复合材料学报 第17卷 第3期 8月 2000年
ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA Vol. 17 No. 3 August 2000

文章编号: 1000-3851(2000)03-0120-04

层合板壳的概率有限元分析

边文凤[1], 朱福宝[2]
(1. 中国石油大学 机械系, 东营 257062; 2. 辽河油田 钻采院采油研究所, 盘锦 124010)

摘 要: 为研究复合材料壳体的某些随机性, 本文考虑了复合材料壳体的层角、层厚和材料常数的随机性。针对这一具体情况, 对应力-应变阵、刚阵和位移矢量等进行了台劳展开, 取其二次近似式, 应用二次摄动法, 求出响应的确定解、一次感度和二次感度, 然后由统计理论及可靠性理论, 求出响应的期望、方差、变异系数和可靠度等。以实现复合材料壳体的概率有限元分析。

关键词: 概率有限元; 复合材料; 层合板壳; 可靠性
中图分类号: O 242.2; TB 330.1 **文献标识码**: A

STOCHASTIC FINITE ELEMENTS ANALYSIS OF LAMINATED SHELLS

BIAN Wen-feng[1], ZHU Fu-bao[2]
(1. Department of Mechanic, University of Petroleum, Dongying 257062, China;
2. Drilling and Picking Oil Institute, Liaohe Oilfield, Panjin 124010, China)

Abstract: In order to study some stochastic character problems of the composite laminated shell, the author has considered the stochastic characters including the ply angle, ply thickness and material constant, and in Taylor series, the expansions in Taylor series for stress-strain matrix, stiffness matrix and displacement vector have been employed. Taking from their quadric approximate formulae, the definite solution, primary sensitivity and secondary sensitivity of the response are obtained by means of the quadric perturbation scheme. Then according to the statistical theory and reliability theory, the expected value, variance, coefficient of variation and reliability are given, so as to realize the stochastic finite element analysis of laminate shells.

Key words: stochastic finite element; composite material; laminate shell; reliability

复合材料层合结构在制造过程中, 其铺层角度、层厚和各单层材料的力学特性都不可避免的存在着一定的离散性, 这就使得复合材料结构的强度、稳定性等承载能力也都存在着一定的离散性, 为了深入了解由于结构和材料参数的离散性对复合材料结构力学性能的影响, 国内外一些学者提出了概率有限元分析方法。如 Q. Van Vinckenray 和 W. P. De Wilde 等人提出了以 Monte-Carlo 技术为基础的概率有限元法。作者采用台劳展开和摄动法得到了概率有限元列式, 然后采用统计和可靠性理论计算结构响应的期望值、一次感度和二次感度。为复合材料结构可靠度分析提供了一种工程方法。谷周一和中桐滋等人应用此法研究了层角和层厚的离散性对结构响应的影响。在此基础上, 本文在考虑层角、层厚离散性的同时, 还考虑了各单层材料的力学特性的离散性对复合材料结构力学性能的影响。

1 概率有限元基本方程

有关复合材料壳体的概率有限元的基本方程如下:

1) 壳体中面内力及变形间的关系

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{I}, B^{I} \\ B^{I}, D^{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon \\ \chi \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \epsilon \\ \chi \end{Bmatrix}$$

为了形式上的统一, 将上式记为如下形式:

$$\{\sigma\} = [C]\{\epsilon\} \tag{1}$$

当 $ij = 11, 22, 66, 12$ 时

$$(A^{I}_{ij}, B^{I}_{ij}, D^{I}_{ij}) =$$

收稿日期: 1998-11-02; 收修改稿日期: 1999-04-01
作者简介: 边文凤(1963), 女, 硕士, 副教授, 主要从事固体力学等方面的研究。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\sum_{k=1}^{N} Q_{ij}^{(\omega)} \frac{t}{N}\left(1, t_k + \frac{t}{2N}, t_k^2 + \frac{t t_k}{N} + \frac{t^2}{3N^2}\right)$$

当 $ij = 16, 26$ 时

$$(A_{ij}^{\mathrm{I}}, B_{ij}^{\mathrm{I}}, D_{ij}^{\mathrm{I}}) = \sum_{k=1}^{N} Q_{ij}^{(\omega)} \frac{t^2}{4N^2}\left(0, 1, 2t_k + \frac{t}{N}\right)$$

