第 16 卷 第 2 期 复 合 材 料 学 报 Vol 16 No. 2
1999 年 5 月 ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA May 1999

有限变形下含非完美界面复合材料有效模量的界限

童金章 关凌云[1] 南策文[2] 符晶华[3]
(武汉工业大学 工程力学系, 武汉 430070) ([1]武汉工业大学 玻璃钢厂)
([2]武汉工业大学 材料复合新技术国家重点实验室) ([3]湖北省建筑科学研究设计院, 武汉 430071)

摘 要 导出了有限变形下含非完美界面两相复合材料的上下界限。在微小变形下, 所导出的界限还原成已知的线性情况下的相应结果。数值上预示了非完美界面特性、有限变形对复合材料有效模量的影响规律, 给出了与实际相符合的结果。

关键词 有限变形, 非完美界面, 复合材料, 有效模量
中图分类号 TB301; O343

复合材料中界面上总是或多或少地存在缺陷, 它直接影响着复合材料的宏观性能, 抑或起决定作用。因此研究界面缺陷对复合材料宏观性能的影响是十分重要的。但不幸的是界面详情很难确知[1~2], 这使得文献中有关复合材料宏观性能的研究大都基于完美界面的假定。

最近, Hashin, Achenbach 等学者所展开的非完美界面的研究工作, 给学术界带来了许多耳目一新的结果。Hashin[3]证明了即使在球形夹杂内, 场量也是非均匀的。这与经典的在椭球(从而球)形夹杂内场量是均匀的 Eshelby 结果[4]完全不同。Achenbach[5]则研究了界面非完美结合对纤维复合材料宏观行为的直接影响。Hashin 的另一研究[6]表明复合材料有效模量的界限还取决于复杂的界面积分。

国内也正在开展非完美界面对复合材料宏观性能影响的研究[7~12]。茅人杰等[7]应用界面位移弹簧模型理论, 对非完美界面结合的玻纤/环氧复合材料的力学性能进行了实验研究。最近, 我们[11]导出了大变形下含非完美界面两相弹性复合材料的总势能和总余能泛函表达式, 接着证明了[12]对这两个泛函所存在的驻值原理。

本文中, 我们将直接引用文献[11]中的泛函表达式和文献[12]中的驻值原理, 导出有限变形下含非完美界面两相弹性复合材料有效模量上、下界限, 这些界限提出了对小变形相应结果的修正。这对于研究金属基、树脂基等复合材料在大变形下的宏观性能参数具有重要意义。文末给出了算例。

1 驻值原理

设有两相弹性复合材料为统计上均匀和各向同性的, 体积为 V, 外边界为 $S = S_u + S_T$, 基质为1, 夹杂为2, 相体积分别为 V_1、V_2, 从而体积分数相应为 $v_1 = V_1/V$, $v_2 = V_2/V$。在有限变形

收修改稿、初稿日期: 1998-05-27, 1997-05-16。国家杰出青年科学基金资助项目

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

下, 该复合材料体的定解问题提法为

平衡方程　$\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})_{,j}+F_k=0$　(1)

几何方程　$\epsilon_{ij}=u_{(i,j)}+(1/2)u_{k,i}u_{k,j}$　(2)

本构方程　$\sigma_{ij}=C_{ijkl}\epsilon_{kl}$,　$\epsilon_{ij}=S_{ijkl}\sigma_{kl}$　(3)

面力边值条件　$T_k=\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})n_j=\overline{T}_k$　(在 S_T 上)　(4)

位移边值条件　$u_k=\overline{u}_k$　(在 S_u 上)　(5)

界面 S_{12} 上　$T_i^1=T_i^2=T_i$,　$[u_i]=u_i^1-u_i^2$,　$T_i=D_{ij}[u_j]$,　$[u_i]=R_{ij}T_j$　(6)

式中: σ_{ij}, ϵ_{ij}, $u_i(u_k)$, $T_i(T_k)$, F_k 分别表示应力、应变、位移、面力和体力分量; C_{ijkl} 和 S_{ijkl} 分别为组分相的模量和柔量; D_{ij} 和 R_{ij} 是界面参数; $(\cdot,\cdot)$ 为对称化运算子; 带"-"的量为已知的, [ ] 表示跳跃量。

