复合材料学报 第17卷 第3期 8月 2000年
ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA Vol 17 No. 3 August 2000

文章编号: 1000-3851(2000)03-0087-05

低速冲击下复合材料圆柱壳的简化分析

谢志民, 万志敏, 杜星文
(哈尔滨工业大学 复合材料研究所, 哈尔滨 150001)

摘 要: 将圆柱壳受轴向冲击破坏等效为一均质圆柱的破坏, 给出了等效参数的确定方法, 从而使圆柱壳的破坏分析简化为一维问题。并根据弹性动力学基本理论给出了等效圆柱受的冲击力的一种计算方法, 进一步得到了冲击下的圆柱壳的位移关系。

关键词: 复合材料圆柱壳; 冲击; 耐撞性
中图分类号: TB 330. 1 **文献标识码**: A

SIMPLIFIED ANALYSIS OF COMPOSITE CYLINDRICAL SHELLS SUBJECTED TO LOW VELOCITY IMPACT

XIE Zhi-min, WAN Zhi-min, DU Xing-wen
(Center for Composite Materials, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: Under the assumption of the existence of an equivalent column which has the same failure behavior as the composite shells following axial impact, the failure of the shells was reduced to a one dimensional problem. An equivalent law was introduced in this paper. By means of the elastic dynamics theory, a simplified impact load was obtained, and then the dynamic radial displacements of the cylindrical shells were determined.

Key words: composite cylindrical shell; impact; crashworthiness

利用复合材料圆柱壳承受轴向载荷的破坏来吸收能量可提高结构的耐撞性。已有的这方面研究多集中在结构变形和破坏的具体模式上, 而忽略了结构的动态响应。事实上, 研究冲击载荷下复合材料圆柱壳的响应对结构设计具有重要意义, 这其中涉及了动载荷的确定问题。在研究径向冲击问题时冲击力可由改进的Hertz定律计算[1]; 对于轴向冲击问题, 文[2]只考虑纵波在圆柱壳中传播提出了等效圆柱模型, 应用一维应力波传播的理论描述了轴向冲击的破坏过程。

圆柱壳受轴向冲击涉及了稳定性问题。Oniashvili和Bolotin最早研究了圆柱壳受轴向周期载荷的稳定性问题; Bert等研究了正交各向异性复合材料圆柱壳的参数失稳[3]; Argento[4]对夹支边界条件下的层合圆柱壳的参数共振问题进行了数值研究, 圆柱壳的动态响应分成两部分, 非扰动部分和扰动部分, 非扰动部分对应失稳前状态, 为轴对称变形, 扰动部分对应动力不稳定状态; Matemilola和Stronge[1]研究了复合材料圆柱壳的径向冲击响应。本文将在确定冲击载荷基础上重点分析简支受轴向冲击的复合材料圆柱壳的响应。

1 圆柱壳的运动方程

1.1 基本方程

对于中面半径为R、壁厚h、长L及材料密度为ρ的圆柱壳(图1), 由Love理论并忽略面内惯性项及转动惯性项, 有运动方程

$$\left.\begin{aligned}
&N_{x,x}+\frac{1}{R}N_{x\theta,\theta}=0\\
&N_{x\theta,x}+\frac{1}{R}N_{\theta,\theta}+\frac{1}{R}Q_{\theta}=0\\
&Q_{x,x}+\frac{1}{R}Q_{\theta,\theta}-\frac{N_{\theta}}{R}+\bar{N}w_{,xx}=\rho h w_{,tt}\\
&M_{x,x}+\frac{1}{R}M_{x\theta,\theta}-Q_{x}=0\\
&M_{x\theta,x}+\frac{1}{R}M_{\theta,\theta}-Q_{\theta}=0
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

收稿日期: 1998-12-28; 收修改稿日期: 1999-04-26
基金项目: 哈尔滨青年基金资助项目(966121810)
作者简介: 谢志民(1971), 男, 博士, 主要从事复合材料力学, 聚合物共混等方面的研究, 现在天津大学材料学院博士后流动站工作。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

x、θ、z 分别为轴向、周向和径向坐标，其对应的位移分别为 u、v、w。由经典层合理论可得到用中面应变(应变 ϵ 和曲率 χ)表示的圆柱壳中面内力(内力 N 和内力矩 M)，即

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon \\ \chi \end{Bmatrix} \tag{2}$$

