复合材料学报 第17卷 第2期 5月 2000年
ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA Vol 17 No. 2 May 2000

文章编号: 1000-3851(2000)02-0084-05

粘弹性基体中环绕纤维的环形裂纹的Ⅰ型和Ⅲ型应力强度因子

马晓光, 卢子兴, 王建祥*

(北京航空航天大学 固体力学研究所, 北京 100083) (*北京大学 力学与工程科学系, 北京 100871)

摘 要: 分析了粘弹性基体中环绕纤维的环形裂纹的Ⅰ型和Ⅲ型应力强度因子及其时间相关性。根据文献[1]、文献[2]中的弹性解, 求出了粘弹性基体中环绕纤维的环形裂纹的Ⅰ型和Ⅲ型应力强度因子在Laplace变换域内的解。对其进行Laplace数值反演后, 得到了相应的Ⅰ型和Ⅲ型应力强度因子在时间域内的变化曲线。结果表明, 给定长度的环形裂纹在尚未接触界面时, 其两端正则化的Ⅰ型和Ⅲ型应力强度因子均随时间增大而减小。

关键词: 粘弹性; 复合材料; 环形裂纹; 应力强度因子

中图分类号: TB330.1 **文献标识码**: A

MODE Ⅰ AND Ⅲ STRESS INTENSITY FACTORS FOR AN ANNULAR CRACK IN A VISCOELASTIC MATRIX SURROUNDING AN ELASTIC FIBER

MA Xiao-guang, LU Zi-xing, WANG Jian-xiang*

(Research Center of Solid Mechanics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

(*Department of Mechanics and Engineering Science, Beijing University, Beijing 100871)

Abstract: The axisymmetric problem of an infinite long fiber perfectly bonded to a viscoelastic matrix which contains an annular crack surrounding the fiber is investigated for the case of tension or torsion loading. After obtaining the Laplace transformed solution from the elastic analysis, a Legendre polynomial method is used to invert the Laplace-transform numerically. The time-dependent stress intensity factors at the crack tips are presented. The results show that when the annular crack is away from the interface, the normalized stress intensity factors at the crack tips decrease with increasing time.

Key words: viscoelasiticity; composite materials; annular crack; stress intensity factors

近年来, 一些文献研究了基体中环绕纤维的环形裂纹的应力强度因子。Wijeyewickrema 等[1], Young[2]和Han 等[3]分别研究了均质基体中环绕纤维的环形裂纹的Ⅰ型、Ⅲ型应力强度因子和非均质基体中环形裂纹的Ⅲ型应力强度因子; Liu 等[4]则研究了有限半径均质基体中环绕纤维的环形裂纹的Ⅰ型应力强度因子。他们均采用积分变换的方法将边值问题转化为第一类Cauchy 核型奇异积分方程, 并用 Erdogan[5]的配点法对其进行数值求解, 最后得到相应的应力强度因子。然而, 上述研究均限于基体为线弹性的情况。

考虑到高温下的陶瓷基体与高温、室温下的聚合物基体具有粘弹性特性, 其模量随时间变小, 会影响裂尖的应力奇异性, 并导致复合材料断裂性能的时间相关性。因此, 研究粘弹性基体中环绕纤维的环形裂纹的应力强度因子对研究纤维增强复合材料的破坏过程具有重要意义。文献[6]注意到这类问题的重要性, 并给出了几种典型材料的界面应力奇异性随时间的变化曲线, 但有关粘弹性基体中环绕纤维的环形裂纹的应力强度因子解还未见报道。

本文作者利用文献[1]、文献[2]中的弹性解, 得到了线性粘弹性基体中环绕弹性纤维的环形裂纹在LapLace 变换域内的Ⅰ型和Ⅲ型应力强度因子解。对其进行Laplace 数值反演后, 得到了相应的Ⅰ型

收稿日期: 1999-07-19; 收修改稿日期: 1999-09-15
基金项目: 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室资助项目。
作者介绍: 马晓光(1976), 男, 硕士; 卢子兴(1960), 男, 教授, 研究方向: 复合材料力学行为。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