显见, 直接求解上述定解问题极为不易。因此我们转而求助于变分原理。为了便于求出复合材料的有效模量, 通常的做法是将边值条件特殊化为

$$u_i(s)=\epsilon_{ij}^0x_j,\qquad T_i(s)=\sigma_{ij}^0n_j \tag{7, 8}$$

式中, 上标"0"为已知量。因此, 当分别选取满足式(7)的可能位移场 $u_i(x)$ 和满足式(8)的可能应力场 $\sigma_{ij}(x)$ 时, 则相应的总势能泛函和总余能泛函分别为(略去体力)

$$U^\epsilon=\frac{1}{2}\int C_{ijkl}\tilde{\epsilon}_{ij}\tilde{\epsilon}_{kl}\,\mathrm{d}v+\frac{1}{2}\int_{12}D_{ij}[\tilde{u}_i][\tilde{u}_j]\mathrm{d}s \tag{9}$$

$$U^\sigma=\frac{1}{2}\int(S_{ijkl}\tilde{\sigma}_{ij}\tilde{\sigma}_{kl}+\tilde{u}_{k,i}\tilde{u}_{k,j}\tilde{\sigma}_{ij})\,\mathrm{d}v+\frac{1}{2}\int_{12}R_{ij}\tilde{T}_i\tilde{T}_j\mathrm{d}s \tag{10}$$

现设 $u_i(x)$ 和 $\sigma_{ij}(x)$ 分别为在边值条件(7)和(8)下的真解, 则 U^ϵ 和 U^σ 分别在相应的真解处取得其驻值[12], 为

$$U^\epsilon\geq U_0^\epsilon\quad,\qquad U^\sigma\geq U_0^\sigma \tag{11, 12}$$

式中, 下标"0"为驻值, 且有

$$U_0^\epsilon=\frac{1}{2}\epsilon_{ij}^0C_{ijkl}^*\epsilon_{kl}^0V\ ,\ U_0^\sigma=\frac{1}{2}\sigma_{ij}^0S_{ijkl}^*\sigma_{kl}^0V \tag{13, 14}$$

上两式中,"*"为复合材料的有效量。式(13)等号右边的量为复合材料体的总势能, 式(14)等号右端的量为复合材料体的总余能。

2　有效模量 C^* 的上下限

为了求出式(6)描述的界面具位移跳跃量两相弹性复合材料有效模量的上、下界限, 特构造可能位移场为

$$u_i(x)=\epsilon_{ij}^0x_j\qquad(\text{在 }V_1\text{ 内})\tag{15}$$

$$u_i(x)=\epsilon_{ij}^0x_j+\beta_{ij}y_j^m\qquad(\text{在 }V_2\text{ 的第 }m\text{ 个子域内})\tag{16}$$

在得到式(15)时已假定复合材料的整个外边界位于基相1内, 这种假定对稀浓度复合材料尤为合适; 式(16)中的 β_{ij} 为二阶对称张量, y_j^m 为坐标系 $\{y_j, j=1,2,3\}$ 中的坐标, 该坐标系是选取第 m 个夹杂的几何中心为原点的。

显见式(15)满足条件(7), 相应的总势能泛函为[11]

$$U^\epsilon=\frac{V_1}{2}\{\underline{9K_1\epsilon^{0^2}+2G_1e_{ij}e_{ij}}+9K_1\epsilon^{0^3}+2G_1e_{ij}e_{mi}e_{mj}+(3K_1+4G_1)\epsilon^0e_{ij}e_{ij}+\frac{1}{4}[9K_1\epsilon^{0^4}+$$
$$(K_1-\frac{2}{3}G_1)e_{ij}e_{ij}e_{kl}e_{kl}+2G_1e_{ij}e_{ik}e_{mj}e_{mk}+2(3K_1+4G_1)\epsilon^{0^2}e_{ij}e_{ij}+8G_1\epsilon^0e_{ij}e_{ni}e_{nj}]\}+\frac{V_2}{2}$$
$$\{\underline{9K_2(\epsilon^0+\beta)^2+2G_2(e_{ij}+b_{ij})(e_{ij}+b_{ij})}+9K_2(\epsilon^0+\beta)^3+2G_2(e_{ij}+b_{ij})(e_{mi}+b_{mi})$$
$$(e_{mj}+b_{mj})+(3K_2+4G_2)(\epsilon^0+\beta)(e_{ij}+b_{ij})(e_{ij}+b_{ij})+\frac{1}{4}[9K_2(\epsilon^0+\beta)^4+$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$(K_2 - \frac{2}{3}G_2)(e_{ij} + b_{ij})(e_{ij} + b_{ij})(e_{kl} + b_{kl})(e_{kl} + b_{kl}) + 2G_2(e_{mk} + b_{mk})(e_{ml} + b_{ml})(e_{nk} + b_{nk})(e_{nl} + b_{nl}) + 2(3K_2 + 4G_2)(\epsilon^0 + \beta)^2(e_{ij} + b_{ij})(e_{ij} + b_{ij}) + 8G_2(\epsilon^0 + \beta)(e_{ij} + b_{ij})(e_{ni} + b_{ni})(e_{nj} + b_{nj})]\} + \frac{V}{2}(9P^{(1)}\beta^2 + 2P^{(2)}b_{ij}b_{ij}) \tag{17}$$