式中，A、B、D 分别为拉伸刚度、耦合刚度和弯曲刚度矩阵。

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} \overline{Q}_{ij} [(z_{k+1} - z_k), (z_{k+1}^2 - z_k^2)/2, (z_{k+1}^3 - z_k^3)/3] \tag{3}$$

式中，下标 k 表示第 k 层，其中 $\overline{Q}_{ij}$ 为旋转刚度，见文献[5]。

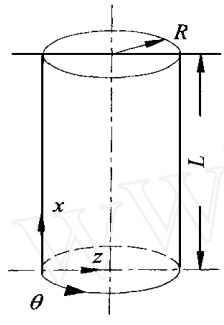


图 1　层合壳体坐标系

Fig. 1　Coordinate of layered shell

壳体一阶近似理论的中面应变-位移关系

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_x &= u_{,x} \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{R}(v_{,\theta} + w) \\ \gamma_{x\theta} &= \frac{1}{R} u_{,\theta} + v_{,x} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} \chi_x &= -w_{,xx} \\ \chi_\theta &= \frac{1}{R^2}(v_{,\theta} - w_{,\theta\theta}) \\ \chi_{x\theta} &= -\frac{2}{R} w_{,x\theta} + \frac{1}{R} v_{,x} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

其中，“，”表示对坐标方向的偏导数。将物理方程、几何方程代入运动方程并考虑轴对称变形，得

$$K_1 w_{,xxxx} + (K_2 + \overline{N}) w_{,xx} + K_3 w + K_4 = \rho h w_{,tt} \tag{6}$$

这里，$K_1 \sim K_3$ 为与材料常数相关的常数，K_4 是需由边界条件确定的未知时间函数。

$$K_1 = R^2 A_{11} B_{26}^2 / K_0 - D_{11}$$

$$K_2 = \frac{2(A_{12} B_{16}^2 - A_{11} B_{16} B_{26})}{K_0}$$

$$K_3 = \frac{1}{R^2 A_{11} K_0}(A_{12}^2 K_0 + A_{11}^2 B_{26}^2 - A_{12}^2 B_{16}^2 - A_{11} A_{22} K_0)$$

$$K_0 = R^2 A_{11} A_{66} + A_{11} D_{66} - B_{16}^2$$

1.2　方程的数值解法

对 $S2$ 简支边界条件进行数值求解。$S2$ 简支边界条件为

$$\left.\begin{aligned} N_x(0) &= N_x(L) = \overline{N} \\ M_x(0) &= M_x(L) = 0 \\ v(0) &= v(L) = 0 \\ w(0) &= w(L) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

设动态分布力具有下列形式

$$\overline{N} = \frac{1}{2\pi R}(N_0 + N_1 \cos \Omega t) \qquad 0 \le t \le \pi/2\Omega \tag{8}$$

根据 Argento[4] 的方法，将径向位移用 Fourier 级数表示

$$w = \frac{1}{2} f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos \alpha n x \tag{9}$$

其中：$\alpha = \pi/L$；f_i ($i = 0, 1, 2, \cdots$) 为 Fourier 级数系数，均为时间的函数。

径向位移 w 对轴向的偏导数

$$w_{,xx} = -c_w^{(2)} - \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha^2 n^2 f_n - \beta c_w^{(2)}) \cos \alpha n x \tag{10}$$

$$w_{,xxxx} = -c_w^{(4)} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha^4 n^4 f_n - \alpha^2 n^2 \beta c_w^{(2)} - \beta c_w^{(4)}) \cos \alpha n x \tag{11}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \beta &= (-1)^n + 1 \\ c_w^{(2)} &= \frac{2}{L} w_{,x}(0) \\ c_w^{(4)} &= \frac{2}{L} w_{,xxx}(0) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

将式(9)～式(11)代入式(6)，整理得

$$\left.\begin{aligned} &-K_1 c_w^{(4)} - (K_2 + \overline{N}) c_w^{(2)} + \frac{1}{2} K_3 f_0 + \frac{K_5 (A_{12} B_{16} - A_{11} B_{26})}{2R^2 A_{11}} f_0 + \frac{A_{12}}{R A_{11}} \overline{N} = \frac{1}{2} \rho h \ddot{f}_0 \\ &-K_1 \beta (\alpha^2 n^2 c_w^{(2)} + c_w^{(4)}) + (K_2 + \overline{N}) c_w^{(2)} + [K_1 \alpha^4 n^4 - (K_2 + \overline{N}) \alpha^2 n^2 + K_3] f_n = \rho h \ddot{f}_n \\ &n = 1, 2, \cdots \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

