复合材料学报 第17卷 第3期 8月 2000年
ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA Vol. 17 No. 3 August 2000

文章编号: 1000-3851(2000)03-0092-04

# 正交异性蜂窝夹层板动、静力学问题的等效分析方法

徐胜今[1,3], 孔宪仁[1], 王本利[1], 马兴瑞[2], 张晓超[3]
(1. 哈尔滨工业大学 航天工程与力学系, 哈尔滨 150001; 2. 中国空间技术研究院, 北京 100083;
3. 哈尔滨理工大学 机械工程系, 哈尔滨 150080)

**摘 要**: 本文基于低阶剪切理论, 提出了正交各向异性蜂窝夹层板的一种等效分析方法, 得到等效板的工程常数和密度, 解决了国际上公认的大型有限元通用程序如NASTRAN 等不能直接计算蜂窝夹层板动、静力学问题的难题, 理论验证结果表明, 等效方法具有高精度的近似。

**关键词**: 正交各向异性; 蜂窝夹层板; 等效分析; 动力学
**中图分类号**: TB 330.1; O 313.3; O 316 **文献标识码**: A

## MEHTOD OF EQUIVALENT ANALYSIS FOR STATICS AND DYNAMICS BEHAVIOR OF ORTHOTROPIC HONEYCOMB SANDWICH PLATES

XU Sheng-jin[1,3], KONG Xian-ren[1], WANG Ben-li[1], MA Xing-rui[2], ZHANG Xiao-chao[3]
(1. Department of Astronautics and Mechanics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China;
2. Chinese Academy of Space Technology, Beijing 100083, China;
3. Department of Mechanical Engineering, Harbin Science and Technology University, Harbin 150080, China)

**Abstract**: A method of equivalent analysis for dynamics and statics behavior of honeycomb sandwich plates is obtained by using low-order shear deformation theory. Equivalent modulus and equivalent density of an equivalent plate are given by means of this method. The difficulty is eliminated that dynamics and statics behavior of honeycomb sandwich plates can not be solved directly by using universal finite element programs such as well-known NASTRAN. Results of analytic demonstration show that the equivalent method has a better accuracy of approximation.

**Key words**: orthotropic; honeycomb sandwich plate; equivalent analysis; dynamics

蜂窝夹层结构广泛应用在航空、航天领域中, 特别是在现代卫星结构中, 蜂窝夹层结构已经成为主要的承力结构[1]。因此, 蜂窝夹层结构的动、静力学分析和计算成为一个比较重要的课题。然而, 以往的研究大都限于对单独的蜂窝夹层结构运用解析或数值方法分析[2,3]。而对于含有蜂窝夹层板的复杂结构进行分析时, 前面的方法都不适用。而采用象NASTRAN 等著名通用有限元程序时, 由于这些通用程序中没有蜂窝结构的单元, 使得计算只能采取特殊的方式进行。例如, 采用三维有限元方法或是采用层板单元进行分析。采用三维有限元方法的缺点是计算量巨大, 特别是当对于一个复杂结构分析时, 此方法得不偿失。另外, 现有的层板单元模型不能很好地近似蜂窝夹层板, 其近似程度也不好确定。第二种方法是通过试验的方法测定各种蜂窝夹层结构得到刚度矩阵, 然后编制各种蜂窝板的材料单元库, 再与通用有限元程序进行接轨或自编有限元程序。这种方法的难点是需要对各种类型的蜂窝板进行测定, 由于工艺的原因使得试验数据分散性很大, 即使是同类型蜂窝板也要进行大量的试验才能得到可信的测量数据, 况且蜂窝板的制造成本非常高, 所以这种方法也很不易实现。第三种方法是等效方法[4,5], 是多年来人们极力追求的方法, 即先在理论上找出蜂窝夹层结构的等效力学模型, 实际分析时, 用等效力学模型代替原来结构可以近似地求出某些想要的结果。这种方法容易实现, 且容易达到较高的精度,

**收稿日期**: 1998-11-24; **收修改稿日期**: 1999-04-07
**基金项目**: 国防"九五"预研基金资助项目(A 966000-50)
**作者简介**: 徐胜今(1970), 男, 博士, 主要从事复杂结构动力学等方面的研究。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