和Ⅲ型应力强度因子随时间的变化曲线。结果表明, 给定长度的环形裂纹在尚未接触界面时, 其两端正则化的Ⅰ型和Ⅲ型应力强度因子均随时间增大而减小。

1 Laplace 变换域内的应力强度因子解

1.1 Ⅰ型应力强度因子

图 1 所示为粘弹性基体中含有环绕并垂直弹性纤维的环形裂纹的复合材料模型。为得到裂尖的Ⅰ型应力强度因子, 我们研究在环形裂纹表面作用载荷 $\sigma_{zz}^{m}(r,0,t)=-p_1(r,t)$ 的情况。

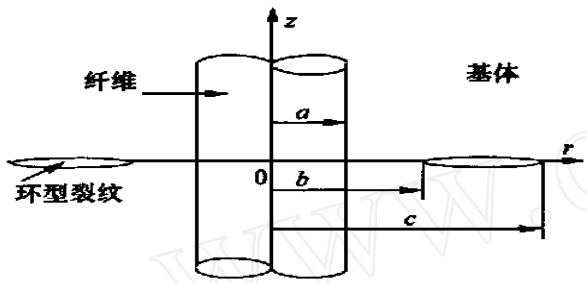

图 1 环绕纤维的基体环状裂纹

Fig. 1 An annular crack in the visco-elastic matrix surrounding an elastic fiber

由于允许粘弹性基体的泊松比 ν^{m} 值变化范围很小, 且实验表明它对应变率很不敏感, 即基本上不随时间变化, 因此我们假定 ν^{m} 是常数。同时, 我们假设模型的起始状态处于自然状态, 即 $t<0$ 时, 有 $\sigma_{ij}=u_i=0$, $(i,j=r,\theta,z)$。利用文献[7]中的方法, 对该均匀、各向同性、准静态的粘弹性轴对称问题采用单边 Laplace 变换, 则粘弹性基体中的非零位移和应力可用 Love 应力函数表示为

$$\bar{u}_r^{m}(r,z,p)=-\frac{1}{2p\bar{\mu}^{m}(p)}\frac{\partial^2\bar{x}}{\partial z\partial r},$$

$$\bar{u}_z^{m}(r,z,p)=-\frac{1}{2p\bar{\mu}^{m}(p)}\left[2(1-\nu^{m})\nabla^2\bar{x}-\frac{\partial^2\bar{x}}{\partial z^2}\right],$$

$$\bar{\sigma}_{rr}^{m}(r,z,p)=\frac{\partial}{\partial z}\left[\nu^{m}\nabla^2\bar{x}-\frac{\partial^2\bar{x}}{\partial r^2}\right],$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta}^{m}(r,z,p)=\frac{\partial}{\partial z}\left[\nu^{m}\nabla^2\bar{x}-\frac{1}{r}\frac{\partial\bar{x}}{\partial r}\right],$$

$$\bar{\sigma}_{zz}^{m}(r,z,p)=\frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\nu^{m})\nabla^2\bar{x}-\frac{\partial^2\bar{x}}{\partial z^2}\right],$$

$$\bar{\sigma}_{rz}^{m}(r,z,p)=\frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\nu^{m})\nabla^2\bar{x}-\frac{\partial^2\bar{x}}{\partial z^2}\right] \quad (1)$$

其中 $\bar{x}(r,z,p)$ 为 Laplace 变换域内的 Love 应力函数, 它满足双调和方程 $\nabla^4\bar{x}=0$, $\bar{\mu}^{m}(p)$ 为 Laplace 变换域内粘弹性基体的剪切模量, p 为 Laplace 变换参量。

(1) 式及以下各式中, 上标 f, m 分别代表纤维和基体, 而

$$\bar{f}(p)=\int_0^{\infty}f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t \quad (2)$$

表示函数 $f(t)$ 的单边 Laplace 变换。

在 Laplace 变换域内, 界面连续条件可以表示为

$$\bar{u}_r^{f}(a,z,p)=\bar{u}_r^{m}(a,z,p),$$
$$\bar{u}_z^{f}(a,z,p)=\bar{u}_z^{m}(a,z,p),\quad 0\le z<\infty \quad (3)$$

$$\bar{\sigma}_{rr}^{f}(a,z,p)=\bar{\sigma}_{rr}^{m}(a,z,p),$$
$$\bar{\sigma}_{rz}^{f}(a,z,p)=\bar{\sigma}_{rz}^{m}(a,z,p),\quad 0\le z<\infty \quad (4)$$

