第 16 卷 第 4 期 复 合 材 料 学 报 Vol 16 No. 4
1999 年 10 月 ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA October 1999

复合材料的界面损伤过程与弹塑性本构关系

赵颖华 王金忠
(沈阳建筑工程学院 土木系, 沈阳 110015)

摘 要 探讨了颗粒增强复合材料在三向拉伸荷载作用下界面逐渐开裂的过程及材料弹塑性本构关系的改变。应用Weibull 统计学理论描述界面由局部到全部的开裂过程。对于进入弹塑性阶段的材料本构关系采用割线模量理论。数值分析结果表明, 界面开裂过程取决于荷载模式、界面强度以及颗粒形状等几方面因素。

关键词 复合材料, 界面损伤, 弹塑性
中图分类号 TB330. 1

界面开裂是复合材料基本损伤模式之一。与其他形式的损伤(如基体破孔或微裂纹, 纤维断裂等)一样, 界面损伤一方面会削弱复合材料的总体刚度和强度而影响其使用性, 另外界面微裂纹常常诱发材料宏观断裂, 从而威胁材料系统寿命。因此对界面损伤的研究一直引人关注。

颗粒增强复合材料的界面开裂主要是由拉应力引起的。当沿某方向的拉应力大于材料界面强度时, 界面将会产生该方向的张开裂纹。由于颗粒与基体脱离, 在这一方向不再具有增强作用。我们称这种单方向的界面开裂形式为"局部开裂"[1]。如果荷载为三向等拉力, 随着拉力的增大, 部分颗粒会与基体完全脱离, 即"均匀开裂"[2]。均匀开裂颗粒完全退出工作, 这时的复合材料相当于含孔介质。本文中将讨论更为复杂的界面损伤情况。在三向对称拉应力作用下, 即应力满足 $\sigma_{22}=\sigma_{33}=\beta\sigma_{11}$, 当荷载增加到一定程度时, 开始出现沿最大应力方向的界面局部开裂。例如当 $\sigma_{11}>\sigma_{22}=\sigma_{33}$, 即 $\beta<1$ 时, 界面会首先沿 1 方向开裂, 即颗粒顶部和底部开裂(图 1(a))(第一类局部开裂)。接着随荷载的继续增加, 已经有局部损伤的颗粒会沿 2—3 方向继续开裂, 从而与基体完全脱离; 而当 $\beta>1$ 时, 先沿 2—3 方向开裂, 即形成围绕颗粒的环状开裂面(图 1(b))(第二类局部开裂), 之后再沿 1 方向开裂; 当 β 接近于 1, 即三方向的应力相差不大时, 两种局部开裂会同时或相继出现。损伤颗粒沿开裂方向丧失承载能力。如第一类局部开裂的颗粒不再能承担 1 方向的拉伸荷载与剪切荷载, 第二类局部开裂的颗粒则不能承担 2—3 方向的荷载, 而对于材料的其它方向仍有增强作用。当界面均匀开裂后, 在拉应力下, 颗粒不再与基体一同承担荷载, 所起的作用相当于孔。关于上述损伤过程各个阶段复合材料弹性模量的改变作者已作详尽论述[3]。本文的研究侧重于界面开裂过程及其对材料宏观弹塑性本

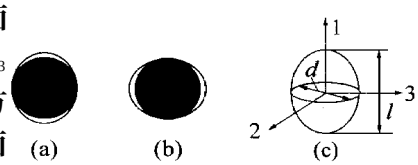

图 1 局部损伤颗粒和坐标示意图
Fig. 1 Schematic diagrams of partial debonded particles

收修改稿、初稿日期: 1998-09-06, 1998-05-30
国家教委留学回国人员科研启动基金和沈阳市科技计划资助项目(199)

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

构关系的影响。

1　基本理论

设基体和增强材料为均质各向同性, 界面完好, 其弹性模量和泊松比分别为 E_0, ν_0 和 E_1, ν_1, 体积含量为 c_0 和 c_1 ($c_0+c_1=1$)。颗粒为椭球状, 可用形状参数 α 来描述(图 1(c)), $\alpha=d/t$。$\alpha=1$, $\alpha\to 0$ 和 $\alpha\to\infty$ 分别对应于球状、扁片状和纤维状。界面损伤过程中两相复合材料逐渐转化为含不同损伤程度颗粒的多相混杂系统, 其中第 r 相的体积含量为 c_r, $r=0, 1, 2, 3$ 和 4 分别对应于基体, 完好颗粒, 1 方向开裂颗粒, 2—3 方向开裂颗粒和孔洞(均匀开裂颗粒), 有 $\sum_r c_r=1$。

