第 16 卷 第 2 期 复 合 材 料 学 报 Vol 16 No. 2
1999 年 5 月 ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA May 1999

复合材料圆管构件等效模量的计算方法

文献民* 王本利 马兴瑞
(哈尔滨工业大学 137信箱, 哈尔滨 150001)

摘 要 针对任意壁厚的复合材料圆管构件的等效弹性模量和剪切模量提出了高阶理论计算方法, 它考虑了构件的横向剪切效应以及层合材料的三维本构关系, 并在相同壁厚条件下对三种缠绕方式([0 /(±θ)$_n$]$_S$, [(±θ)$_n$]$_S$ 和[90 /(±θ)$_n$]$_S$)的等效模量进行了预测, 并且与经典层合板理论的预测结果进行了比较, 该方法可用于复合材料杆件结构的设计中。

关键词 复合材料圆管构件, 复合材料薄壁梁, 等效模量
中图分类号 TB301; O342

复合材料圆管构件具有较高的比强度、比刚度和零膨胀特性, 因此被广泛地应用于高性能、低重量要求的结构中。这些应用主要包括可移动桥梁构件, 直升飞机中的支撑构件和推拉杆及其它类似的飞行器结构构件。

圆管构件还主要应用于宇航工业, 例如将负膨胀的纤维按一定比例放入正膨胀的基体中, 可以制造出零膨胀或低膨胀杆件, 用来构制航天器及卫星的天线支架、太阳能电池帆板支架、卫星的桁架结构以及未来大型空间站的结构构件等。在大型航天器结构中广泛使用高比强度、高比刚度和零膨胀特性的复合材料杆件, 对减小航天器结构自重、提高有效荷载具有重大意义。

在复合材料杆件结构的设计中, 可以使用各种通用的结构分析程序, 但必须根据杆件的缠绕方式编制单元模型; 另一方面, 可以建立构件的等效模型, 用具有等效模量的各向同性杆件代替各向异性的复合材料杆件, 充分利用各种分析方法对杆件结构进行分析和设计。Tsai[1]利用层合板沿梁轴线方向的弹性模量 E_1^0 和各种横截面的截面模数 I 的乘积 $E_1^0 I$ 对薄壁梁构件的弯曲变形进行了分析, Wild[2] 在纤维缠绕圆柱管的分析中, 忽略了管壁曲率的影响, 利用层合板理论计算圆管纵向平面内的等效模量; Vinson 和 Sierakowski[3] 将经典层合板理论推广到简单梁理论, 由层合板的刚度系数(A_{11}、B_{11}、D_{11})导出梁的刚度系数; Barbero[4] 将薄壁梁模型化为具有等效模量的层合板, 并利用 Whitney[5] 和 Tsai 层合梁等效模量的计算方法, 提出了薄壁梁的一阶剪切变形理论。上述分析方法仅限于薄壁梁的等效模量 E 的计算。无法计算等效剪切模量 G 以及截面剪力修正系数 k。本文中利用梁的高阶变形理论, 结合三维各向异性本构关系, 给出了任意壁厚的复合材料圆管杆件的三个等效参数(E、G 和 k)的计算方法, 设计人员可以利用这些参数对复合材料杆件结构进行分析。文中还对三种纤维缠绕方法([0 /(±θ)$_n$]$_S$, [(±θ)$_n$]$_S$ 和[90 /(±θ)$_n$]$_S$)的等效模量进行了预测和比较。

收修改稿、初稿日期: 1998-03-06, 1997-11-30。国防95预研资助项目(A 966000-50)

* 河北建筑科学院教师, 目前在哈尔滨工业大学攻读博士学位

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

1 基本理论

1.1 位移模式

考虑复合材料圆管梁, 其长度为L, 壁厚为h, 横截面中面的曲率半径为R, 外径为D, 如图1所示。假设$D \ll L$, 并且管子的厚度不受限制。这里采用Cartesian 直角坐标系(x, y, z)和曲线坐标系(x, s, n)。环向坐标轴s的指向沿中面周线的切线方向, 逆时针为正, 坐标轴n沿着中面的法线方向, 如图1所示, 材料为各向异性。