$z=0$ 处的边界条件可以表示为

$$\bar{\sigma}_{rz}^{f}(r,0,p)=0,\ \bar{u}_z^{f}(r,0,p)=0,\ 0\le r\le a, \quad (5)$$

$$\bar{\sigma}_{rz}^{m}(r,0,p)=0,\ a\le r<\infty, \quad (6)$$

$$\bar{\sigma}_{zz}^{m}(r,0,p)=-\bar{p}_1(r,p),\ b<r<c, \quad (7)$$

$$\bar{u}_z^{m}(r,0,p)=0,\ a\le r<b,\ c<r<\infty \quad (8)$$

由以上各式可以看出, Laplace 变换域内的基本方程按经典的弹性-粘弹性对应原理与文献[1]中给出的线弹性基本方程相似。

根据以上条件, 按照文献[1]中的方法, 在引入位错密度函数后, 利用 Hankel 变换和 Fourier 变换将边值问题转化为第一类 Cauchy 核型奇异积分方程, 并用 Erdogan[5] 的配点法进行数值求解, 最后求出正则化后的应力强度因子 K_{I}'。在这里我们考虑 $p_1(r,t)=\sigma_0H(t)$ 下的蠕变情况。σ_0 为常应力, $H(t)$ 为 Heaviside 单位阶跃函数。文中所有算例均取 40 个 Chebyshev 多项式的零点作为配点进行数值求解。

按文献[1]中给出的方法, 可以将正则化后的应力强度因子表示为

$$K_{\mathrm{I}}'(b,t)=\frac{K_{\mathrm{I}}(b,t)}{\sigma_0[(c-b)/2]^{1/2}}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\bar{F}_1(-1,p)\mathrm{d}p \quad (9)$$

$$K_{\mathrm{I}}'(c,t)=\frac{K_{\mathrm{I}}(c,t)}{\sigma_0[(c-b)/2]^{1/2}}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\bar{F}_1(1,p)\mathrm{d}p \quad (10)$$

式中的密度函数 $\bar{F}_1(-1,p)$, $\bar{F}_1(1,p)$ 可以从以下第一类 Cauchy 核型奇异积分方程解出

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\tau-\rho}+\bar{K}_1(\rho,\tau,p)\right]\frac{\bar{F}_1(\tau,p)}{(1-\tau^2)^{1/2}}\mathrm{d}\tau=-\bar{P}_1(\rho,p),\ -1<\rho<1 \quad (11)$$

核 $\bar{K}_1(\rho,\tau,p)$, $\bar{P}_1(\rho,p)$ 可由文献[1]求出, 但需将其

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

中粘弹性基体的剪切模量 $\mu^{m}(t)$ 替换为 $p\overline{\mu^{m}}(p)$。

1.2 Ⅲ型应力强度因子

对于图 1 所示的复合材料模型，为了获得Ⅲ型应力强度因子，我们研究在基体裂纹表面作用载荷 $\sigma_{rz}^{m}(r,0,t)=-p_3(r,t)$ 的情况。

同样假定粘弹性基体的泊松比 ν^{m} 是常数，并且模型的起始状态处于自然状态，因此可以对该均匀、各向同性、准静态的粘弹性轴对称问题进行单边 Laplace 变换。在 Laplace 变换域内粘弹性基体中的非零位移和应力可以表示为

$$\overline{\sigma_{rz}^{m}}(r,z,p)=p\overline{\mu^{m}}(p)\frac{\partial\overline{u_{\theta}^{m}}}{\partial z},$$

$$\overline{\sigma_{r\theta}^{m}}(r,z,p)=p\overline{\mu^{m}}(p)\cdot\left[\frac{\partial\overline{u_{\theta}^{m}}}{\partial r}-\frac{\overline{u_{\theta}^{m}}}{r}\right] \tag{12}$$