1.1　局部损伤颗粒的等效模拟——横观各向同性颗粒

Mori-Tanaka[4]的平均化方法具有简单并能得出弹性模量的显式表达等特点, 被广泛应用于复合材料细观力学性能的研究。但因为含有界面局部损伤颗粒的复合材料存在基体与颗粒非均匀结合的问题, 该理论不能直接应用。为此我们采用等效模拟颗粒: 用一种假想的、与基体完好结合的横观各向同性颗粒来代替实际的各向同性的局部损伤颗粒。设沿 1 方向(图 1(a))和 2—3 方向(图 1(b))开裂颗粒的等效模拟弹性模量分别为

$$\left.\begin{aligned} L_2 &= (2k_2, l_2, n_2, 2m_2, 2p_2) = \left(2\frac{\mu_1(3k_1-\mu_1)}{k_1+\mu_1}, 0, 0, 2\mu_1, 0\right) \\ L_3 &= (2k_3, l_3, n_3, 2m_3, 2p_3) = \left(0, 0, \frac{\mu_1(3k_1-\mu_1)}{k_1}, 0, 0\right) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中, L_2 和 L_3 的分量为 Walpole[5]表示符号, 有 $\mu_1=E_1/2(1+\nu_1)$, $k_1=E_1/2(1+\nu_1)(1-2\nu_1)$。显然两等效模拟弹性模量分别满足实际颗粒的应力状态, 即 L_2 满足第一类损伤颗粒的应力状态 $\sigma_{11}=0$, $\sigma_{12}=0$ 和 $\sigma_{21}=0$, L_3 满足第二类颗粒的应力状态 $\sigma_{22}=\sigma_{33}=0$ 和 $\sigma_{23}=\sigma_{12}=0$。

1.2　弹性模量和弹塑性本构关系

含损伤颗粒的混杂复合材料弹性模量张量为[3]

$$L = L_0(I-S)\left\{\left[(1-c_4)I-\sum_{r=1}^{3}c_rB_r\right]^{-1}-S\right\}^{-1} \tag{2}$$

其中 S 是 Eshelby[6]张量, I 是四阶单位张量, $r=0, \cdots, 3$。B_r 有如下形式:

$$B_r = I-\left[(L_r-L_0)S+L_0\right]^{-1}L_r \tag{3}$$

L_0 是基体材料的弹性模量张量。B_r 的各分量见文献[3]。

假设颗粒为弹性材料, 而基体为弹塑性材料, 满足 Ludwik 公式

$$\sigma_e = \sigma_y + h(\epsilon_e^p)^n \tag{4}$$

其中, σ_y、h 和 n 分别表示基体的屈服应力、强化模量和幂硬化指数。σ_e 和 ϵ_e^p 是基体的等效应力和塑性等效应变

$$\sigma_e = \left(\frac{3}{2}\sigma_{ij}'\sigma_{ij}'\right)^{1/2}, \quad \epsilon_e^p = \left(\frac{2}{3}\epsilon_{ij}^p\epsilon_{ij}^p\right)^{1/2} \tag{5}$$

单调荷载作用下基体的割线杨氏模量和割线泊松比为

$$E_0^s = \left(\frac{1}{E_0}+\frac{\epsilon_e^p}{\sigma_e}\right)^{-1}, \quad \nu_0^s = \frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\nu_0\right)\frac{E_0^s}{E_0} \tag{6}$$

复合材料的割线模量张量记作 L^s, 仍可用(2)式表示, 只是要将其中基体弹性模量 L_0 换成割线模量 L_0^s。系统的弹塑性本构关系为

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\bar{\epsilon} = (L^s)^{-1}\bar{\sigma} \tag{7}$$

注意基体的割线模量和泊松比不再是常量，而是与等效应力及塑性应变相互依赖的未知变化量，因此首先需求出等效应力。

将(5)式的第一式改写成

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{V_0}\left[\int_0 \frac{3}{2}\sigma_{ij}'(x)\sigma_{ij}'(x)\mathrm{d}V\right] \tag{8}$$