2) 单元刚阵

$$[K] = \int_V [B][C][B]\mathrm{d}V \tag{2}$$

3) 总体平衡方程

$$[K]\{u\} = \{F\} \tag{3}$$

对于复合材料板壳, 其材料的性能参数无论是从测试而得还是从计算而得, 都存在着一定的误差, 而且由于工艺等方面的原因, 层厚和层角等也会产生波动。因此, 材料的性能参数、层厚和层角都可视为随机变量。设第 k 层(如图 1)的层角和层厚分别为

$$\theta_k = \bar{\theta}_k + \alpha_k \tag{4}$$

$$t_k = \bar{t}_k(1 + \beta_k) \tag{5}$$

式中: $\bar{\theta}$ 与 $\bar{t}$ 是常量; α 与 β 是期望为零的随机变量。

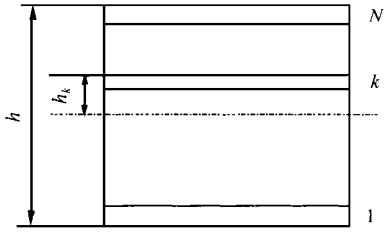

图 1 层壳示意图

Fig. 1 Schematic diagram of laminate shell

对于材料的性能参数, 由于泊松比的波动较微小, 对响应影响不大, 故可以只将弹性模量 E_L, E_T, G_{LT} 视为随机变量。这样可以避免随机变量的除法运算。设: $E_L = \bar{E}_L + \gamma_1$, $E_T = \bar{E}_T + \gamma_2$, $G_{LT} = \bar{G}_{LT} + \gamma_3$, 现将随机变量统一记为 ξ, 当 $1 \le k \le 3$ 时, $\xi_k = \gamma_i$; 当 $3 < k \le (N+3)$ 时; $\xi_k = \alpha_n$; 当 $(N+4) \le k \le (2N+3)$ 时, $\xi_k = \beta_n$; 设 $M = (N+3)$。由于只将 E、θ 及 t 视为随机变量, 所以, 相对于 ξ 而言, $[B]$ 是不变的常量, 而 $[C]$ 和 $[K]$ 及 $[u]$ 则均为随机变量。现将 $[C]$ 在零点处对 ξ 做台劳展开, 并舍去二次以上的高级微量, 得

$$[C] = [\bar{C}] + \sum_{k=1}^{M} [C_k^{\mathrm{I}}]\xi_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} [C_{kl}^{\mathrm{II}}]\xi_k\xi_l \tag{6}$$

其中

$$[C_k^{\mathrm{I}}] = \frac{\partial}{\partial \xi_k}[C]\Big|_{\xi=0}$$

$$[C_{kl}^{\mathrm{II}}] = \frac{\partial}{\partial \xi_k \partial \xi_l}[C]\Big|_{\xi=0}$$

依此, 将单元刚阵叠加, 便组成含随机变量的总体刚度矩阵, 并做同样的台劳展开, 得

$$[K] = [\bar{K}] + \sum_{k=1}^{M} [K_k^{\mathrm{I}}]\xi_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} [K_{kl}^{\mathrm{II}}]\xi_k\xi_l \tag{7}$$

同时, 将位移也表示成 ξ 的二次多项式

$$[u] = [\bar{u}] + \sum_{k=1}^{M} [u_k^{\mathrm{I}}]\xi_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} [u_{kl}^{\mathrm{II}}]\xi_k\xi_l \tag{8}$$

将式(7)、式(8)代入式(3), 并引入边界条件, 然后应用二次摄动法进行求解。因平衡方程对任意的 ξ 都是成立的, 所以, 方程两侧 ξ 的同次项系数应该相等, 即:

$$[\bar{K}]\{\bar{u}\} = \{F\} \tag{9}$$

$$[\bar{K}]\{u_k^{\mathrm{I}}\} + [K_k^{\mathrm{I}}]\{\bar{u}\} = 0 \tag{10}$$

$$[\bar{K}]\{u_{kl}^{\mathrm{II}}\} + [K_k^{\mathrm{I}}]\{u_l^{\mathrm{I}}\} + [K_l^{\mathrm{I}}]\{u_k^{\mathrm{I}}\} + [K_{kl}^{\mathrm{II}}]\{\bar{u}\} = 0 \tag{11}$$

解方程(9)、(10)、(11)便得出位移的确定解 $\{\bar{u}\}$ 和一次感度 $\{u_k^{\mathrm{I}}\}$ 及二次感度 $\{u_{kl}^{\mathrm{II}}\}$。

$$\{\bar{u}\} = [\bar{K}]^{-1}\{F\}$$

$$\{u_k^{\mathrm{I}}\} = [\bar{K}]^{-1}(-[K_k^{\mathrm{I}}]\{\bar{u}\})$$

$$\{u_{kl}^{\mathrm{II}}\} = [\bar{K}]^{-1}(-[K_k^{\mathrm{I}}]\{u_l^{\mathrm{I}}\} - [K_l^{\mathrm{I}}]\{u_k^{\mathrm{I}}\} - [K_{kl}^{\mathrm{II}}]\{\bar{u}\})$$