上式中: K、G_i ($i = 1, 2$) 分别为第1、2相的体积模量和剪切模量, $P^{(1)}$ 和 $P^{(2)}$ 是由界面几何形状和界面参数所共同确定的标量, 我们定义为界面几何量。在得到式(17)时, 用到下列二式:

$$\epsilon_{ij}^0 = \epsilon^0\delta_{ij} + e_{ij},\quad \epsilon^0 = (1/3)\epsilon_{kk} \tag{18}$$

$$\beta_{ij} = \beta\delta_{ij} + b_{ij},\quad \beta = (1/3)\beta_{nm} \tag{19}$$

由式(17)可见, 其中画线的三项之和即为小应变下的相应势能泛函, 其余未画线的则是大应变所提出的修正项。

由于式(17)相当冗长, 完全保留它的每一项将使后面的运算过于复杂。为简化后面的计算, 又不失 U^ϵ 的主要组成项, 考虑到剪切应变通常比正应变大, 且无论正应变还是剪应变, 即使在有限变形下其量值也都远小于1, 因此我们略去剪应变三次幂及其以上的那些项, 从而将 U^ϵ 表为

$$U^\epsilon = \frac{V_1}{2}\{9K_1\epsilon^{0^2} + 2G_1e_{ij}e_{ij} + 9K_1\epsilon^{0^3} + (3K_1 + 4G_1)\epsilon^0e_{ij}e_{ij} + \frac{1}{4}[9K_1\epsilon^{0^4} + 2(3K_1 + 4G_1)\epsilon^{0^2}e_{ij}e_{ij}]\} + \frac{V_2}{2}\{9K_2(\epsilon^0 + \beta)^2 + 2G_2(e_{ij} + b_{ij})(e_{ij} + b_{ij}) + 9K_2(\epsilon^0 + \beta)^3 + (3K_2 + 4G_2)(\epsilon^0 + \beta)(e_{ij} + b_{ij})(e_{ij} + b_{ij}) + \frac{1}{4}[9K_2(\epsilon^0 + \beta)^4 + 2(3K_2 + 4G_2)(\epsilon^0 + \beta)^2(e_{ij} + b_{ij})(e_{ij} + b_{ij})]\} + \frac{V}{2}(9P^{(1)}\beta^2 + 2P^{(2)}b_{ij}b_{ij}) \tag{20}$$

根据式(20)对 U^ϵ 关于 β 和 b_{ij} 进行极小化处理, 我们求得 U^ϵ 取驻值的控制方程组为

$$m^3 + 3m^2 + 2(1 + \frac{P^{(1)}}{K_2v_2})m + \frac{3K_2 + 4G_2}{9K_2}(m + 1)n^2 - \frac{2P^{(1)}\epsilon^0}{K_2v_2} = 0 \tag{21}$$

$$n(1 + \frac{P^{(2)}}{G_2v_2}) + \frac{3K_2 + 4G_2}{4G_2}(m + 2)mn - \frac{P^{(2)}e_{ij}}{G_2v_2} = 0 \tag{22}$$