式中，$\overline{\mu^{m}}(p)$ 为 Laplace 变换域内粘弹性基体的剪切模量，p 为 Laplace 变换参量。

在 Laplace 变换域内，界面连续条件可以表示为

$$\overline{u_{\theta}^{f}}(a,z,p)=\overline{u_{\theta}^{m}}(a,z,p),$$

$$\overline{\sigma_{r\theta}^{f}}(a,z,p)=\overline{\sigma_{r\theta}^{m}}(a,z,p),\quad 0\le z<\infty \tag{13}$$

$z=0$ 处的边界条件可以表示为

$$\overline{u_{\theta}^{f}}(r,0,p)=0,\quad 0\le r\le a, \tag{14}$$

$$\overline{\sigma_{rz}^{m}}(r,0,p)=-\overline{p_3}(r,p),\quad b<r<c, \tag{15}$$

$$\overline{u_{\theta}^{m}}(r,0,p)=0,\quad a\le r\le b,\ c<r<\infty \tag{16}$$

由以上各式可以看出，Laplace 变换域内的基本方程按经典的弹性-粘弹性对应原理与文献[2]中给出的线弹性基本方程相似。

按照文献[2]中的方法，利用 Hankel 变换和 Fourier 变换将边值问题转化为第一类 Cauchy 核型奇异积分方程，并用 Erdogan[5]的配点法进行数值求解，最后求出正则化后的应力强度因子 $K'_{Ⅲ}$。在这里我们考虑 $p_3(r,t)=\mu^{m}(t)\theta_0 rH(t)$ 下的蠕变情况。θ_0 为 z 方向单位长度的扭转角，$H(t)$ 为 Heaviside 单位阶跃函数。按文献[2]中给出的方法，可以将应力强度因子表示为

$$K'_{Ⅲ}(b,t)=\frac{K_{Ⅲ}(b,t)}{\tau_0[(c-b)/2]^{1/2}}=\frac{1}{2\pi i}\int_{r}\overline{F_3}(-1,p)\,dp \tag{17}$$

$$K'_{Ⅲ}(c,t)=\frac{K_{Ⅲ}(c,t)}{\tau_0[(c-b)/2]^{1/2}}=\frac{1}{2\pi i}\int_{r}\overline{F_3}(1,p)\,dp \tag{18}$$

式中的密度函数 $\overline{F_3}(-1,p)$，$\overline{F_3}(1,p)$ 可以从下面的第一类 Cauchy 核型奇异积分方程解出

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\tau-\rho}+\overline{K_3}(\rho,\tau,p)\right]\frac{\overline{F_3}(\tau,p)}{(1-\tau^2)^{1/2}}d\tau=$$

$$-\frac{\pi}{p\overline{\mu^{m}}(p)}\overline{P_3}(\rho,p),\quad -1<\rho<1 \tag{19}$$

核 $\overline{K_3}(\rho,\tau,p)$，$\overline{P_3}(\rho,p)$ 可由文献[2]求出，但需将其中粘弹性基体的剪切模量 $\mu^{m}(t)$ 替换为 $p\overline{\mu^{m}}(p)$。

2 基体的粘弹性模型

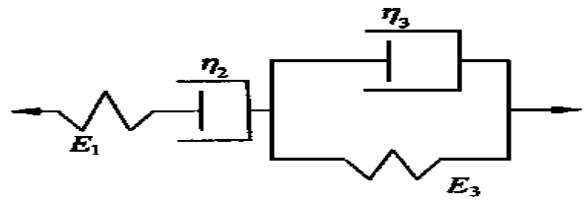

图 2　Burgers 模型示意图

Fig. 2　Burgers model

树脂基体的粘弹性用图 2 所示四参量 Burgers 模型描述[6]，在 Laplace 变换域内它的蠕变柔度为

$$\overline{F}(p)=\frac{(1/E_1+1/E_3)}{p}+\frac{1}{\eta_1 p^2}-\frac{1}{E_3(p+E_3/\eta_3)} \tag{20}$$

而粘弹性基体的剪切模量可以表示为

$$\overline{\mu^{m}}(p)=\frac{1}{2(1+\nu^{m})p^2\overline{F}(p)} \tag{21}$$

以 ED-6 树脂为例，它的四参量为[6]