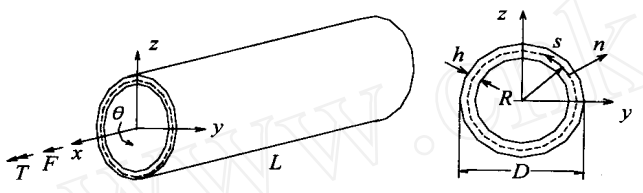

图1 坐标系及梁横截面

Fig. 1 Coordinate and beam cross-section

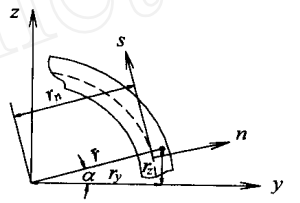

图2 向量$\bar{r}$与r_y和r_z的关系

Fig. 2 Relation between vector $\bar{r}$ and r_y, r_z

层合材料的等效模量依赖于铺层顺序及变形模式, 根据Kim[6]提出的任意空心截面梁的基本假设条件, 并且忽略圆管梁横截面的扭转翘曲变形, 可以得到圆管截面梁的位移函数

$$\begin{aligned} u(x,s,n) &= u_0(x) - r_y\{\phi_y(x) + \frac{4r_y^2}{3D^2}[v_0'(x) - \phi_y(x)]\} - \\ &\quad r_z\{[\phi_z(x) + \frac{4r_z^2}{3D^2}[w_0'(x) - \phi_z(x)]\} \\ u_s(x,s,n) &= v_0(x)\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}s} + w_0(x)\frac{\mathrm{d}\bar{z}}{\mathrm{d}s} + \theta(x)[r_n(s) + n] \\ u_n(x,s,n) &= v_0(x)\frac{\mathrm{d}\bar{z}}{\mathrm{d}s} - w_0(x)\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}s} \end{aligned} \tag{1}$$

式中: u_s、u_n和u分别表示沿曲线坐标系的切向、法向以及轴向的位移, $u_0(x)$、$v_0(x)$和$w_0(x)$分别代表沿x、y、z方向的刚体位移, 而$\phi_y(x)$、$\phi_z(x)$表示绕z和y的转角, $\theta(x)$表示绕x的扭转角, 方程$y = \bar{y}(s)$和$z = \bar{z}(s)$表示梁横截面闭合的中面周线, 撇号“ ”代表对x的一次微分。函数r_n定义为

$$r_n(s) = R \tag{2}$$

函数r_y和r_z分别表示矢量$\bar{r}$在y和z方向上的分量

$$r_y = (R + n)\cos(\alpha), \quad r_z = (R + n)\sin(\alpha) \tag{3}$$

如图2所示。

1.2 简化的本构关系

纤维缠绕梁的第i层在(x, s, n)坐标系下的本构关系为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{ss} \\ \sigma_{nn} \\ \sigma_{sn} \\ \sigma_{nx} \\ \sigma_{xs} \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & \bar{Q}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{36} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{ss} \\ \varepsilon_{nn} \\ \gamma_{sn} \\ \gamma_{nx} \\ \gamma_{xs} \end{Bmatrix}_i \tag{4}$$

式中, $\bar{Q}_{ij}$为正轴刚度矩阵Q_{ij}经坐标转换后得到的刚度矩阵。

由文献[6]给出的基本假设, 梁壁上任意一点的应变分量为ε_{xx}, γ_{xs}, γ_{nx}

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xs} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial x}, \quad \gamma_{xn} = \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial x} \tag{5}$$

这样, 式(4)可以简化为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xs} \\ \tau_{nx} \end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & \\ 0 & 0 & C_{33} \end{Bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \gamma_{xs} \\ \gamma_{nx} \end{Bmatrix}_i \tag{6}$$