其中已令

$$m = \epsilon^0 + \beta,\quad n = e_{ij} + b_{ij} \tag{23, 24}$$

为了求得 β 和 b_{ij}, 考虑到在小应变下有[8]

$$\beta = -\frac{K_2v_2\epsilon^0}{K_2v_2 + P^{(1)}},\quad b_{ij} = -\frac{G_2v_2e_{ij}}{G_2v_2 + P^{(2)}} \tag{25, 26}$$

因此可设

$$\beta = H\epsilon^0,\quad b_{ij} = Fe_{ij} \tag{27}$$

上式中 H 和 F 须由方程(21)和(22)解出。将式(27)代入(20), 则由式(11)和(13), 有

$$2U_0^\epsilon = 9V\epsilon^{0^2}\{K_1v_1(1 + \epsilon^0 + \frac{1}{4}\epsilon^{0^2} + \frac{3K_1 + 4G_1}{36K_1}e_{ij}e_{ij}) + K_2v_2(1 + H)^2[1 + (1 + H)\epsilon^0 + \frac{1}{4}(1 + H)^2\epsilon^{0^2} + \frac{3K_2 + 4G_2}{36K_2}(1 + F)^2e_{ij}e_{ij}] + P^{(1)}H^2\} + 2Ve_{ij}e_{ij}\{G_1v_1 + (1 + \frac{3K_1 + 4G_1}{2G_1}\epsilon^0 + \frac{3K_1 + 4G_1}{8G_1}\epsilon^{0^2}) + G_2v_2(1 + F)^2[1 + \frac{3K_2 + 4G_2}{2G_2}(1 + H)\epsilon^0 + \frac{3K_2 + 4G_2}{8G_2}(1 + H)^2\epsilon^{0^2} + P^{(2)}F^2\} = \epsilon_{ij}^0C_{ijkl}^*\epsilon_{kl}^0V = (9K_{(+)}^*\epsilon^{0^2} + 2G_{(+)}^*e_{ij}e_{ij})V \tag{28}$$

在得到上式最后一个等号时已对 C_{ijkl}^* 进行了 Hill 分解, 为

$$C_{ijkl}^* = (3K_{(+)}^*,\ 2G_{(+)}^*) \tag{29}$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

由式(28)即得非完美界面两相弹性复合材料有效体积模量和有效剪切模量的上限分别为

$$K^*_{(+)} = K_1 v_1 (1 + \epsilon^0 + \epsilon^{0^2} + \frac{3K_1 + 4G_1}{36K_1} e_{ij} e_{ij}) + K_2 v_2 (1 + H)^2 [1 + (1 + H)\epsilon^0 + \frac{1}{4}(1 + H)^2 \epsilon^{0^2} + \frac{3K_2 + 4G_2}{36K_2}(1 + F)^2 e_{ij} e_{ij}] + P^{(1)} H^2 \tag{30}$$

$$G^*_{(+)} = G_1 v_1 (1 + \frac{3K_1 + 4G_1}{2G_1}\epsilon^0 + \frac{3K_1 + 4G_1}{8G_1}\epsilon^{0^2}) + G_2 v_2 (1 + F)^2 [1 + \frac{3K_2 + 4G_2}{2G_2}(1 + H)\epsilon^0 + \frac{3K_2 + 4G_2}{8G_2}(1 + H)^2 \epsilon^{0^2}] + P^{(2)} F^2 \tag{31}$$

由式(30)和(31)可见, 当略去其中含 ϵ^0 和 e_{ij} 的那些项时, 则它们分别退化为小应变下的相应公式[6, 8]。这表明在有限变形下, 含非完美界面复合材料的 $K^*_{(+)}$ 和 $G^*_{(+)}$ 除与组分相的弹性模量、体积分数相关(这是小应变下已知的结果)外, 还与界面几何量 $P^{(1)}$、$P^{(2)}$ 相关, 以及与外边界上施加的应变张量的球部和偏部量相关。