$E_1=3.27$ GPa，$\eta_1=8000$ GPa×hr，

$E_3=1.8$ GPa，$\eta_3=300$ GPa×hr，

粘弹性基体的泊松比 $\nu^{m}=0.35$，这里采用表 1 中所示的三种典型纤维进行数值计算。

表 1　几种典型增强纤维的性能参数[8]

Table 1　Properties of some typical fibers

纤维	拉伸模量/GPa	泊松比 ν^{f}
PAN-carbon AS[d]	220	0.2
S glass	86.9	0.22
E glass	72.4	0.2

在得到 Laplace 变换域内的应力强度因子解之后，利用文献[9]中介绍的数值反演方法对其进行 Laplace 数值反演，并得到了相应的应力强度因子随正则化时间因子 E_3t/η_3 的变化曲线，结果示于图 3 至图 6 中。

3 讨论和结论

(1) 由图 3、图 4 可以看出，对于Ⅰ型问题，当 $\mu^{f}\gg\mu^{m}$ 并且 $b\to a$ 时(即环形裂纹十分靠近纤维)，有 $K'_{Ⅰ}(b,t)<K'_{Ⅰ}(c,t)$，即环形裂纹有远离纤维向外扩展的趋势；而当环形裂纹远离纤维一定距离后，有 $K'_{Ⅰ}(b,t)>K'_{Ⅰ}(c,t)$，即环形裂纹有向纤维扩展的趋势；而在任何位置，均有 $K'_{Ⅲ}(b,t)<K'_{Ⅲ}(c,t)$，这表明对于Ⅲ型问题，环形裂纹总是有远离纤维向外扩

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

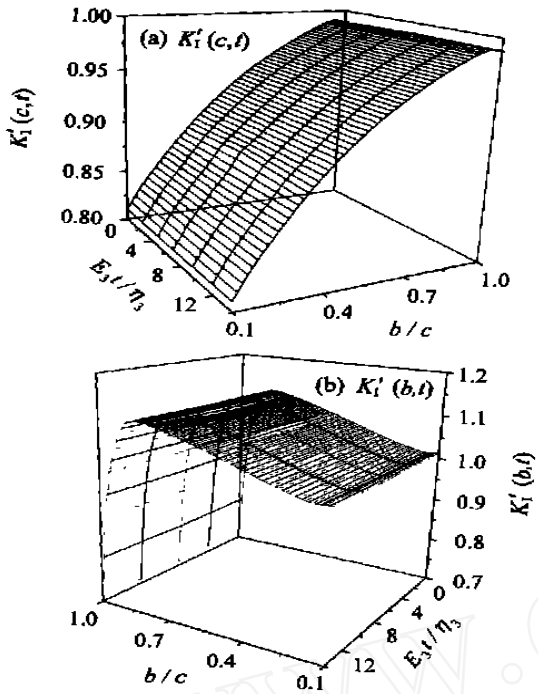

图3 Ⅰ型应力强度因子随时间及裂纹位置的变化曲线(碳纤维), a/c= 0.1

Fig. 3 The variation of normalized mode Ⅰ SIF with b/c and normalized time (carbon fiber), a/c= 0.1

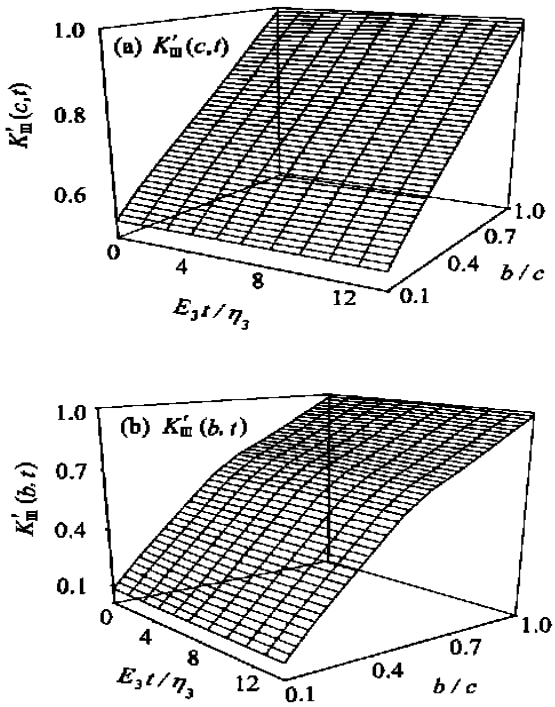

图4 Ⅲ型应力强度因子随时间及裂纹位置的变化曲线(碳纤维), a/c= 0.1

Fig. 4 The variation of normalized mode Ⅲ SIF with b/c and normalized time (carbon fiber), a/c= 0.1