其中:

$$C_{11} = \bar{Q}_{11} + \frac{2\bar{Q}_{12}\bar{Q}_{13}\bar{Q}_{23} - \bar{Q}_{12}^2\bar{Q}_{33} - \bar{Q}_{13}^2\bar{Q}_{22}}{\bar{Q}_{22}\bar{Q}_{33} - \bar{Q}_{23}^2}$$

$$C_{12} = \bar{Q}_{16} + \frac{\bar{Q}_{12}\bar{Q}_{23}\bar{Q}_{36} - \bar{Q}_{12}\bar{Q}_{26}\bar{Q}_{33} + \bar{Q}_{13}\bar{Q}_{23}\bar{Q}_{26} - \bar{Q}_{13}\bar{Q}_{22}\bar{Q}_{36}}{\bar{Q}_{22}\bar{Q}_{33} - \bar{Q}_{23}^2}$$

$$C_{22} = \bar{Q}_{66} + \frac{2\bar{Q}_{23}\bar{Q}_{26}\bar{Q}_{36} - \bar{Q}_{26}^2\bar{Q}_{33} - \bar{Q}_{36}^2\bar{Q}_{22}}{\bar{Q}_{22}\bar{Q}_{33} - \bar{Q}_{23}^2}$$

$$C_{33} = \bar{Q}_{55} - \frac{\bar{Q}_{45}^2}{\bar{Q}_{44}}$$

将几何关系代入应力-应变关系式中, 梁壁中的应力就可以表示为梁横截面位移函数的形式。

1.3 梁的内力表达式

将壁板上的应力沿横截面积分, 可以得到作用在横截面上的合力以及合力矩

$$F(x) = \iint_{h/2}^{\pi/2} \sigma_{xx}(R+n)\,\mathrm{d}n\mathrm{d}\alpha$$

$$V_y(x) = V_z(x) = \iint_{h/2}^{\pi/2} \left(\tau_{xs}\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}s} + \tau_{xn}\frac{\mathrm{d}\bar{z}}{\mathrm{d}s}\right)(R+n)\,\mathrm{d}n\mathrm{d}\alpha$$

$$T(x) = \iint_{h/2}^{\pi/2} \sigma_{xx}\left[r_y\left(\tau_{xs}\frac{\mathrm{d}\bar{z}}{\mathrm{d}s} - \tau_{xn}\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}s}\right) - r_z\left(\tau_{xs}\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}s} + \tau_{xn}\frac{\mathrm{d}\bar{z}}{\mathrm{d}s}\right)\right](R+n)\,\mathrm{d}n\mathrm{d}\alpha$$

$$M_y(x) = M_z(x) = -\iint_{h/2}^{\pi/2} \sigma_{xx} r_z (R+n)\,\mathrm{d}n\mathrm{d}\alpha \tag{7}$$

式中: $F(x)$、$V_y(x)$、$V_z(x)$ 分别表示沿 x 方向的轴力以及沿 y、z 方向的剪力, $T(x)$、$M_y(x)$、$M_z(x)$ 分别表示绕 x 轴的扭矩和绕 y、z 轴的弯矩。当铺层为对称均衡铺设时, 合力和合力矩可用以下简单形式来表达:

$$F(x) = K_{11}u_0'(x), V_z(x) = K_{22}[w_0'(x) - \phi_z(x)], T(x) = K_{33}\theta'(x), M_y(x) = K_{44}\phi_z(x) \tag{8}$$

这里, K_{11}～K_{44} 为构件的等效刚度系数, 方程(8)的表达形式与各向同性材料梁的轴向拉压、横向剪切、扭转和弯曲的变形方程是一致的, 由材料力学可知

$$K_{11} = EA, \quad K_{22} = kGA, \quad K_{33} = GJ_p, \quad K_{44} = EI_y \tag{9}$$

这样我们可以根据式(9)计算复合材料圆管梁的等效弹性模量 E 和剪切弹性模量 G。式中: A 为横截面面积, I_y 为绕 y 轴的惯性矩, J_p 为绕 x 轴的极惯性矩, k 为截面剪力修正系数。

2 计算实例

本文中采用经典层合板理论和梁的高阶变形理论对等效弹性模量对三种不同缠绕方案的等效模量进行了比较计算, 铺层材料均选择 T300/5208, 其正轴工程常数为

E_{11}= 146.85 GPa, E_{22}= E_{33}= 11.03 GPa, G_{12}= G_{13}= 6.21 GPa

G_{23}= 4.826 GPa, ν_{12}= ν_{13}= 0.28, ν_{23}= 0.5

三种铺设方案分别为: (a) $[0°/\pm\theta_n]_S$、(b) $[\pm\theta_n]_S$ 和(c) $[90°/\pm\theta_n]_S$。杆件的外径均为 101.6 mm, 铺层的厚度为 0.127 mm, 缠绕角度 θ 的变化范围为 1～90°, $\pm\theta$ 铺层的数目取为 $4\times n$, n= 1, 2, …, 30。我们首先取 n= 1, 将经典理论和高阶理论对三种缠绕方案的等效弹性模