为了用余能泛函驻值原理定出有效模量的下限, 选取可能应力场为

$$\sigma_{ij}(x) = \sigma^0_{ij} \tag{32}$$

显见式(32)满足(8), 以及在界面上保持连续。假定所选取的 $\sigma_{ij}(x)$ 与位移场是一对一的, 则求得总余能泛函为[11]

$$U^\sigma = \frac{V}{2}[(\frac{v_1}{K_1} + \frac{v_2}{K_2} + \frac{1}{Q^{(1)}})\sigma^{0^2} + (\frac{v_1}{2G_1} + \frac{v_2}{2G_2} + \frac{1}{2Q^{(2)}})S_{ij}S_{ij}] + \frac{V}{2}[v_1(\frac{1}{3K_1^2} + \frac{3}{2G_1^2})\sigma^{0^3} + \frac{v_1}{G_1}(\frac{1}{3K_1} + \frac{1}{4G_1})\sigma^0 S_{mn}S_{mn} + \frac{v_1}{4G_1^2}S_{mj}S_{nj}S_{mn}] + \frac{V}{2}[v_2(\frac{1}{3K_2^2} + \frac{3}{2G_2^2})\sigma^{0^3} + \frac{v_2}{G_2}(\frac{1}{3K_2} + \frac{1}{4G_2})\sigma^0 S_{mn}S_{mn} + \frac{v_2}{4G_2^2}S_{mj}S_{nj}S_{mn}] \tag{33}$$

式中, $Q^{(1)}$、$Q^{(2)}$ 也称为界面几何量, 因其须由界面几何形状和界面参数共同确定出。在上式中, 等号右端的第一项即是小应变下的总余能。与得到上限表式的作法一样, 我们略去式(33)中的应力偏量三次幂, 于是经整理得到

$$2U^\sigma = V\{\frac{v_1}{K_1} + \frac{v_2}{K_2} + \frac{1}{Q^{(1)}} + [v_1(\frac{1}{3K_1^2} + \frac{3}{2G_1^2}) + v_2(\frac{1}{3K_2^2} + \frac{3}{2G_2^2})]\sigma^0\}\sigma^{0^2} + V\{\frac{v_1}{2G_1} + \frac{v_2}{2G_2} + \frac{1}{2Q^{(2)}} + [\frac{v_1}{G_1}(\frac{1}{3K_1} + \frac{1}{4G_1}) + \frac{v_2}{G_2}(\frac{1}{3K_2} + \frac{1}{4G_2})]\sigma^0\}S_{ij}S_{ij} = (\frac{1}{K^*_{(-)}}\sigma^{0^2} + \frac{1}{2G^*_{(-)}}S_{ij}S_{ij})V \tag{34}$$

由式(34)即得所求有效体积模量和有效剪切模量的下限 $K^*_{(-)}$ 和 $G^*_{(-)}$ 分别为

$$\frac{1}{K^*_{(-)}} = (\frac{v_1}{K_1} + \frac{v_2}{K_2} + \frac{1}{Q^{(1)}}) + [v_1(\frac{1}{3K_1^2} + \frac{3}{2G_1^2}) + v_2(\frac{1}{3K_2^2} + \frac{3}{2G_2^2})]\sigma^0 \tag{35}$$

$$\frac{1}{G^*_{(-)}} = (\frac{v_1}{G_1} + \frac{v_2}{G_2} + \frac{1}{Q^{(2)}}) + [\frac{v_1}{G_1}(\frac{2}{3K_1} + \frac{1}{2G_1}) + \frac{v_2}{G_2}(\frac{2}{3K_2} + \frac{1}{2G_2})]\sigma^0 \tag{36}$$

显见上二式中的圆括号项即是小应变下非完美界面弹性复合材料的下限公式[6, 8]。方括号中的量即为有限变形下所提出的修正项。由此可见有限变形下这个有效模量的下限还受制于所施加的球应力张量。这些项在小变形中因线性化都被漏掉了。式(35)和(36)中的 $\frac{1}{Q^{(1)}}$, $\frac{1}{Q^{(2)}}$ 经计算分别为

$$\frac{1}{Q^{(1)}} = \frac{\xi}{D_n}, \qquad \frac{1}{Q^{(2)}} = \frac{2}{5}(\frac{2}{3D_n} + \frac{1}{D_s} + \frac{1}{D_t})\xi, \qquad \xi = \frac{S_{12}}{V} \tag{37}$$

式中: D_n、D_s、D_t 是 D_{ij} 的主值, (n, s, t) 是 S_{12} 上的单位正交标架。S_{12} 是全体夹杂的表面积。将式(37)代入(35), (36), 最终写出