由于几何阵 $[B]$ 是确定的, 所以, 可以通过下式求出应变的确定解 $\{\bar{\epsilon}\}$ 和一次感度 $\{\epsilon_k^{\mathrm{I}}\}$ 及二次感度 $\{\epsilon_{kl}^{\mathrm{II}}\}$。

$$\{\bar{\epsilon}\} = [B]\{\bar{u}\}$$

$$\{\epsilon_k^{\mathrm{I}}\} = [B]\{u_k^{\mathrm{I}}\}$$

$$\{\epsilon_{kl}^{\mathrm{II}}\} = [B]\{u_{kl}^{\mathrm{II}}\}$$

同理, 可以通过式(1)和式(6)求出壳体中面应力的确定解 $\{\bar{\sigma}\}$ 和一次感度 $\{\sigma_k^{\mathrm{I}}\}$ 及二次感度 $\{\sigma_{kl}^{\mathrm{II}}\}$。

$$\{\bar{\sigma}\} = [\bar{C}]\{\bar{\epsilon}\}$$

$$\{\sigma_k^{\mathrm{I}}\} = [\bar{C}]\{\epsilon_k^{\mathrm{I}}\} + [C_k^{\mathrm{I}}]\{\bar{\epsilon}\}$$

$$\{\sigma_{kl}^{\mathrm{II}}\} = [\bar{C}]\{\epsilon_{kl}^{\mathrm{II}}\} + [C_k^{\mathrm{I}}]\{\epsilon_l^{\mathrm{I}}\} + [C_l^{\mathrm{I}}]\{\epsilon_k^{\mathrm{I}}\} + [C_{kl}^{\mathrm{II}}]\{\bar{\epsilon}\}$$

至此, 可以得到壳体中面的各种响应量, 然而, 人们更关心的是壳体各层的应力。下面就来讨论随机形式的层内应力。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

2　壳体层内应变和应力

2 1　层内应变

根据克希霍夫-拉夫假设, 在距离中面为 z (图 2) 的面内, 其应变 ϵ 用中面的应变 ϵ_0 和曲率来表示。

$$\epsilon = \epsilon_0 + z\chi$$

将应变-节点位移阵 $[B]$ 表示成两部分: $[B_\epsilon]$ 和 $[B_\chi]$, 那么, 第 m 层的面内应变 $\epsilon(z_m)$ 与节点位移阵的关系为

$$\begin{aligned}\epsilon(z_m) &= [B_\epsilon]\{u\} + (\overline{z_m} + \gamma_m)[B_\chi]\{u\} = \\ &([B_\epsilon] + \overline{z_m}[B_\chi])\{u\} + \gamma_m[B_\chi]\{u\} = \\ &[G]\{u\} + \sum_{k=1}^{M}[H_k^{\mathrm{I}}]\{u\}\xi_k \end{aligned} \tag{12}$$

式中

$$[G] = [B_\epsilon] + \overline{z_m}[B_\chi]$$

$$[H_k^{\mathrm{I}}] = \begin{cases}[\mathbf{0}], & k \neq N + m + 3 \\ [B_\chi], & k = N + m + 3\end{cases}$$

将式(8) 代入式(12), 并略去 ξ 的二次以上的高阶微量, 得

$$\{\epsilon(z_m)\} = [G]\{\overline{u}\} + \sum_{k=1}^{M}([G]\{u_k^{\mathrm{I}}\} + [H_k^{\mathrm{I}}]\{\overline{u}\})\xi_k$$

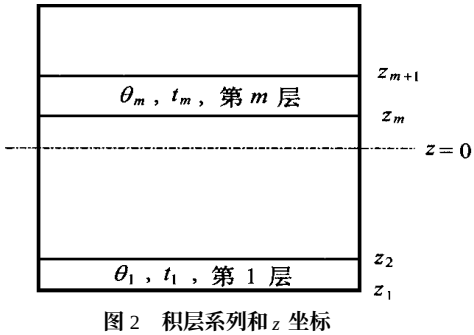

图 2　积层系列和 z 坐标

Fig. 2　Laminate plates set and z coordinate

2 2　层内应力

在运用以上方法求出层内应变分布之后, 就可以根据应变-应力关系求得层内应力分布了。因为任意一层的应力-应变阵均与缠绕角有关, 故也需将 $[Q]_m$ 展成 ξ 的二次多项式

$$[Q]_m = [\overline{Q}]_m + \sum_{k=1}^{N+3}[Q_k^{\mathrm{I}}]_m\xi_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N+3}\sum_{l=1}^{N+3}[Q_{kl}^{\mathrm{II}}]_m\xi_k\xi_l \tag{13}$$