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

量的预测结果绘成图3。

由图3可以看出在(b)方案中,经典理论与高阶理论的预测结果吻合得非常好,(a)方案的高阶理论的预测结果在30°～40°缠绕角度之间比经典理论略小;而(c)方案的高阶理论的预测结果在10°～60°缠绕角度之间比经典理论略小,这主要是由简化的三维本构关系(6)中系数C_{11}的第二项造成的,在(b)方案中该项沿整个横截面上的积分结果因相邻两层铺设特点而互相抵消;而(a)、(c)方案中0°和90°铺层对弹性模量的贡献无法抵消,特别是90°缠绕层沿x方向的正轴弹性系数E_{22}远小于0°缠绕层沿该方向的弹性系数E_{11},所以(c)方案的高阶理论预测结果与相应的经典理论相比相差较多。

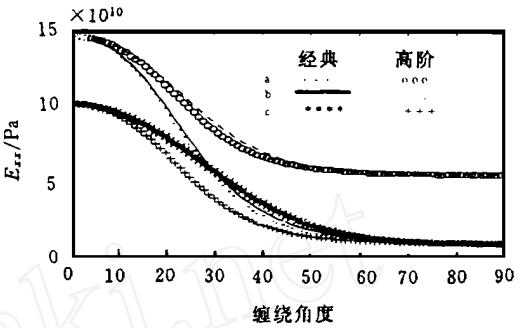

图3 三种缠绕方案的等效弹性模量

Fig. 3 Effective elastic modulus of the three winding

当n= 1, 2, …, 30时,本文中将高阶理论对三种方案中不同缠绕角度杆件的弹性模量和剪切模量的预测结果用等值线表示于图4和图5中。

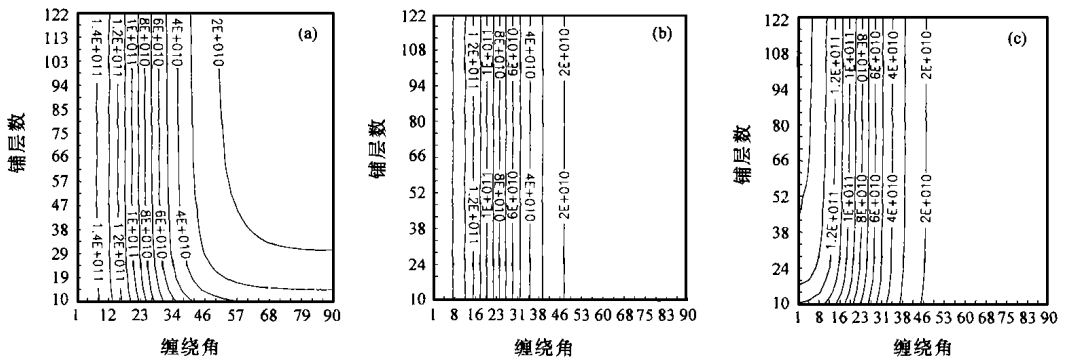

图4 三种缠绕方案的等效弹性模量等值线 Fig. 4 Effective elastic modulus contours of the three winding