其中，“¨”表示对时间的二阶偏导数。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

K_5 和 K_6 分别为

$$\left.\begin{aligned} K_5 &= (A_{12}B_{16} - A_{11}B_{26})/K_0 \\ K_6 &= A_{11}B_{16}R^2/K_0 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

设方程组具有下列解的形式

$$f_i = A_i N_0 + B_i N_1 \cos \Omega t \tag{15}$$

式(13)最终化为下列方程组

$$\left.\begin{aligned} & K_9 A_n + \beta(K_7 - K_{10}) \sum_{i=1}^{N} A_i = \beta K_8 \\ & (K_9 + \rho h \Omega^2) B_n + \beta(K_7 - K_{10} + \rho h \Omega^2) \sum_{i=1}^{N} B_i = \beta K_8 \\ & n = 1, 2, \cdots, N \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

其中, $K_7 \sim K_{10}$ 是与 n 及材料参数相关的常数

$$K_7 = K_3 + \frac{K_5}{R^2 A_{11}}(A_{12}B_{16} - A_{11}B_{26})$$

$$K_8 = \frac{A_{12}}{RA_{11}}$$

$$K_9 = K_1 \alpha^4 n^4 - K_2 \alpha^2 n^2 + K_3$$

$$K_{10} = \frac{B_{16}\alpha^2 n^2 K_1 K_5}{m(D_{11} - B_{16}K_6)}$$

式中, m 为 Fourier 级数展开次数。数值解法可确定各未知量, 最终可得到径向位移。

2 冲击力的简化

考虑圆柱壳与一等效均质圆柱受刚性重物冲击作用的纵向破坏过程是等同的, 那么圆柱壳中的波传播可简化为一维问题处理, 这里不考虑由于复合材料的非均质而导致的应力波弥散特性及圆柱体的几何弥散效应。由于成型加工等因素使圆柱壳端部材料强度较弱, 将这部分材料考虑为一刚度为 η_k 的无质量弹簧, 其中 k 为完善壳的等效轴向压缩刚度, η 为损伤度。这样原问题可由三物体的碰撞来描述, 见图 2, 其中圆柱壳由一无质量弹簧和一圆柱等效。

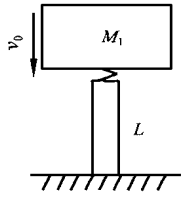


图 2 冲击模型

Fig. 2 Impact model

设重物的撞击速度为 v_0, 等效圆柱端面的冲击力为 N_c, 圆柱端面位移和弹簧的形变分别为 u、u_1, 重物和圆柱的质量分别为 M_1、M_2, 圆柱截面积为 A、长为 L、密度为 ρ。碰撞过程中重物的运动方程为

$$\eta_k u_1 = M_1 g - M_1(\ddot{u} + \ddot{u}_1) \tag{17}$$

由于

$$\eta_k u_1 = N_c \tag{18}$$

$$N_c = -A\sigma = \frac{AE}{c}\dot{u} \tag{19}$$

式(17)简化为一有阻尼的振动方程

$$\ddot{v} + 2\omega\xi\dot{v} + \omega^2 v = 2\omega\xi g \tag{20}$$

其中: $\omega^2 = \frac{\eta_k}{M_1}$; $2\omega\xi = \frac{\eta_k c}{AE}$; $v = \dot{u}$ 为端面位移。初始条件为

$$\left.\begin{aligned} v(0) &= 0 \\ \dot{u}_1(0) &= v_0 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

参数 ξ 决定了冲击力的变化, 令 $\omega_b = \omega\sqrt{1-\xi^2}$。

当 $\xi < 1$ 即 η 很小时,

$$v = \exp(-\omega\xi t)(C_1 \cos \omega_b t + C_2 \sin \omega_b t) + \frac{2\xi}{\omega} g \tag{22}$$

$$N_c = \frac{\eta_k}{\omega}\exp(-\omega\xi t)\left(\frac{\omega v_0 - \xi g}{\omega_b}\sin\omega_b t - \frac{g}{\omega}\cos\omega_b t\right) + \frac{\eta_k}{\omega^2} g \tag{23}$$