式中

$$[Q_k^{\mathrm{I}}]_m = \begin{cases}\dfrac{\partial[Q]_m}{\partial\xi_k}, & (k = m) \\ 0, & (k \neq m)\end{cases}$$

$$[Q_{kl}^{\mathrm{II}}]_m = \begin{cases}\dfrac{\partial^2[Q]_m}{\partial\xi_k\partial\xi_l}, & (k = l = m) \\ 0, & (k \neq m, l \neq m)\end{cases}$$

因此, 与应变对应的应力就可以表示为

$$[\sigma]_m = [Q]_m\{\epsilon\}_m \tag{14}$$

$\{\sigma\}$ 同样可以展成为 ξ 的二次多项式

$$[\sigma]_m = [\overline{\sigma}]_m + \sum_{k=1}^{M}[\sigma_k^{\mathrm{I}}]_m\xi_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}[\sigma_{kl}^{\mathrm{II}}]_m\xi_k\xi_l \tag{15}$$

将式(12) 及式(13) 代入式(14) 并与式(15) 比较, 便可以得出第 m 层下面的应力的确定值及一次感度和二次感度

$$\begin{aligned}\{\sigma\}_m &= [\overline{Q}]_m[G]\{\overline{u}\} \\ [\sigma_k^{\mathrm{I}}]_m &= [\overline{Q}]_m[G]\{u_k^{\mathrm{I}}\} + ([\overline{Q}]_m[H_k^{\mathrm{I}}] + [Q_k^{\mathrm{I}}]_m[G])\{\overline{u}\} \\ \{\sigma_{kl}^{\mathrm{II}}\}_m &= [\overline{Q}]_m[G]\{u_{kl}^{\mathrm{II}}\} + ([\overline{Q}]_m[H_k^{\mathrm{I}}] + [Q_k^{\mathrm{I}}]_m[G])\{u_l^{\mathrm{I}}\} + \\ &\quad ([\overline{Q}]_m[H_l^{\mathrm{I}}] + [Q_l^{\mathrm{I}}]_m[G])\{u_k^{\mathrm{I}}\} + \\ &\quad ([Q_k^{\mathrm{I}}]_m[H_l^{\mathrm{I}}] + [Q_l^{\mathrm{I}}]_m[H_k^{\mathrm{I}}] + [Q_{kl}^{\mathrm{II}}]_m[G])\{\overline{u}\}\end{aligned}$$

这样, 就可以求得结构内任意一点的应力。欲知这个结构的强度到底如何, 还要对上述随机变量进行统计分析。

2　响应量的统计分析

设一随机变量为 X, 根据台劳展开及二次近似法, 它可展开成如下形式

$$X = \overline{X} + \sum_{k=1}^{M}X_k^{\mathrm{I}}\xi_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}X_{kl}^{\mathrm{II}}\xi_k\xi_l$$

则, X 的期望值和方差分别为

$$E[X] = \overline{X} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}X_{kl}^{\mathrm{II}}E[\xi_k\xi_l]$$

$$\begin{aligned}V_{\omega\gamma}[X] &= \sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}X_k^{\mathrm{I}}X_l^{\mathrm{I}}E[\xi_k\xi_l] + \\ &\quad \sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\sum_{p=1}^{M}X_p^{\mathrm{I}}X_k^{\mathrm{I}}X_l^{\mathrm{I}}E[\xi_k\xi_l\xi_p] + \\ &\quad \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\sum_{p=1}^{M}\sum_{q=1}^{M}X_{kl}^{\mathrm{II}}X_{pq}^{\mathrm{II}}(E[\xi_k\xi_l\xi_p\xi_q] - \\ &\quad E[\xi_k\xi_l]E[\xi_p\xi_q])\end{aligned}$$

上式等号右边的 $E[\cdot]$ 表示随机变量的矩。随机变量的离散程度可以用变异系数来考察, 变异系数 V = (标准差/期望值)。

4　算　例

四边铰支矩形层板 ($a \times b \times h$ = 100 cm × 200 cm

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

×0.018 cm), 承受垂直于板面的压力: q = 0.2 N/cm^2, E_L = 4.08×10^6 N/cm^2, E_T = 1.78×10^6 N/cm^2, G_{LT} = 0.27×10^6 N/cm^2, μ_{LT} = 0.266, 各层层角及其厚度的期望值分别为

$$\theta_1 = \theta_3 = \theta_5 = 30°$$

$$\theta_2 = \theta_4 = 120°$$

$$t_1 = t_2 = t_3/2 = t_4 = t_5 = 0.003\ \text{cm}$$

有限元单元及节点编号如图 3。图 4 是板中心点 P (即 47 号节点) 的挠度与积层角 θ_1 的关系图, 图 5 是 P 点挠度与层厚 t_3 之间的关系图。