另一方面，复合材料的应变能密度等于各组分相应变能密度之和，即

$$\frac{1}{2}\bar{\sigma}_{ij}\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\sum_r \int_r \sigma_{ij}^{(r)}(x)\epsilon_{ij}^{(r)}(x)\mathrm{d}V \tag{9}$$

这里 V_r 是第 r 相体积，为第 r 相的应力和应变分量。将上式右端关于基体的一项分解为体积分量和偏分量，即

$$\int_0 \sigma_{ij}^{(0)}(x)\epsilon_{ij}^{(0)}(x)\mathrm{d}V = \frac{1}{9K_0}\int_0 (\sigma_{kk}^{(0)}(x))^2\mathrm{d}V + \frac{1}{2\mu_0^s}\int_0 \sigma_{ij}'^{(0)}(x)\sigma_{ij}'^{(0)}(x)\mathrm{d}V \tag{10}$$

上式与(9)式比较，再代回(10)式，最后得到

$$\sigma_e^2 = \frac{3\mu_0^s}{c_0}\left[\bar{\sigma}(L_s)^{-1}\bar{\sigma} - \sum_{r=1}^{3} c_r\bar{\sigma}^{(r)}(L_r)^{-1}\bar{\sigma}^{(r)} - c_0\frac{1}{9K_0}(\bar{\sigma}_{kk}^{(0)})^2\right] \tag{11}$$

其中各组分相平均应力可应用Mori-Tanaka 方法和Eshelby 理论经过一系列推导得到

$$\bar{\sigma}^{(r)} = L_0(I - S)[(L_r - L_0)S + L_0]^{-1}\left[(1 - c_4)I - \sum_{n=1}^{3} c_n B_n\right]^{-1}(I - S)^{-1}L_0^{-1}\bar{\sigma},$$

$$r = 0, 1, 2, 3 \tag{12}$$

1.3 界面损伤演化过程的概率统计理论

根据细观力学平均化理论，在均匀外力作用下所有颗粒的应力状态应相等，但显然所有颗粒不会同时开裂。为此引入Weibull 的概率统计学方程

$$P(\bar{\sigma}_{ij}^{(r)}) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\bar{\sigma}_{ij}^{(r)}}{S_0}\right)^m\right] \qquad (r = 1, 2, 3) \tag{13}$$

其中 $\bar{\sigma}_{ij}^{(r)}$ 是颗粒的应力分量，ij 取 11, 22 和 33 分别表示第 r 相颗粒沿 1, 2 或 3 方向的应力。S_0 和 m 是尺寸和形状参数，与界面强度的关系为

$$\bar{\sigma}_s = S_0\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) \tag{14}$$

P 表示损伤颗粒的相对体积含量。应用上述理论可以求出在变形过程中 c_r 的变化。

2 数值计算

外荷载模式、界面强度和颗粒形状是对界面损伤有较大影响的几个重要因素，这里将分别加以讨论。选择碳化硅/铝复合材料，性能如下[7]:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{SiC 颗粒} & E_1 = 490\ \text{GPa}, & \nu_1 = 0.17 \\ \text{Al 基体} & E_0 = 68.3\ \text{GPa}, & \nu_0 = 0.33 \\ & \sigma_y = 250\ \text{MPa}, & h = 170\ \text{MPa}, \quad n = 0.55 \end{array}\right\} \tag{15}$$

2.1 界面强度对损伤过程的影响

选两组界面强度值及对应的尺寸、形状参数如下:

$$\left.\begin{array}{lll} \bar{\sigma}_s = \sigma_y, & S_0 = 1.09\sigma_y & m = 5 \\ \bar{\sigma}_s = 2\sigma_y, & S_0 = 2.18\sigma_y & m = 5 \end{array}\right\} \tag{16}$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

