从 $P = P_0$ 开始加载，环境温度分别为 $T = 25$ ℃、40 ℃、55 ℃和 65 ℃，端部载荷与端部位移的关系由图 5 给出，并与 Liang 本构模型的计算结果进行比较，如图 5 所示。

从图 5 看出，两条曲线的变化趋势相同，与 Tanaka 指数模型相比，Liang 余弦模型在相同载荷作用下，端部位移偏小。

考虑有无摩擦力两种情况，将由 Tanaka 指数模型计算出来的有无摩擦力两种情况的端部位移曲线进行比较，见图 6，从中可以看出摩擦力对端部位移的影响。

表 1　NiTi 纤维参数[10]

Table 1　Parameter of NiTi fiber[10]

Transformation temperature/ ℃	Inverse transformation temperature/ ℃	Transformation parameter/ (MPa·℃$^{-1}$)	Size of the fiber/ mm	Young's modulus/ GPa	Maximum residual strain/ %
$M_s = 18.4$ $M_f = 9.0$	$A_s = 34.5$ $A_f = 49$	$C_M = 10.3$ $C_A = 10.3$	$l = 10$ $r = 0.5$	$E = 46.65$	$\varepsilon_L = 6.7$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

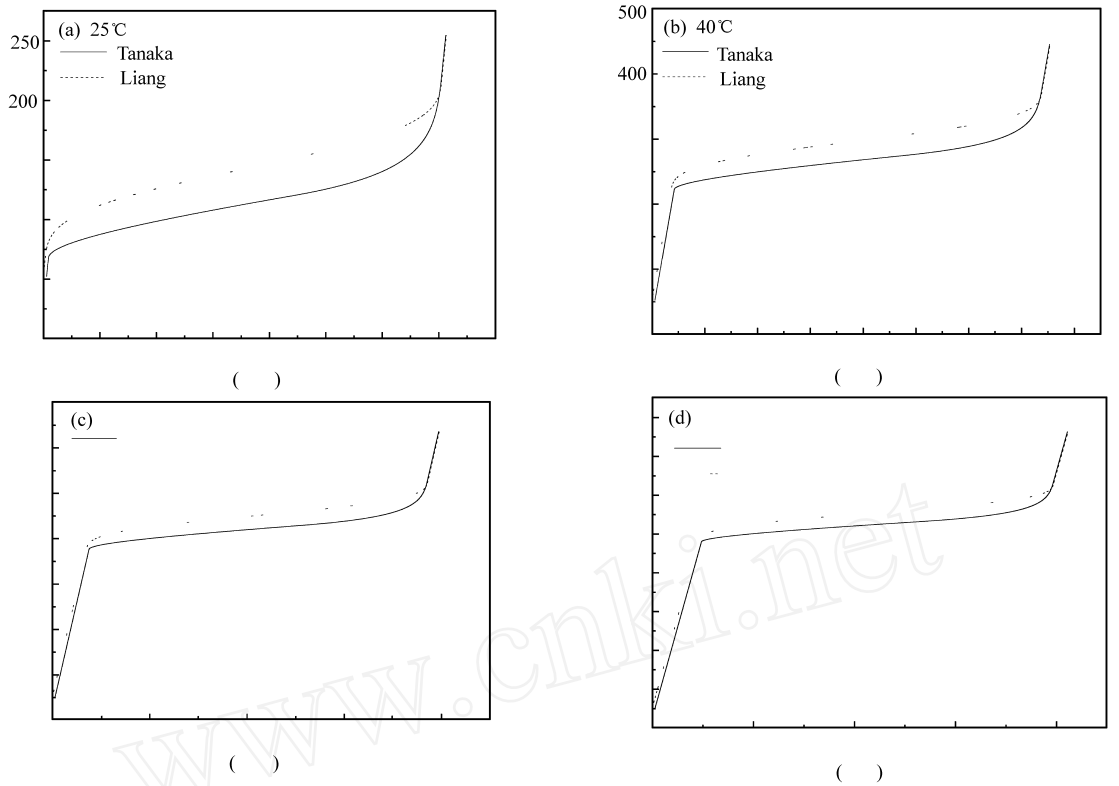

图 5 两种本构模型得到的载荷-位移曲线

Fig. 5 Load-displacement curves for two different constitutive models

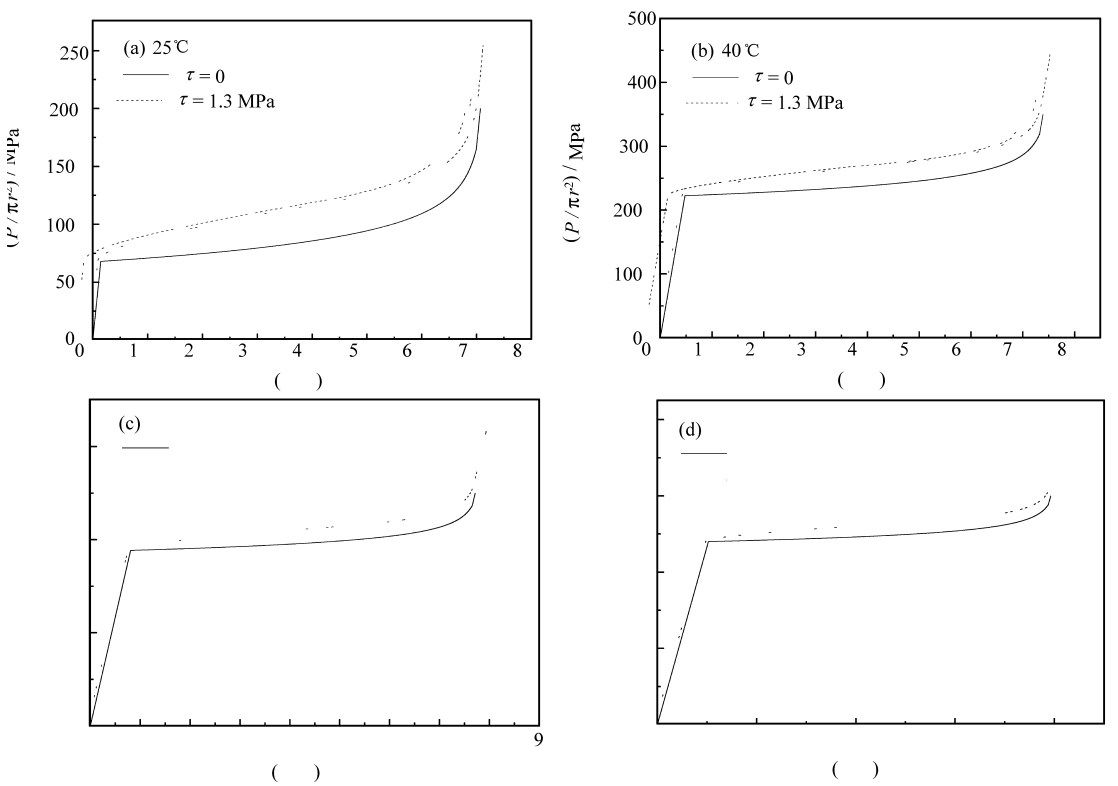

图 6 不同摩擦力情况下得到的载荷-位移曲线

Fig. 6 Load-displacement curves for two different frictional force situations

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

5　纤维的拔出量

基体可以看作纤维外面的套筒，在前面的讨论中假设了基体只受纤维对它的摩擦力 τ 的作用，则基体末端的位移为

$$u_m = \int_0^l \frac{2r\tau x}{E_m(R^2 - r^2)} dx = \frac{r\tau l^2}{E_m(R^2 - r^2)} \quad (13)$$

那么，纤维拔出量为

$$u = |u_f - u_m| \quad (14)$$

基体采用环氧树脂，几何尺寸 $l = 10$ mm，$R = 5$ mm，弹性模量为 3.2 GPa。数值计算结果表明，$u_m = 0.821 \times 10^{-3}$ mm，与 Ni Ti 纤维的端部位移相差三个数量级，见图 5，对纤维拔出量的影响非常小，可以忽略不计。

6　结　论

在基体对纤维的摩擦力和脱胶长度均被假设为不变的基础上，本文作者分别由 Tanaka 和Liang一维本构模型得到了纤维拔出量的解析解和数值解。由数值结果可以看出，两条曲线趋势相同，可以证明此种方法的正确性。但这只是对拔出问题的一个初步讨论。在实际拔出过程中，基体对纤维的摩擦力和脱胶长度都是随着所加载荷的增加而变化的。这些问题将在以后的研究工作中进行讨论。

参考文献：

[1] 朱炜国，吕和祥，杨大智. 形状记忆合金的本构模型 [J]. 材料研究学报，2001，15(3)：263 - 268.
Zhu Weiguo，Lü Hexiang，Yang Dazhi. Constitutive model of shape memory alloys [J]. Chinese Journal of Material Research，2001，15(3)：263 - 268.

[2] Araki S，Ono H，Saito K. Micromechanical analysis of crack closure mechanism for intelligent material containing TiNi fibers Ⅰ: Modeling of crack closure mechanism and analysis of stress intensity factor [J]. JSME International Journal，2002，45(2)：208 - 216.

