复合材料学报 第17卷 第3期 8月 2000年
ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA Vol 17 No. 3 August 2000

文章编号: 1000-3851(2000)03-0083-04

关于横观各向同性体在其各向同性面内弹性问题的一个常数

王建祥
(北京大学 力学与工程科学系, 北京 100871)

摘 要: 研究了在平面应力和平面应变情况下, 横观各向同性材料在其各向同性面内的应力-应变关系以及用位移表达的平衡方程可以被表示成与各向同性材料完全相同的形式。这种等同关系是通过引入一个与横观各向同性材料的泊松比有关的常数得到的。该常数的引入消除了已发表的文献中求解横观各向同性材料平面问题时出现的矛盾。这个常数的引入也便于正确计算单向纤维增强复合材料的横向切变模量。

关键词: 横观各向同性; Kolosov 常数; 三相复合圆柱模型; 纤维增强复合材料; 横向切变模量
中图分类号: TB 330.1 **文献标识码**: A

ON A CONSTANT IN ELASTOSTATIC PROBLEMS FOR A TRANSVERSELY ISOTROPIC BODY IN THE PLANE OF ISOTROPY

WANG Jian-xiang
(Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract: In this paper, it is pointed out that under both plane-stress and plane-strain deformation conditions, the constitutive and equilibrium equations in the plane of isotropy of a transversely isotropic body can be expressed in a form identical to that for an isotropic body. This equivalence is implemented through the introduction of a mixed constant containing the Poisson ratios of the transversely isotropic medium. The introduction of this constant eliminates an inconsistency that appeared in the literature on the solution of transversely isotropic bodies. The use of this constant also facilitates consideration of transverse isotropy of the constituents of unidirectional fibre-reinforced composite materials.

Key words: transverse isotropy; Kolosov constant; three phase composite cylindrical model; fibre-reinforced composite material; transverse shear modulus

单向纤维增强复合材料在宏观上被认为是一种横观各向同性材料, 其弹性性能由五个弹性常数决定, 根据基体和纤维的性能以及纤维的体积比确定复合材料的有效弹性常数是复合材料力学研究的基本问题之一。对单向纤维增强复合材料, Hill[1], Hashin 和 Rosen[2]给出了五个弹性常数中四个常数的解。第五个常数, 即横向切变模量的计算比较困难。Christensen 和 Lo[3]给出了该问题的一个解, 即著名的"三相复合圆柱模型。"他们认为自己的解是对"三相复合圆柱模型"的"精确"(exact)弹性解。但是, 周履和范赋群[4]在其著作中指出, Christensen 和 Lo[3]的求解过程存在不协调之处。然而, 他们并未提出如何从物理和数学两方面解决这个问题。本文除了指出 Christensen 和 Lo[3]的求解过程存在的问题之外, 还将表明, 该问题可以通过引入一个混合常数得到严格解决。此外, 使用这个常数, 在预测单向纤维增强复合材料横向切变模量时可以非常容易地考虑纤维和基体的横观各向同性特性。

1 横观各向同性材料的应力-应变关系

首先, 考虑正交各向异性材料, 假设其弹性对称面分别平行于笛卡尔坐标平面, 则其应力-应变关系表示为

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E_{xx}}\sigma_{xx} - \frac{\nu_{yx}}{E_{yy}}\sigma_{yy} - \frac{\nu_{zx}}{E_{zz}}\sigma_{zz} \qquad (1)$$

收稿日期: 1999-07-03; **收修改稿日期**: 1999-10-25
作者简介: 王建祥(1962), 男, 博士, 教授, 主要从事复合材料力学等方面的研究。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\varepsilon_{yy} = -\frac{\nu_{xy}}{E_{xx}}\sigma_{xx} + \frac{1}{E_{yy}}\sigma_{yy} - \frac{\nu_{zy}}{E_{zz}}\sigma_{zz} \tag{2}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu_{xz}}{E_{xx}}\sigma_{xx} - \frac{\nu_{yz}}{E_{yy}}\sigma_{yy} + \frac{1}{E_{zz}}\sigma_{zz} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{1}{\mu_{xy}}\tau_{xy}\\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{\mu_{yz}}\tau_{yz}\\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{\mu_{zx}}\tau_{zx}\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