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$K^*_{(-)} = \{(\frac{v_1}{K_1} + \frac{v_2}{K_2} + \frac{\xi}{D_n}) + [v_1(\frac{1}{3K_1^2} + \frac{3}{2G_1^2}) + v_2(\frac{1}{3K_2^2} + \frac{3}{2G_2^2})]\sigma^0\}^{-1} \tag{38}$$

$$G^*_{(-)} = \{\frac{v_1}{G_1} + \frac{v_2}{G_2} + \frac{2}{5}(\frac{2}{3D_n} + \frac{1}{D_s} + \frac{1}{D_t})\xi + [\frac{v_1}{G_1}(\frac{2}{3K_1} + \frac{1}{2G_1}) + \frac{v_2}{G_2}(\frac{2}{3K_2} + \frac{1}{2G_2})]\sigma^0\}^{-1} \tag{39}$$

3 数值结果和讨论

为了更好地理解上面导出的界限, 我们考虑弥散球形颗粒强化复合材料。在这种情况下容易给出其

$$P^{(1)} = \frac{4\pi}{9V}D_n\sum a^4 \quad , \quad P^{(2)} = \frac{2\pi}{5V}(\frac{2}{3}D_n + D_s + D_t)\sum a^4 \quad , \quad \xi = \frac{4\pi}{V}\sum a^2 \tag{40}$$

式中 $\sum$ 表对球半径 a 求和。进一步, 为了简化, 假定所有球颗粒半径均为 a, 则有:

$$\frac{4\pi\sum a^4}{V} = 3av_2 \quad , \quad \xi = \frac{4\pi\sum a^2}{V} = \frac{3v_2}{a} \tag{41}$$

因此, 式(40)可进一步简化为

$$P^{(1)} = \frac{v_2}{3}aD_n \quad , \quad P^{(2)} = \frac{v_2}{10}a(2D_n + 3D_s + 3D_t) \quad , \quad \xi = \frac{3v_2}{a} \tag{42}$$

把(42)代入(30)、(31)、(38)和(39)中, 并忽略有限变形的影响, 则有限变形的界限变为

$$K^*_{(+)} = K_1v_1 + \frac{K_2v_2}{1 + \frac{3K_2}{aD_n}}, \qquad G^*_{(+)} = G_1v_1 + \frac{G_2v_2}{1 + \frac{10G_2}{a(2D_n + 3D_s + 3D_t)}}$$
$$K^*_{(-)} = (\frac{v_1}{K_1} + \frac{v_2}{K_2} + \frac{3v_2}{aD_n})^{-1}, \qquad G^*_{(-)} = [\frac{v_1}{G_1} + \frac{v_2}{G_2} + \frac{2v_2}{5}(\frac{2}{aD_n} + \frac{3}{aD_s} + \frac{3}{aD_t})]^{-1} \tag{43}$$

显然, 式(43)正是 Hashin 导出的在线性情况下的有效模量的界限表达式[6]。为了考察有限变形及非完美界面对有效模量界限的影响, 我们以碳化钨-钴(WC-Co)陶瓷-金属复合材料为例, 给出数值结果。两相弹性模量为: K_1= 172.4 GPa 和 G_1= 79.6 GPa(Co), K_2= 418.7 GPa 和 G_2= 288.3 GPa(WC)。取 D_n= $5D_s$= $5D_t$(这对应于一个泊松比为0.375的界面相)。图1～图3显示了部分数值结果。从图1和图2可以看到, 类似于线性情况的结果, 复合材料的有效模量界限随着非完美界面参数(G_2/aD_s)增加而下降, 这也意味着复合材料有效模量的下降, 颗粒增强效