[3] Araki S，Ono H，Saito K. Micromechanical analysis of crack closure mechanism for intelligent material containing TiNi fibers Ⅱ: Numerical calculation of stress intensity factor in the process of shape memory shrinkage of TiNi fibers [J]. JSME International Journal，2002，45(3)：356 - 362.

[4] 徐祖耀. 形状记忆材料 [M]. 上海：上海交通大学出版社，2000：354 - 355.
Xu Zuyao. Shape Memory Material [M]. Shanghai：Shanghai Jiao Tong University Press，2000：354 - 355.

[5] Wang Xiaoming. Shape memory alloy volume fraction of pre-stretched shape memory alloy wire-reinforced composites for structural damage repair [J]. Smart Materials and Structures，2002，11(1)：590 - 595.

[6] Gao Y C，Mai Y W，Cotterel B. Fracture of fiber-reinforced materials [J]. Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)，1988，39：550 - 572.

[7] Poon Chi-Kin，Lau Kin-Tak，Zhou Limin. Design of pull-out stresses for prestrained SMA wire/polymer hybrid composites [J]. Composite Part B，2005，36(1)：25 - 31.

[8] Poon Chi-Kin，Zhou Limin，Jin Wei，et al. Interfacial debond of shape memory alloy composites [J]. Smart Materials and Structures，2005，14(4)：N29 - N37.

[9] Tanaka K. A thermomechanical sketch of shape memory effect：One-dimensional tensile behavior [J]. Res Mechanics，1986，18(2)：251 - 263.

[10] Liang C，Rogers C A. A one-dimensional thermomechanical constitutive relation of shape memory materials [J]. J Intell Master Syst & Struct，1990，1(2)：207 - 234.

[11] Brinson L C. One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys：Thermomechanical derivation with nonconstant material functions and redefined martensite internal variable [J]. J Intell Mater Syst & Struct，1993，4(2)：229 - 242.

[12] Brinson L C，Lammering R. Finite element analysis of the behavior of shape memory alloys and their applications [J]. Int J Solids Struct，1993，30(23)：3261 - 3280.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net