图 2 表示了两种荷载模式下材料在界面损伤过程中的弹塑性本构关系的变化情况。球状颗粒体积含量为 $c_1 = 0.2$, 图 2(a) 和 (b) 所对应的荷载分别为 $\bar{\sigma}_{22} = \bar{\sigma}_{33} = 0.75\bar{\sigma}_{11}$ 和 $\bar{\sigma}_{22} = \bar{\sigma}_{33} = 1.25\bar{\sigma}_{11}$。图 2(a) 的上图为两种界面损伤复合材料的应力-应变曲线(实线) 与无损材料和含孔洞材料(虚线) 的比较。由图可见, 在三向应力作用下, 两实曲线均起始于无损伤材料, 逐渐偏离直线, 向含孔洞材料曲线靠近。界面强度对损伤的影响十分明显, 代表 $\bar{\sigma}_s = \sigma_y$ 曲线的衰减速度比 $\bar{\sigma}_s = 2\sigma_y$ 曲线快的多。两曲线在弹性阶段就已表现出非线性特征。图 2(a) 下图是变形过程中颗粒体积含量的变化情况。可以清楚的看到损伤的演化过程。当 1 方向的应变等于 0.0024 时 $c_1 = 0$, 即所有的颗粒都已开裂。随变形继续增加, c_2 和 c_3 曲线下降, c_4 上升, 两类局部损伤的颗粒逐渐演化成均匀开裂颗粒。大约在 $\bar{\varepsilon}_{11} = 0.0044$ 时, c_4 不再增加, 这是应为在较大的 $\bar{\sigma}_{11}$ 作用下, 产生 2—3 方向的负向变形, 第一类损伤颗粒不再继续沿 2—3 方向开裂。这时系统中含有约 65% 的第一类局部损伤颗粒和 35% 均匀开裂颗粒, 直保持到变形的最后阶段。相比之下, 界面强度为 $\bar{\sigma}_s = 2\sigma_y$ 时损伤速度明显减慢。

图 2(b) 上图表示了荷载系数 $\beta = 1.25$ 时材料沿 2(或 3) 方向的应力-应变关系, 其变化趋势与图 2(a) 类似。下图为相应的颗粒损伤演化过程。变形的最后阶段, 在 $\bar{\sigma}_s = \sigma_y$ 情况下, 所有颗粒均已损伤, 大部分成为沿 2—3 平面方向开裂的第二类损伤颗粒, 并有部分继续开裂而成为孔洞。$\bar{\sigma}_s = 2\sigma_y$ 时损伤演化速度变慢。

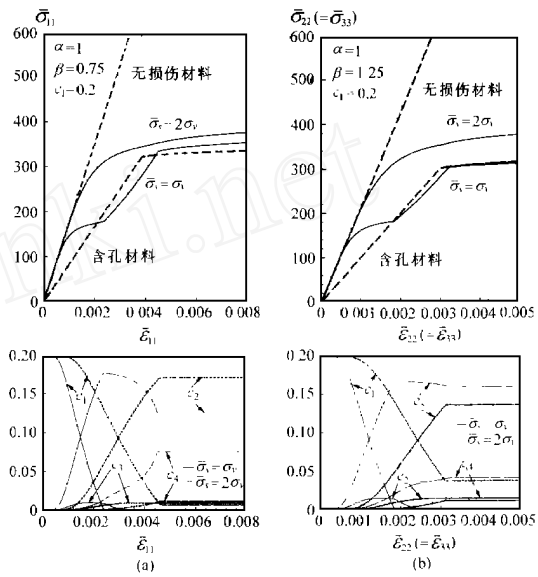

图 2　三向拉应力状态下界面强度对损伤材料应力-应变关系的影响

Fig. 2　Influence of interfacial strength on the stress-strain relation of the damaged composites under triaxial tension

2.2　颗粒形状对损伤过程的影响

图 3 和图 4 表示了颗粒形状对界面开裂过程的影响。界面强度为 $\bar{\sigma}_s = \sigma_y$, 初始颗粒体积含量仍取 $c_1 = 0.2$, 对两种荷载模式各取三种不同的颗粒形状。

图 3 表示 $\bar{\sigma}_{22} = \bar{\sigma}_{33} = 0.75\bar{\sigma}_{11}$, $\alpha = 0.2, 0.5, 1$ 的情况。下图表示随着变形的增加颗粒界面的损伤演化情况。由 c_1 图看到, 三种形状的完好颗粒体积含量以不同的速度由 0.2 降至 0, 既颗粒全部损伤, 球状颗粒损伤速度最快, 扁状的颗粒较慢。c_2 图表示, 对于 $\alpha = 1$ 和 0.5, 大部分颗粒界面首先沿 1 方向开裂。而 $\alpha = 0.2$ 的情况有些不同, 沿最大荷载方向与沿 2—3 平面方向开裂颗粒的含量的相差不大。说明扁状颗粒沿 2—3 方向的界面较薄弱。三种形状的变形最后阶段所产生的均匀损伤颗粒含量差不多。图 3 上图为损伤过程中系统沿 1 和 2(或 3) 方向的应力-应变曲线。左图表示, 在三向拉应力作用下, 虽然球状颗粒的损伤速度较快, 但仍表现出优于其它颗粒形状的性能。由右上图可见当 1 方向的荷载大于 2—3 方向时, 荷载按比例递增到一定程度会引起 2—3 方向反向应变。这时, 沿该方向的界面开裂即会终止, 但由于损伤的不可逆性, 损伤程度将会保持。