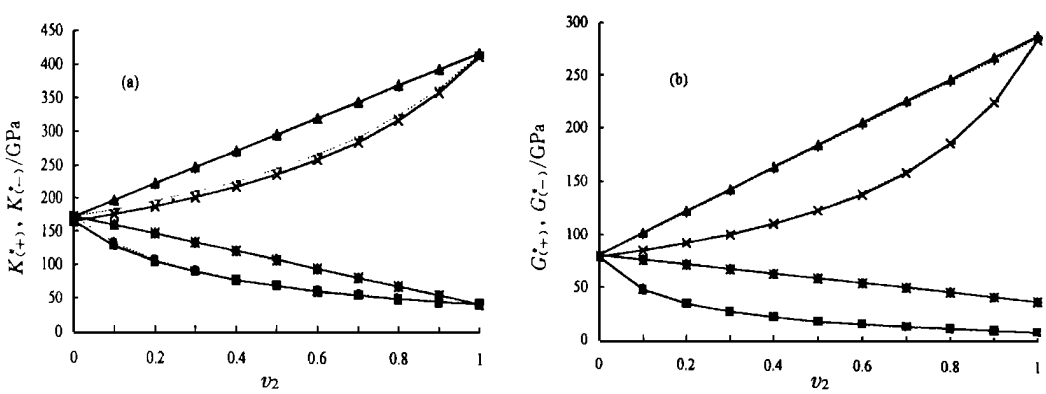

图1 在线性情况(虚线)下和有限变形情况 ϵ^0= 0.002(实线)下WC-Co 复合材料(a)体积模量、(b)剪切模量的界限

注: 递增曲线表示完美界面情况, 递减曲线表示非完美界面情况: G_2/aD_s= 10

Fig. 1 Bounds of bulk modulus (a) and shear modulus (b) in the cases of linear elastic (dashed lines) and finite strain ϵ^0= 0.002 for WC-Co composite Notation: Increasing lines represent the perfect interface and decreasing lines represent the case of imperfect interface: G_2/aD_s= 10

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

果恶化。在非完善性很大时, 如 $G_2/aD_s > 1000$, 界面趋向于完全解藕、脱离的状况, 弹性模量下限均趋于零, 上限值比基体 Co 的模量还小, 此时颗粒完全无增强效果, 表现为空洞。

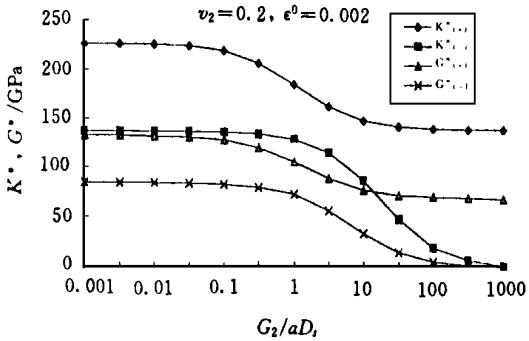

图2　WC-Co 复合材料模量界限随着非完美界面参数的变化

Fig. 2　Variation of the bounds of the effective moduli for WC-Co composite with imperfect parameters

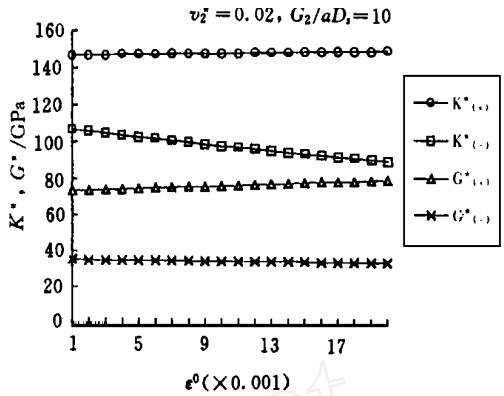

图3　有限变形 ϵ^0 对 WC-Co 复合材料有效模量界限的影响

Fig. 3　Effect of finite strain on the bounds of the effective moduli for WC-Co composite

从图3可以看出, 随应变增大, 有效模量上限变化很微弱, 有效剪切模量下限很微略下降(这是因为有效剪切模量下限本身值就很小的缘故), 但有效体积模量下限显著减少, 这意味着复合材料有效模量随着应变增加而下降。的确, 实际的塑性基复合材料的有效模量(切线模量和割线模量)通常是随着应变增大而减小的。因此, 尽管没有实验结果可直接与之比较, 但从上面的讨论可见, 图1～图3所显示的非完美界面参数、有限变形对复合材料有效模量的影响是合理的。

4　结　　论

运用有限变形下含非完美界面两相弹性复合材料能量泛函的驻值原理, 导出了这种复合材料有效体积模量和有效剪切模量上下限公式。这些公式提出了对小应变下相应界限的修正, 包括了小应变下的相应公式为其特例。因此其理论基础是可靠的, 结果是正确的。