式中, E_{xx}, E_{yy}, E_{zz} 和 μ_{xy}, μ_{yz}, μ_{zx} 分别是 x, y, z 方向的杨氏模量和 xy, yz, zx 面内的切变模量。

其次, 再假设材料在平行于 xy 面的平面内是各向同性的, 则有

$$\left.\begin{aligned}\mu_{xy} &= \mu_{yx} \equiv \mu\\ \nu_{xy} &= \nu_{yx} \equiv \nu\\ \mu &= \frac{E_{xx(yy)}}{2(1+\nu)}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

这样, 对于 xy 面内的二维问题, 应力-应变关系可表示为

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1+\kappa}{8\mu}\sigma_{xx} - \frac{3-\kappa}{8\mu}\sigma_{yy} \tag{6}$$

$$\varepsilon_{yy} = -\frac{3-\kappa}{8\mu}\sigma_{xx} + \frac{1+\kappa}{8\mu}\sigma_{yy} \tag{7}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{\mu}\tau_{xy} \tag{8}$$

或者

$$\sigma_{xx} = \frac{\mu(3-\kappa)}{\kappa-1}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + 2\mu\varepsilon_{xx} \tag{9}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\mu(3-\kappa)}{\kappa-1}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + 2\mu\varepsilon_{yy} \tag{10}$$

$$\tau_{xy} = \mu\gamma_{xy} \tag{11}$$

在式(6)～式(8)及式(9)～式(11)中, 常数 κ 定义为

$$\kappa = \begin{cases}\dfrac{3-\nu}{1+\nu} & \text{(各向同性或横观各向同性材料在平面应力条件下)}\\ 3-4\nu & \text{(各向同性材料在平面应变条件下)}\\ \dfrac{3-\nu-4\nu_{z(yz)}\nu_{x(zy)}}{1+\nu} & \text{(横观各向同性材料在平面应变条件下)}\end{cases} \tag{12}$$

对于各向同性材料, 文献中常使用式(12)右端的前两个表达式, 这两个表达式定义的 κ 称为 Kolosov 常数[5]。式(12)右端的第三个表达式, 即对横观各向同性材料在平面应变条件下的公式, 是由 Wang 和 Karihaloo 在 1994 年引入的[6]。

Nemat-Nasser 和 Hori 在其著作[7]中也采用式(6)～式(8)及式(9)～式(11)来描述横观各向同性材料在其各向同性面内的应力-应变关系。他们给出的 κ 定义为

$$\kappa = \begin{cases}\dfrac{3-\nu}{1+\nu} & \text{(各向同性或横观各向同性材料在平面应力条件下)}\\ 3-8\mu\left(\dfrac{\nu_3^2}{E_3} + \dfrac{\nu}{E}\right) & \text{(横观各向同性材料在平面应变条件下)}\end{cases} \tag{13}$$

式中: E, μ 和 ν 等同于式(5)中定义的参数; E_3 等同于本文中的 E_{zz}。

ν_3 在文献[7]中被定义为 $\nu_3 \equiv \nu_{13} = \nu_{23}$。但是, 根据这样定义的 ν_3, 由式(13)给定的 κ 是不对的。根据文献[7]中的推导以及所使用的符号, κ 应该被定义为

$$\kappa = \begin{cases}\dfrac{3-\nu}{1+\nu} & \text{(各向同性或横观各向同性材料在平面应力条件下)}\\ \dfrac{3-\nu-4\nu_{13(23)}\nu_{31(32)}}{1+\nu} & \text{(横观各向同性材料在平面应变条件下)}\end{cases} \tag{14}$$