图 4 的荷载模式为 $\bar{\sigma}_{22} = \bar{\sigma}_{33} = 1.25\bar{\sigma}_{11}$, 三种颗粒形状为 $\alpha = 1, 2, 5$。由于 2—3 方向的荷载大于 1-方向, 由 c_r 曲线图可见大部分颗粒先沿 2—3 方向开裂(c_3), 同时另有少部分沿 1 方向开裂并随即完全裂开。c_4 曲线的最终值大于 c_2 的最大值, 这说明不仅是第一类损伤颗粒演化

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

成了孔洞, 在第二类损伤颗粒含量增加的过程中, 已有一部分相继均匀开裂。

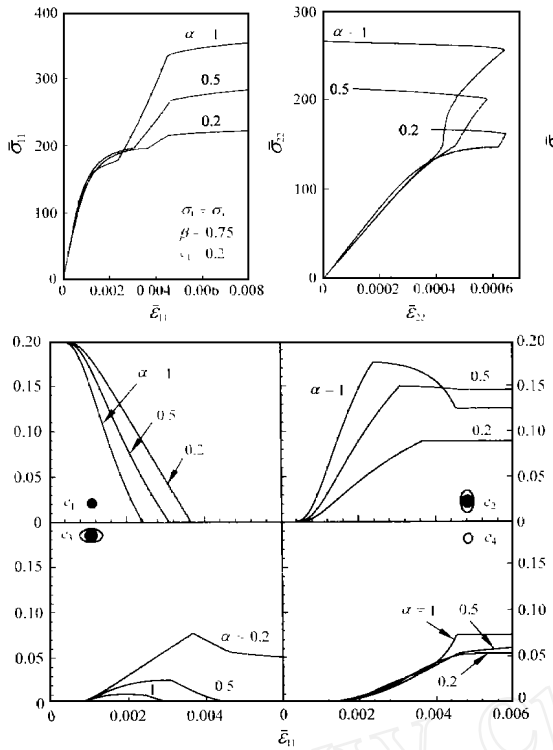

图 3 颗粒形状对损伤材料应力-应变关系的影响 (β= 0. 75)

Fig. 3 Influence of particle shape on the stress-strain relation of the damaged composites

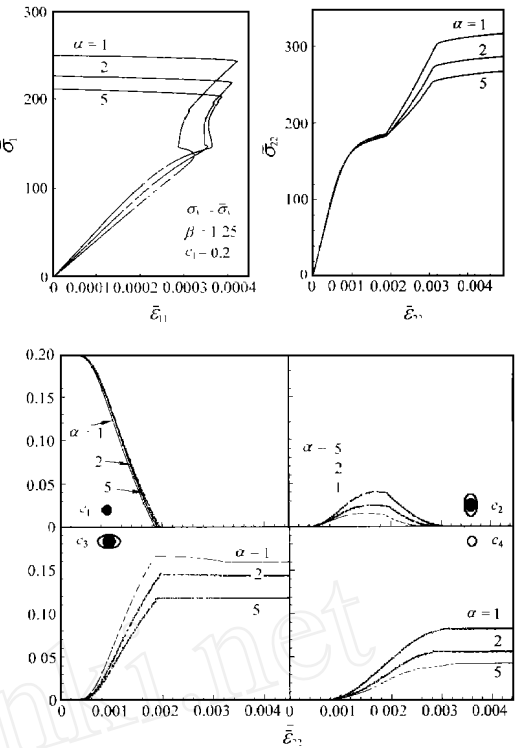

图 4 颗粒形状对损伤材料应力-应变关系的影响 (β= 1. 25)

Fig. 4 Influence of particle shape on the stress-strain relation of the damaged composites