当 $\xi \gg 1$ 时,

$$N_c = \frac{\eta_k}{2\omega\xi}[-v_0 \exp(-2\omega\xi t) + v_0] \tag{24}$$

上述关系只适用于应力波从端部传到底部这段时间($t_0 = L/c$)。将冲击力简化为式(8)的形式

$$\bar{N}_c = \frac{1}{2}\left[N_c(t_0) - N_c(t_0)\cos\left(\pi\frac{t}{t_0}\right)\right]$$

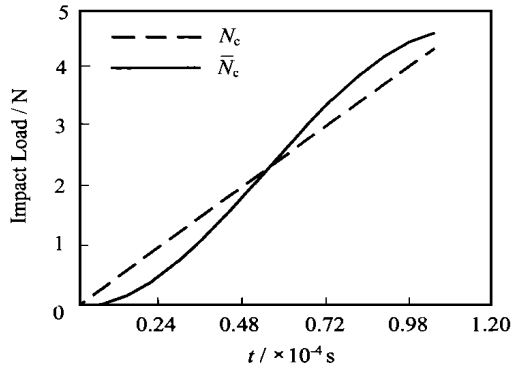
$$0 \le t \le t_0 \tag{25}$$

图 3 给出了两种情况下的简化冲击力。由 $c = \sqrt{E/\rho}$ 及 $k = AE/L$ 可得到 ξ 的简化形式

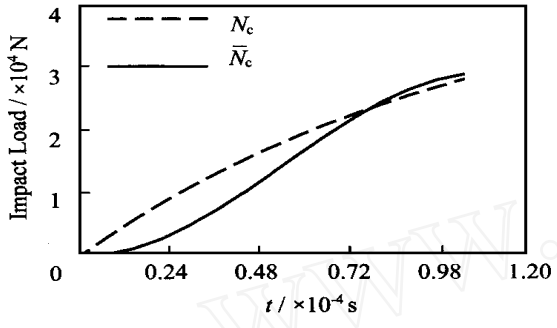
$$\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta M_1}{M_2}} \tag{26}$$

如果重物质量 $M_1 \gg M_2$, 那么必须保证弹簧刚度足够小才能使冲击力按式(23)变化, 否则初始的冲击力将非常大。事实上, 作为缓冲吸能元件的复合材料圆柱壳端部都需进行削弱处理(本研究中为倒角处理), 使端部强度较弱以引发破坏。削弱处理改变了端部的刚度, 各种削弱形式[6]导致了这种改变量上的差异, 但在控制初始过载上起的作用是相同的。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net



(a) $\xi < 1$



(b) $\xi \gg 1$

图 3　简化冲击力

Fig. 3　Simplified impact load

3　等效刚度

在确定冲击力的过程中, 圆柱壳的等效压缩刚度是非常重要的量。考虑圆柱壳与圆柱在结构尺寸上保持一致, 具有相同长度 L、截面积 A 和质量 M_2 (密度 ρ 自然相等)。为确定等效均质圆柱的材料参数, 在圆柱壳与圆柱的刚度之间建立联系。由经典层合理论得到圆柱壳的轴向压缩刚度

$$K_s = \frac{A_{11}\pi D}{L} \tag{27}$$

其中: D、L 分别为中面直径与圆柱壳长; A_{11} 为拉伸刚度。

对于材料常数为 E、截面积为 A、长度为 L 的圆柱, 它的轴向压缩刚度为

$$K_c = \frac{EA}{L} \tag{28}$$

一般情况下, 圆柱壳既有压缩刚度又有弯曲刚度和耦合刚度, 在建立刚度等效原则时必须考虑这些因素, 不妨令

$$K_c = K_0 K_s \tag{29}$$

式中, K_0 为等效系数。

将式(27)、式(28)代入式(29), 有

$$E = K_0 \frac{\pi D A_{11}}{A} \tag{30}$$

特别地, 在铺层方式为 $[\pm\theta]_n$、且各层厚度相同时,

$$E = K_0[Q_{11}\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\sin^4\theta] \tag{31}$$

严格讲, 由静态刚度来计算动态问题是不合理的, 但是从工程应用角度是可取的; 另外, 在上述关系中引入的系数 K_0 是由圆柱壳的撞击试验确定的, 它包含了圆柱壳的弯曲刚度、耦合刚度等因素的影响, 是与缠绕角度相关的量。图 4 给出了由撞击试验确定的 K_0 与缠绕角之间关系[7]。这样, 由层合理论及式(31)可得到等效均质圆柱的材料常数。