这样定义的 κ 与式(12)定义的 κ 一致。

采用式(9)～式(11)中的应力-应变关系, 在不考虑体积力的情况下, 笛卡儿平面坐标系中以位移表示的弹性静态平衡方程写为

$$(\kappa+1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + (\kappa-1)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{15}$$

$$(\kappa+1)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + (\kappa-1)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \tag{16}$$

在平面极坐标系中的平衡方程为

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2}u_r + \frac{2}{\kappa+1}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r\partial\theta} - \frac{2\kappa}{\kappa+1}\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2} = 0 \tag{17}$$

$$\frac{2}{\kappa-1}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial\theta} + \frac{2\kappa}{\kappa-1}\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{\kappa+1}{\kappa-1}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2}u_\theta = 0 \tag{18}$$

因此, 使用式(12)中的 κ 表达式, 则横观各向同性材料在其各向同性面内平面问题的弹性本构关系以及用位移分量表示的平衡方程可以写成与各向同性材料完全相同的形式。这样, 在给定边界位移的情况下, 横观各向同性材料在其各向同性面内的平面问题的求解与各向同性材料平面问题的求解完全一

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

样, 不需作特殊处理。

2 “三相复合圆柱模型”的求解问题

下面讨论 Christensen 和 Lo[3] 提出的“三相复合圆柱模型”的求解以及单向纤维增强复合材料横向切变模量的计算问题。认为单向纤维增强复合材料是一种横观各向同性材料, 为了计算其横向切变模量, Christensen 和 Lo[3] 求解了垂直于纤维方向的平面问题。假定复合材料在无限远处经受剪切变形 γ_{xy}, Christensen 和 Lo[3] 取复合材料的位移分量为

$$u_{rc} = \frac{b}{4\mu}\left[\frac{2r}{b} + (\kappa + 1)a_3\frac{b}{r} + c_3\left(\frac{b}{r}\right)^3\right]\cos 2\theta \tag{19}$$

$$u_{\theta c} = \frac{b}{4\mu}\left[-\frac{2r}{b} - (\kappa - 1)a_3\frac{b}{r} + c_3\left(\frac{b}{r}\right)^3\right]\sin 2\theta \tag{20}$$

式中: μ 是待求的复合材料的切变模量; b 是“三相复合圆柱模型”中基体环的外半径。

基体的位移分量取为

$$u_{rm} = \frac{b}{4\mu_m}\left[a_2(\kappa_m - 3)\left(\frac{r}{b}\right)^3 + d_2\frac{r}{b} + c_2(\kappa_m + 1)\frac{b}{r} + b_2\left(\frac{b}{r}\right)^3\right]\cos 2\theta \tag{21}$$

$$u_{\theta m} = \frac{b}{4\mu_m}\left[a_2(\kappa_m + 3)\left(\frac{r}{b}\right)^3 - d_2\frac{r}{b} - c_2(\kappa_m - 1)\frac{b}{r} + b_2\left(\frac{b}{r}\right)^3\right]\sin 2\theta \tag{22}$$

式中, μ_m 是基体的切变模量。

纤维的位移分量取为

$$u_{rf} = \frac{b}{4\mu_f}\left[a_1(\kappa_f - 3)\left(\frac{r}{b}\right)^3 + d_1\frac{r}{b}\right]\cos 2\theta \tag{23}$$

$$u_{\theta f} = \frac{b}{4\mu_f}\left[a_1(\kappa_f + 3)\left(\frac{r}{b}\right)^3 - d_1\frac{r}{b}\right]\sin 2\theta \tag{24}$$

式中, μ_f 是纤维的切变模量。

显然, 以上位移分量皆满足平衡方程(17)和(18)。在文献[3]中, κ, κ_m 和 κ_f 分别取为

$$\left.\begin{aligned}\kappa &= 3 - 4\nu\\ \kappa_m &= 3 - 4\nu_m\\ \kappa_f &= 3 - 4\nu_f\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