2. 3 荷载模式对界面损伤程度的影响

荷载模式对损伤过程以及系统的最终损伤程度的影响十分显著。图 5 表示了三向拉伸荷载下, 荷载比例系数 β 对系统最终损伤程度(即损伤达稳定的状态)的影响。仅以球状颗粒为例, α= 1, 取 $\bar{\sigma}_s$= σ_y, c_1= 0. 2。可将曲线变化分成几段讨论。当 $\beta \leq$0. 4 时, 1 方向的应力远大于其他方向, 所有颗粒都只沿 1 方向开裂, 即 $c_2 \approx$ 0. 2, 其它 c_r= 0, 系统最终只含第一类局部损伤颗粒。当 0. 4$\leq \beta >$ 1, 系统在损伤的最后阶段含有第一类局部损伤颗粒和均匀损伤颗粒(孔洞)。孔洞的含量随 β 而增加。β= 1 时各向应力相等, 颗粒全部均匀开裂, c_4= 0. 2, 系统呈含微孔材料特性。$\beta >$ 1, 即 2—3 方向的应力大于 1 方向时, c_3 随 β 而增大, 系统最终成为含第二类损伤颗粒和孔洞的混杂体系。当 $\beta \geq$2, 所有颗粒界面又只沿 2—3 平面开裂, c_3= 0. 2, 而其它 c_r= 0。

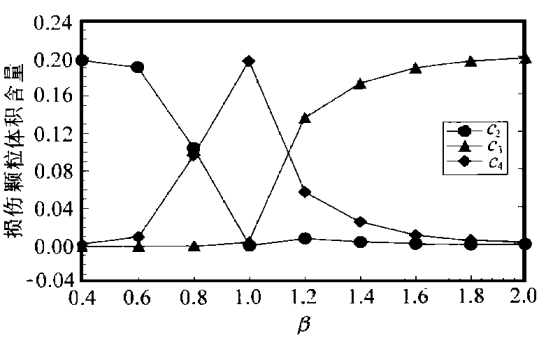

图 5 荷载模式对界面损伤程度的影响

Fig. 5 Influence of the load mode on the interfacial debonding

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

3 结　　论

应用细观力学理论和等效模拟颗粒方法探讨了颗粒增强复合材料界面损伤过程及其对材料本构关系的影响, 得出如下结论:

(1) 界面强度对损伤过程有显著影响。界面强度不同时, 颗粒损伤速度和损伤程度有很大差异。

(2) 界面强度对损伤过程有很大影响。不同形状的颗粒对荷载有不同响应, 从而导致损伤程度的差异。

(3) 荷载模式是决定材料损伤过程和最终损伤程度的关键因素。

参 考 文 献

1 Zhao Y H, Weng G J. Transversely isotropic moduli of two partially debonded composites. *Int J Solids Struct*, 1997, 34 (4): 493～507

2 Zhao Y H, Weng G J. A theory of inclusion debonding and its influence on the stress-strain relations of a ductile matrix composite. *Int J Damage Mech*, 1995, 4(2): 196～211

3 赵颖华. 界面损伤对颗粒增强复合材料弹性性能的影响. 复合材料学报, 1999, 16(1): 117～124

4 Mori T, Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall*, 1973, 21: 571～574

5 Walpole L J. On the overall elastic moduli of composite materials. *J Mech Phys Solids*, 1969, 17: 235～251

6 Eshelby J D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. London: *Proc Roy Soc*, 1957, A 241: 376～396

7 Zhao Y H, Weng G J. Plasticity of a two-phase composite with partially debonded inclusions, *Int J Plasticity*, 1996, 12 (6): 781～804

DAMAGE PROCESS AND ELASTOPLASTIC CONSTITUTIVE RELATIONS OF INTERFACE OF COMPOSITE MATERIALS

Zhao Yinghua　　Wang Jinzhong

(Civil Engineering Dept., Shenyang Architecture Engineering Institute, Shenyang 110015)

Abstract　The progressive interfacial debonding process and its influence on the elasto-plastic stress-strain relation of the particle-reinforced composites under triaxial tension were studied. Weibull's theory of statistics is used here to express the damage process. Secant moduli are applied when the system is beyond the elastic limit. Numerical analysis shows that the damage procedures depend greatly upon the loading mode, strength of the interfaces and the shape of the particles.

Key words　composite materials, interfacial damage, elasto-plastic property

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net