由于研究大变形下复合材料的宏观性能是复合材料发展进程中不可逾越且更深入的课题, 因此本文中所导出的公式具有重要的实际意义。

此外, 关于两相弹性复合材料的上述公式可推广到多相弹性复合材料。

参　考　文　献

1　Christensen R M. Mechanics of Composite Materials. New York: Wiley, 1979

2　Hashin Z. Analysis of composite materials — a survey. *J Appl Mech*, 1983, 50(3): 481～505

3　Hashin Z. The spherical inclusion with imperfect interface. *J Appl Mech*, 1991, 58(2): 444～449

4　Eshelby J D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proc R Soc* (London), 1957, A 241: 376～396

5　Achenbach J D, Zhu H. Effect of interphases on micro and macromechanical behavior of hexagonal — array fiber composite. *J Appl Mech*, 1990, 57(4): 956～963

6　Hashin Z. Extremum principles for elastic heterogeneous media with imperfect interfaces and their application to bounding effective moduli. *J Mech Phys Solids*, 1992, 40(A): 767～781

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

7 茅人杰, 孙国钧, 周国阳. 玻纤/环氧复合材料力学性能和界面参数的实验研究. 玻璃钢/复合材料, 1996(3): 1～7
8 童金章, 南策文, 金伏生. 四阶各向同性张量的Hill分解定理及应用. 武汉工业大学学报, 1996, 18(3): 111～114
9 童金章, 南策文, 武从贵, 等. 有限变形下非完美界面复合材料有限模量的近似公式. 武汉工业大学学报, 1997, 19(1): 104～108
10 童金章, 吴学军. 两相弹性复合材料的微分几何结构. 见: 陈至达主编. 现代数学与力学: (MMM)-V. 徐州: 中国矿业大学出版社, 1993. 157～161
11 童金章, 关凌云, 南策文. 有限变形下含非完美界面弹性复合材料能量泛函表达式的推导. 玻璃钢/复合材料, 1997, 增刊: 137～142
12 童金章, 关凌云, 南策文. 有限变形下含非完美界面弹性复合材料能量泛函的驻值定理. 玻璃钢/复合材料增刊, 1997, 增刊: 132～136

UPPER AND LOWER BOUNDS OF EFFECTIVE MODULI FOR ELASTIC COMPOSITES WITH IMPERFECT INTERFACE AT FINITE STRAINS

Tong Jinzhang Guan Lingyun[1] Nan Cewen[2] Fu Jinghua[3]
(Department of Engineering Mechanics, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070)
([1]Advanced Materials Factory, Wuhan University of Technology)
([2]Advanced Materials Research Institute, Wuhan University of Technology) ([3]Hubei Research Institute of Building Science)

Abstract Upper and lower bounds of effective bulk and shear moduli for a two-phase elastic composite with imperfect interface are derived in the case of finite strains. In the case of very small strains, these derived bounds reduce known results for linear cases. Numerical results predict effects of the features of imperfect interface and the strains on these bounds of the effective moduli of such composites, and give reasonable results.

Key words finite strain, imperfect interface, composite, effective modulus

(上接第134页)

全书共分七章。第一章介绍与纺织结构复合材料力学行为相关的基础知识, 第二章对纺织复合材料的成型与构造特点进行了描述, 第三章给出进行纺织复合材料力学性能分析的必要的基础理论, 第四章讨论二维纺织复合材料的分析模型, 第五章讨论三维纺织复合材料的分析模型, 第六章给出纺织结构复合材料力学性能的实验方法与结果, 第七章探讨纺织结构复合材料基本结构的分析方法并给出有关研究结果。

本书既注重从方法论上讨论如何研究纺织结构复合材料的力学行为, 又突出当前工程界和学术界所关注的一些重要理论问题。可供高等理工科院校高年级本科生、硕士生和博士研究生学习与研究参考, 亦可供从事纺织复合材料设计、分析、研究与使用的工程技术人员和教学科研工作者使用。

需要该书而又在当地书店买不到的读者可向作者邮购, 每册22元(含邮费), 开发票。

邮局汇款: 101416 北京市 3380信箱75号 沈怀荣博士 收, 电话66355329-5210

银行信汇: 工商行 北京市 怀柔县 支行 帐号 121-086050-80

解放军 科工委 指挥技术学院 3 分户 (注: 银行汇款收款时间稍长)

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net