展的趋势。当 $b/c\to1.0$ 时(即裂纹尺寸非常小), 时间或剪切模量比 $\mu^{\mathrm{m}}(t)/\mu^{\mathrm{f}}(t)$ 的变化对正则化的应力强度因子只产生很小的影响, 此时 $K_{\mathrm{I}}'(c,t)$、$K_{\mathrm{I}}'(b,t)$、$K_{\mathrm{III}}'(c,t)$、$K_{\mathrm{III}}'(b,t)\to1.0$, 即与均质、各向同性基体中处于平面应变状态下的 Griffith 裂纹有同样的应力强度因子解。这说明基体粘弹性对微小裂纹的影响不大。当固定 a/c 且 $b\to a$ 时(即裂纹向界面扩展), 对任意时刻, $K_{\mathrm{I}}'(b,t)$ 均有先增大后减小的趋势(见图 3(b)), 而其它的正则化应力强度因子均始终减小。这个结论与文献[4]的结论相似。当时间 $t\to\infty$ 时, 粘弹性基体的松弛模量 $E^{\mathrm{m}}(t)\to0$, 这时基体与纤维的剪切模量比 $\mu^{\mathrm{m}}(t)/\mu^{\mathrm{f}}(t)\to0$, 由以上结果可以求出此时的正则化应力强度因子并将其作为任意位置正则化应力强度因子的下限。(因为对于给定长度的环型裂纹, $K_{\mathrm{I}}'(c,t)$、$K_{\mathrm{I}}'(b,t)$、$K_{\mathrm{III}}'(c,t)$ 和 $K_{\mathrm{III}}'(b,t)$ 均随时间增大而减小)

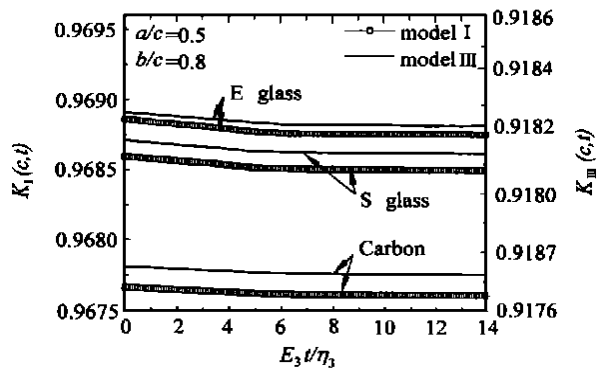

图5 c 端的Ⅰ型和Ⅲ型应力强度因子随时间的变化曲线(典型纤维)

Fig. 5 The variation of normalized mode Ⅰ and Ⅲ SIF $K_{\mathrm{I}}'(c,t)$ with normalized time (typical fibers)

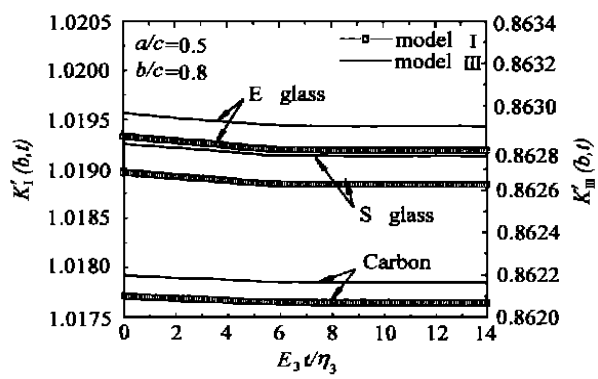

图6 b 端的Ⅰ型和Ⅲ型应力强度因子随时间的变化曲线(典型纤维)