所以目前工程上采用此方法的较多。然而, 已有的等效分析方法是将蜂窝夹层板等效成各向同性、与原结构尺寸不同的薄板, 分析也局限在静力学范围内, 这对实际需要来说是很不够的。例如, 文献[4]和[5]中, 将蜂窝夹层板等效成各向同性的薄板, 忽略了对基频有较大影响的扭转刚度和表层的横向剪切, 事实证明, 这样做的结果是很保守的。在本文中, 表层为正交各向异性的蜂窝夹层板将被等效成等刚度、同尺寸的正交各向异性剪切板, 同时考虑了表层和夹芯的面内和面外力学性质, 推导出等效力学模型的弹性模量、切变模量、泊松比以及等效密度, 为通用有限元程序提供必要的输入参数。经过解析验证, 动、静力学等效结果有很高的精度。

## 1 理论部分

考虑两个如图 1 所示、几何外形尺寸相同的正交各向异性蜂窝夹层板和等效板。设蜂窝夹层板表层厚度为 $d$, 夹心高度为 $2h$, 表层厚度相对于夹心很薄。为了研究方便, 设它们均为特殊正交各向异性的, 即结构的坐标主轴与自然坐标轴重合。根据文[6]的结论——夹层板横截面上的位移是连续的, 考虑到蜂窝夹层板的对称性, 选取蜂窝板的几何中面为坐标中面, 线性小挠度情况下中面的面内位移可以忽略, 依照低阶剪切理论, 其横截面位移应满足

$$\left.\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= z\varphi_x(x,y,t) \\ v(x,y,z,t) &= z\varphi_y(x,y,t) \\ w(x,y,t) &= w(x,y,t) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

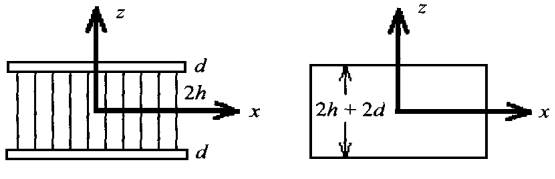


图 1 蜂窝夹层板(左)和等效板(右)

Fig. 1 Honeycomb sandwich plate (left) and its equivalent plate (right)

由哈密尔顿原理可以求出蜂窝夹层板和等效板具有相同形式的动力学基本方程[7], 再将蜂窝板各层物理、几何参数和本构关系以及等效板的等效物理参数(待求)、几何参数和本构关系分别代入各自的动力学基本方程, 则可以得到由位移表述的、具有相同形式的基本方程

$$A_1^k\varphi_{x,xx} + (A_2^k + C^k)\varphi_{y,xy} + C^k\varphi_{x,yy} - a^k(\varphi_x + w_{,x}) = I_1^k\ddot{\varphi}_x \tag{2a}$$

$$C^k\varphi_{y,xx} + (B_1^k + C^k)\varphi_{x,xy} + B_2^k\varphi_{y,yy} - b^k(\varphi_y + w_{,y}) = I_1^k\ddot{\varphi}_y \tag{2b}$$

$$a^k(\varphi_{x,x} + w_{,xx}) + b^k(\varphi_{y,y} + w_{,yy}) + q = I_0^k\ddot{w} \tag{2c}$$

上式中各刚度系数及广义惯量(含义参见文[7])的上角标取 * 时表示等效板; 不取任何字符时表示蜂窝夹层板。

从上式不难看出, 只要令这两个方程组的各项系数相等, 那么对于相同的边界条件或初始条件, 等效板会与原蜂窝夹层板有相同的解。如果令式(2)右边等于零, 即研究蜂窝板的静力学问题时, 只要令各刚度系数对应相等, 则等效板完全可以代替原蜂窝夹层板。此过程称为刚度等效。对于动力学问题, 如果同时再令原型与等效模型的广义惯量也全等, 即令 $I_j = I_j^*$ $(j = 0, 1)$, 则可以用等效板代原蜂窝夹层板进行动力学分析。此过程称为惯性等效。由刚度等效可以确定出等效板的各种弹性常数; 由惯性等效则可以确定出等效板的密度。然而用于确定密度的方程有两个, 这两个方程中只有一个未知量, 这就出现了方程个数多于未知量个数的问题。事实上, 工程中最关心的是横向低阶振动频率, 所以此时应按照第零阶广义惯量来确定出等效板的密度, 即由 $I_0 = I_0^*$ 确定。