上式意味着“三相复合圆柱模型”处于平面应变状态, 这是合理的。正如文献[4]中指出, 假定模型处于平面应力状态是不合理的。但是, 式(25)中 ν 的意义是模糊的。从式(25)看, 似乎认为“三相复合圆柱模型”中的复合材料、基体和纤维相都是各向同性材料。在文献[8]中, 假设 23 平面为各向同性面, κ 更被记为 $\kappa = 3 - 4\nu_{23}$。显然, 这与当初的前提条件是矛盾的。因为一开始即假定复合材料是一横观各向同性体, 而正是因为假定它是横观各向同性体, 才有了求横向切变模量的问题。因此, 根据式(12), 文献[3]以及文献[8]中 κ 的正确表达式应该是

$$\kappa = \frac{3 - \nu - 4\nu_{z(yz)}\nu_{x(zy)}}{1 + \nu} \tag{26}$$

式中各符号的意义同式(12)。

3 结 论

虽然采用“三相复合圆柱模型”得到的复合材料横向切变模量 μ 最终不依赖于 κ, 但是, 采用式(26)的 κ 使得弹性场各量的表达式从物理上和数学上都是正确的, 从而消除了 Christensen 和 Lo 的文章[3]以及 Christensen 的著作[8]中存在的模糊和矛盾之处。另外, 采用式(26)的 κ, 可以很容易地考虑基体材料或纤维的横观各向同性性质。例如, 玻璃纤维可以被认为是一种各向同性材料, 但是芳纶纤维和碳纤维都是严重各向异性材料[9]。对各种碳纤维微观结构的研究发现, 他们都可以比较准确地被认为是横观各向同性材料[10~12]。如果考虑这种因素, 则碳纤维的 κ_f 应该由式(26)而不是式(25)计算。

致 谢 本文得到云南省与北京大学省校合作项目(B9807G)的资助; 英国威尔士大学 B. L. Karihaloo 教授提供了有益的建议。在此表示感谢。

参考文献:

[1] Hill R. Theory of mechanical properties of fibre strengthened materials: I elastic behaviour[J]. *J Mech Phys Solids*, 1964, 12: 199-212.

[2] Hashin Z, Rosen B W. The elastic moduli of fibre-reinforced materials[J]. *J Appl Mech*, 1964, 31: 223-232.

[3] Christensen R, Lo K H. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models[J]. *J Mech Phys Solids*, 1979, 27: 315-330.

[4] 周 履, 范赋群. 复合材料力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1991.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

[5] Markenscoff X. On the dundurs correspondence between cavities and rigid inclusions[J]. *J Appl Mech*, 1993, 60: 260-264.

[6] Wang Jian-xiang, Karihaloo B L. Mode II and mode III stress singularities and intensities at a crack tip terminating on a transversely isotropic-orthotropic bimaterial interface [J]. *Proc Roy Soc London*, 1994, A444: 447-460.

[7] Nemat-Nasser S, Hori M. Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials [M]. Amsterdam: Elsevier Science, 1993.

[8] Christensen R. Mechanics of composite materials[M]. New York: John Wiley & Sons, 1979.

[9] Schwartz M. Composite materials-Vol Ⅰ: properties, nondestructive testing, and repair[M]. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1997.

[10] Edie D D. Pitch and mesophase fibers[A]. In: Figueiredo J L, *et al*. eds. Carbon Fibers Filaments and Composites[C]. NATO ASI Series, Vol 177, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990. 43-72.

[11] Tibbetts G G. Vapor-grown fibers[A]. In: Figueiredo J L, *et al*. eds. Carbon Fibers Filaments and Composites [C]. NATO ASI Series, Vol 177, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990. 73-94.

[12] Johnson D J. Structure and properties of carbon fibres[A]. In: Figueiredo J L, *et al*. eds. Carbon Fibers Filaments and Composites [C]. NATO ASI Series, Vol 177, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990. 119-146.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net