Fig. 6 The variation of normalized mode Ⅰ and Ⅲ SIF $K_{\mathrm{I}}'(b,t)$ with normalized time (typical fibers)

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

(2) 由图 5 和图 6 可以看出当 $b> a$ 时(即环形裂纹尚未接触界面), 对于给定长度的环形裂纹, $K_{\mathrm{I}}'(c, t)$、$K_{\mathrm{I}}'(b, t)$、$K_{\mathrm{III}}'(c, t)$ 和 $K_{\mathrm{III}}'(b, t)$ 均随时间增大而减小。这是因为粘弹性基体与纤维的剪切模量比 $\mu^{\mathrm{m}}(t)/\mu^{\mathrm{f}}(t)$ 随时间增大而减小, 而由文献[1]、文献[2]的线弹性解可知, 对于给定长度的环形裂纹, 当 $\mu^{\mathrm{m}}/\mu^{\mathrm{f}}$ 减小时 $K'(b)$, $K'(c)$ 均减小。该结论表明, 在粘弹性基体中环型裂纹的扩展动力随时间增大是趋于缓和的。对于相同尺寸的裂纹, $K_{\mathrm{III}}'(t)$ 随时间的变化数值小于 $K_{\mathrm{I}}'(t)$ 的变化。图 5 和图 6 还表明, 当纤维的泊松比变化不大时, 若减小纤维的拉伸模量, 则 $K_{\mathrm{I}}'(c, t)$、$K_{\mathrm{I}}'(b, t)$、$K_{\mathrm{III}}'(c, t)$、$K_{\mathrm{III}}'(b, t)$ 均增大。

需要指出, 本文中给出的计算粘弹性基体中环形裂纹应力强度因子时间相关性的办法, 对于文献[3]、文献[4]及其它有关文献中的线弹性裂纹问题是有效的。计算过程中玻璃纤维和碳纤维均假设是各向同性的。显然, 若考虑非线性粘弹性的影响, 选取更合适的粘弹性模型并考虑非理想界面的情况, 还需要大量的实验和理论研究工作。

此外, 本文中仅给出了粘弹性基体中环形裂纹尚未接触纤维时的应力强度因子解。对于粘弹性基体中的环形裂纹接触界面时的应力强度因子解, 将另文发表。

参 考 文 献

[1] Wijeyewickrema A C, Keer L M, Hirashima K, Mura T. The annular crack surrounding an elastic fiber in a tension field[J]. *Int J Solids and Structures*, 1991, 27(3): 315～328.

[2] Young Jong Kim. Stress intensity factor for the annular crack surrounding an elastic fiber under torsion[J]. *Int J Solids and Structures*, 1997, 34(19): 2463～2476.

[3] Li Han Xue, Wang Duo. The annular crack in a nonhomogeneous matrix surrounding a fiber under torsional loading—— Ⅰ. Inner crack tip away from or terminating at the interface[J]. *Engng Fracture Mechanics*, 1996, 53(3): 457～464.

[4] Liu Yu Fu, Yoshihisa Tanaka, Dhitoshi Masuda. Analysis of the fiber-matrix cylindrical model with a circumferential crack [J]. *Int J Fract*, 1997, 88(1): 87～105.

[5] Erdogan F, Gupta G D, Cook T S. Numerical solution of singular integral equations. In Mechanics of Fracture Ⅰ: Methods of Analysis and Solution of Crack Problems (Edited by Sih G C) [C]. Leyden: Noordhoff International Publishing, 1973. 368～425.

[6] 张双寅. 纤维桥联粘弹性基体裂纹的界面应力奇异性[C]. 见: 党嘉立, 主编. 全国第十届复合材料学术会议论文集. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1998. 512～515.

[7] Love A E H. A Treatise on the Mathematics Theory of Elasticity[M]. New York: Dover Publishing, 1944. 274～276.

[8] Mallick P K. Fiber-Reinforced Composites: Materials, Manufacturing and Design[M]. New York and Basel: Marcel Dekker, Inc, 1988. 18～19.

[9] Sih G C, Chen E P. Cracks in Composite Materials[C]. In: Sih G C, ed. Mechanics of Fracture. The Hague: Martinus Nijhoff, 1981. 437～439.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net