根据上述两个准则, 可以确定出前面假设的蜂窝夹层板的等效板的物理常数为

$$\begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ G_{44} \\ G_{55} \\ G_{66} \\ \nu_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (e_{11}e_{22} - e_{12}^2)/e_{22} \\ (e_{11}e_{22} - e_{12}^2)/e_{11} \\ e_{44} \\ e_{55} \\ e_{66} \\ -e_{12}/e_{11} \end{Bmatrix} \tag{3}$$

其中

$$\begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{22} \\ e_{44} \\ e_{55} \\ e_{66} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{[(h+d)^3 - h^3]e_{11}^f + h^3e_{11}^c\}/(h+d)^3 \\ \{[(h+d)^3 - h^3]e_{12}^f + h^3e_{12}^c\}/(h+d)^3 \\ \{[(h+d)^3 - h^3]e_{22}^f + h^3e_{22}^c\}/(h+d)^3 \\ \{[(h+d)^3 - h^3]e_{44}^f + h^3e_{44}^c\}/(h+d)^3 \\ (de_{55}^f + he_{55}^c)/(h+d) \\ (de_{66}^f + he_{6}^c)/(h+d) \end{Bmatrix} \tag{4}$$

及密度

$$\rho = (d\rho^f + h\rho^c)/(h+d) \tag{5}$$

上面两式中, $e_{ij}^f$, $e_{ij}^c$ ($i, j$ 按式(4)中的组合取值) 分别

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

为表层材料和蜂窝夹心结构在上面选定坐标系中的刚度系数[8]; $\rho^f$, $\rho^c$ 分别为表层材料和蜂窝夹心结构的密度。

## 2　结果与分析

前面已经阐述过, 对于蜂窝夹层板的静力学问题的等效可以得到与解析相同的位移解, 所以这里只需验证动力学问题的等效。为了验证, 先对算例进行解析求解, 再与等效板的数值结果进行比较。

**算例 1**　某雷达卫星结构安装板是蜂窝夹层板, 其表层厚度为 $d = 0.3$ mm 的铝板, 夹心为正六边形铝蜂窝, 夹心边长为 $l = 4$ mm, 壁厚 $t = 0.04$ mm, 夹心高度 $2h = 14.4$ mm, 蜂窝板边长分别为 $l_1 = 4$ m, $l_2 = 2$ m。铝的弹性模量为 68 GPa, 泊松比为 0.3。

**算例 2**　夹心高度 $2h = 29.4$ mm, 其它尺寸及材料参数同算例 1。

现用解析方法和等效方法分析四边简支情况下这两个算例中蜂窝板的自由振动情况。

(1) 解析方法的求解过程

设蜂窝板动力学方程组(2)的解[9]为

$$\left.\begin{aligned} \varphi_x &= A\,\Phi(x)W(y)\sin\omega\tau \\ \varphi_y &= B\,W(x)\Phi(y)\sin\omega\tau \\ w &= \tilde{C}W(x)W(y)\sin\omega\tau \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

其中: $A$, $B$, $\tilde{C}$ 为待定系数; $W(x)$, $\Phi(x)$, $W(y)$, $\Phi(y)$ 为相应边界条件(这里是简支边界)单向蜂窝夹层板的振型函数, 具体形式可见文[7]; $\tau$ 表示时间。

将式(6)代入方程组(2)中, 解特征值, 最后得到各算例在简支边界条件下自由振动的频率。

实际计算中, 需要知道蜂窝夹心的折合弹性常数和密度。夹心的密度难于计算, 一般要根据试验测定。铝蜂窝的折合弹性常数可根据文献[5, 10～12]来确定。对于正六边形铝蜂窝

$$\left.\begin{aligned} E_x^c &= E_y^c = \frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{t}{l}\right)^3 E \\ G_{xy}^c &= \frac{\sqrt{3}\,\gamma}{2}\left(\frac{t}{l}\right)^3 E \\ G_{xz}^c &= \frac{\gamma}{\sqrt{3}}\frac{t}{l}G \\ G_{yz}^c &= \frac{\sqrt{3}\,\gamma}{2}\frac{t}{l}G \\ \nu^c &= \frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

其中: $E$, $G$, $\nu$ 为夹心材料的工程常数; $\gamma$ 为修正系数, 取决于工艺, 一般取 0.4～0.6, 理论值取 1。本算例中取理论值 1。