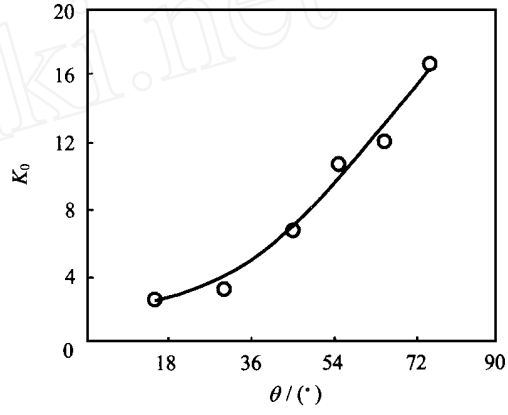


图 4　等效系数

Fig. 4　Equivalent coefficient

4　算　例

本文对冲击速度为 6 m/s 下的 $[\pm 75]_5$ 复合材料圆柱壳进行了计算。材料参数如下:

$$E_1 = 41\ \text{GPa}$$

$$E_2 = 11.7\ \text{GPa}$$

$$G_{12} = 4.79\ \text{GPa}$$

$$\nu_{12} = 0.3$$

圆柱壳的内径壁厚比为 $D/h = 22$。

首先确定圆柱壳的等效压缩刚度, 根据式(25)计算冲击力, 进一步对方程(16)进行数值求解, 由此得到圆柱壳的径向位移关系。图 5 给出了 $T = \pi/\Omega$ 的圆柱壳径向位移沿轴向的分布规律, 结果表明圆柱壳两端部较中部变形要大, 这是与冲击试验中试件端部破坏较大的结果[1]相符的。在得到轴向冲击下圆柱壳的变形基础上, 进一步可由动态稳定性分析获得壳体的稳定边界, 这对于结构设计是非常重要的, 今后的工作将涉及这方面内容。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

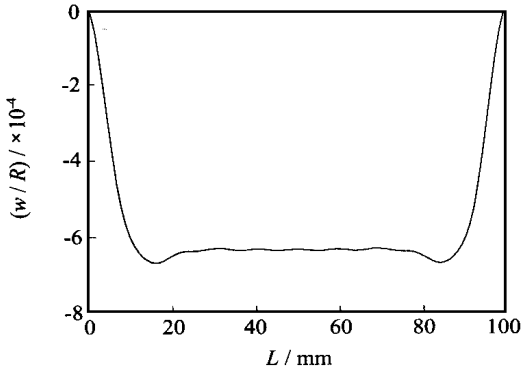


图 5 径向位移分布

Fig. 5 Distribution of the radial displacements

5 结 论

在将圆柱壳受轴向冲击破坏等效为一均质圆柱的破坏基础上, 给出了等效参数的一种确定原则; 通过对三物体碰撞问题的讨论指出端部损伤对控制初始冲击力的大小有较大影响。对圆柱壳的数值计算表明, 冲击过程中圆柱壳的两端部变形较大, 中部变形较均匀, 与已有的试验结果相符。

参考文献:

[1] Matemilola S A, Stronge W J. Impact response of composite cylinders[J], *Int J Solids Structures*, 1997, 34(21): 2669-2684.

[2] 谢志民, 万志敏, 宋宏伟, 等. 玻璃-环氧圆柱壳的撞击吸能分析[J]. 复合材料学报, 1999, 16(4).

[3] Bert C W, Birman V. Parametric instability of thick orthotropic circular cylindrical shells [J]. *Acta Mechanica*, 1988, 71: 61-76.

[4] Argento A, Scott R A. Dynamic instability of layered anisotropic circular cylindrical shells Part I: Theoretical development[J]. *J Sound and Vibration*, 1993, 162(2): 311-322.

[5] Jones R M. Mechanics of composite materials [M]. Washington, D. C.: Scripta Book Company, 1975.

[6] Thuis H G S J. The influence of trigger configurations and laminate lay-up on the failure mode of composite crush cylinders[J]. *Composite Structures*, 1993, 25: 37-43.

[7] Xie Z, Wan Z, Song H, *et al*. An analysis of impact energy absorption of glass-epoxy tubes[A]. Proc. of the First Asian-Australasian Conference on Composite Materials (ACCM - 1) [C]. Osaka, Oct. 7- 9, 1998. 738.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net