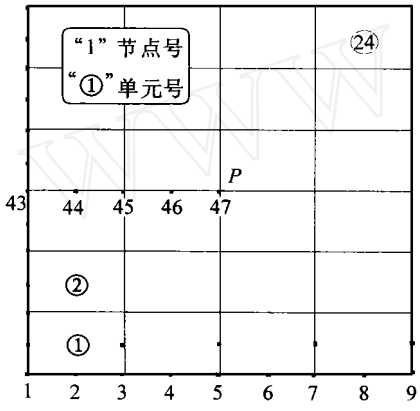

图 3 层合板网格图

Fig. 3 Laminate plate elements

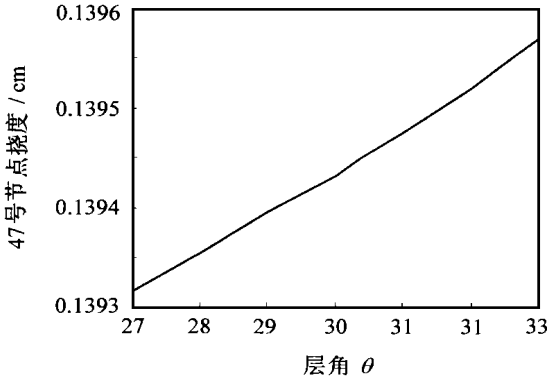

图 4 层角挠度图

Fig. 4 Ply angle deflection

图 6 为 $b/2$= 100 cm 线上各个点的与层厚 t_3 相关的挠度的方差曲线, 当 t_3 变化时, P 点挠度的均值为 0.14152 cm, 变异系数为 4.8%, 当 E_L 波动时, 24 号单元中层上面应力 σ_x 的期望为 -6.24 N/cm^2, 变异系数为: 9.94%。

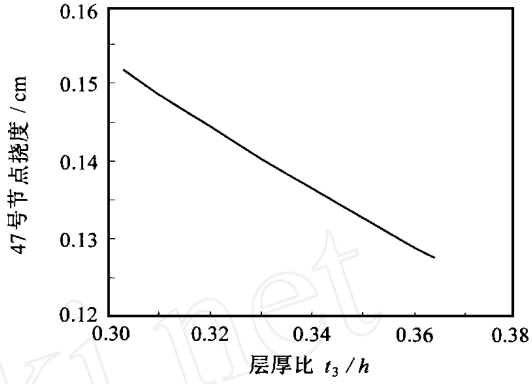

图 5 层厚比挠度图

Fig. 5 Ply thickness ratio deflection

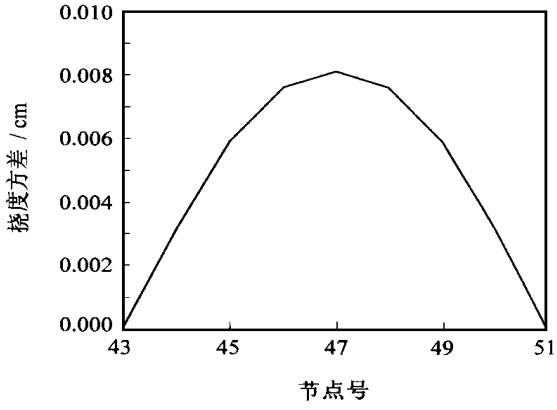

图 6 挠度方差图

Fig. 6 Deflection variance

5 结 束 语

由上可见, 层厚的波动、弹性常数的变化等, 都会使结构的响应受到很大影响。因此, 通过概率有限元, 对这些影响进行详细分析, 对材料和结构的双重优化设计是很有帮助的。

参考文献:

[1] 吴世伟. 结构可靠度分析[M]. 北京: 人民交通出版社, 1990.

[2] 谷周一, 高[illegible]秀行, 中桐滋, 等. 纤维强化形复合材积层平板の变形と应力の确率有限要素分析[J]. 日本机械学会论文集A, 1985, (5): 1504-1509.

[3] 久田俊明. 弹塑性确率有限要素法の基础式[J]. 日本机械学会论文集A, 1990, (4): 966-970.

[4] 边文凤, 王殿富. 复合材料结构非线性分析软件功用简介[J]. 固体火箭技术, 1998, (1): 60-66.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net