(2) 等效方法的求解过程

在确定出蜂窝夹心的密度及折合弹性模量后, 运用上面介绍的等效方法求出等效板的工程常数和密度, 然后采用 MSC/NASTRAN (微机版) 对等效板进行了有限元分析, 得到前 10 阶频率, 取前 6 阶可靠频率与解析结果的前 6 阶频率进行比较, 结果列于表 1 中。

**表 1　结果比较**

**Table 1　Comparison of results**

| 阶数 | 算例 1 (Hz) | | 算例 2 (Hz) | |
|---|---|---|---|---|
| | 解析方法 | 等效方法 | 解析方法 | 等效方法 |
| 1 | 16.177 | 15.882 | 28.856 | 28.611 |
| 2 | 25.837 | 24.754 | 46.055 | 45.256 |
| 3 | 41.995 | 39.758 | 74.774 | 73.234 |
| 4 | 55.066 | 54.177 | 98.065 | 97.367 |
| 5 | 64.631 | 61.018 | 114.911 | 112.485 |
| 6 | 64.649 | 61.441 | 115.058 | 112.496 |

从表中的数据可以看到, 等效方法的结果非常接近解析结果, 可靠数据的相对误差均小于 3%, 特别是当夹心厚度增加时, 相对误差减少。本例中为了简单的说明问题, 只求四边简支情况下的振动, 但经过上面验证后可以看到, 用等效方法可以很方便地求解各种边界条件的动、静力学问题, 而解析方法就不这样方便了。

## 3　蜂窝夹层板应力的估算方法

由于等效过程采用了位移法, 所以会得到与解析方法相近的位移解, 振动频率结果也很精确。但还存在着等效板的应力分布与原蜂窝夹层板应力分布不同的问题, 即等效只能给出截面的平均应力而不能精确地描述各点的应力情况。为了估算蜂窝夹层板的应力, 可以根据蜂窝夹层板的表层与夹心厚度相比很薄的特点, 假设表层正应力沿厚度均匀分布, 夹心只承受横向剪力, 这样就可以应用等效方法的位移结果反算出表层的正应力及夹心的横向剪应力。

## 4　结　论

应用本文提出的等效方法可以得到与原型很相近的位移及振动频率结果, 可以很方便按照一般的有限元分析方法分析蜂窝夹层板。特别是对于一个

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

含有蜂窝夹层板的复杂结构动、静力学问题, 也可以用通常结构有限元分析方法来对其分析, 这具有非常重要的工程意义。同时, 等效也可以估算出蜂窝夹层板的应力分布。本文虽然只分析了工程中常见的蜂窝夹层板, 但对于其他类型的夹层板, 只要是对称结构, 本文方法同样适用。

## 参考文献:


[1] Venneri S L, Wada B K, Lou M C. Integrated utility module for NASA miniature spacecraft[J]. *IFA*, 95- I 4. 01.

[2] Holt P J, Webber J P H. Exact solutions to some honeycomb sandwich beam, plate, and shell problems[J]. *J of Strain Analysis*, 1982, 17(1): 1-8.

[3] Holt P J, Webber J P H. Finite element for honeycomb sandwich plates and shells[J]. *Aeronautical Journal*: Part 1, 1980(3/4): 113-123; Part 2, 1980(5): 157-167.

[4] Roggero E, Cerocchi M, Rauschert A, *et al*. Analysis and design of a new alternative for satellite platforms[J]. *7th Annual AIAA/USU*, 1996.

[5] 《飞机设计手册》编委会. 飞机设计手册(第三册)[M]. 北京: 国防工业出版社, 1990. 719-722.

[6] 邹贵平, 唐立民. 正交各向异性层合板的混合状态 Hamiltonian 元[J]. 复合材料学报, 1994, 11(3): 9.

[7] 徐胜今, 宋 宇, 王本利, 等. 正交异性蜂窝夹层板的动力学分析[J]. 复合材料学报, 1998, 15(4): 74-80.

[8] 罗祖道, 李思简. 各项异性材料力学[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1994. 6-11.

[9] 曹志远. 厚板动力学理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1983.

[10] 王颖坚. 蜂窝结构在面内剪力作用下的变形模式[J]. 北京大学学报(自然科学版), 1991, 27(3): 301-307.

[11] 中科院力学研究所. 夹层板壳的弯曲、稳定和振动[M]. 北京: 科学出版社, 1977.

[12] 华云龙, 余同希. 多胞材料的力学行为[J]. 力学进展, 1991, 21(4).


© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net