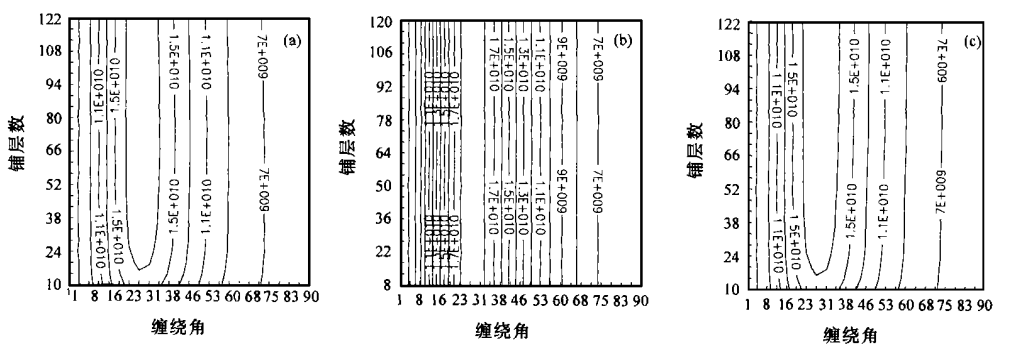

图5 三种缠绕方案的等效剪切模量等值线 Fig. 5 Effective shearing modulus contours of the three winding

由图4可以看出,在相同缠绕角度条件下并且铺层数目较少时,(a)方案可以提高梁的等效弹性模量,(c)方案降低了梁的等效弹性模量,这与文献[8]的预测和实验结果相吻合,并且这两种铺设方案对等效弹性模量的影响都随±θ铺层数目的增加而减小,最后趋近于(b)铺设方

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

案所得出的等效弹性模量。由图5可以看出, 在相同缠绕角度条件下并且铺层数目较少时, (a)、(c)两种铺设方案都降低了梁的等效剪切模量, 其降低程度随±θ铺层数目的增加而逐渐减小并且趋近于(b)铺设方案所得出的等效剪切模量。

3 结　论

经过以上分析, 我们可以得出以下结论:

(1) 本文中采用梁的高阶变形理论, 考虑梁壁板中实际应力状态, 建立了各向异性圆管梁与各向同性材料梁之间的静力学等效模型, 给出了复合材料圆管梁等效弹性模量 E 和剪切模量 G 以及截面剪力修正系数 k 的计算方法, 在不改变梁截面几何特性(A, I_y, I_p)的情况下, 可使用等效模量对由复合材料杆件所组成的结构进行分析。克服了经典理论只能预测等效弹性模量 E 的不足。

(2) 复合材料圆管梁的等效弹性模量受0 和90 铺层的影响, 但其影响效果随±θ铺层数目的增加而减小; 0 和90 铺层对复合材料圆管梁的等效剪切模量的影响程度是相同的, 并且随±θ铺层数目的增加而减小, 说明高阶模型理论的预测结果是符合实际情况的。

参 考 文 献

1 Tsai S W, Hahn T H. Introduction to Composites Design. Lancaster PA: Technomic Publish Company, 1980

2 Wild P M, Vickers G W. Analysis of filament-wound cylindrical shells under combined centrifugal, pressure and axial loading

3 Vinson J R, Sierakowski R L. The Behavior of Structure Composite of Composite Materials. Dordrecht: Martinus Niuhoff Publishers, 1987

4 Barbero E J, Roberto L A, Julio F D. On the mechanics of thin-walled laminated composite beams. *J Comp Mater*, 1993, 27(8): 806～829

5 Whitney J M, Browning C E, Mair A. Analysis of the flexure test for laminated composite material. In: Composite Material: Testing and Design (Third Conference) ASTM STP 546. American Society for Testing and Materials, 1975. 30～45

6 Kim C, White S R. Analysis of thick hollow composite beams under general loadings. *Composite Structures*, 1996, 34: 263～277

7 Nixon M W. Extension-twist coupling of composite circular tubes with application to tilt rotor blade design. In: 28th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. AIAA Washington D C, 1987. 295～303

8 Levi H, Ishai O, *et al*. Mechanical performance of thin-walled tubular composite elements under uniaxial loading, Part 1: Tensile behavior. *Composite Structures*, 1995, 31: 163～170

ON THE EFFECTIVE MODULUS OF COMPOSITE TUBULUS ELEMENT

Wen Xianmin　　Wang Benli　　Ma Xingrui

(Harbin Institute Technology137, Harbin 150001)

Abstract　The high order theory about the effective elastic modulus and shearing modulus for composite tubular element with arbitrary wall thickness was presented. The transverse shearing deformation effects and three-dimensional elastic effects were included. The effective moduli were evaluated for three different lay-ups ($[0/(\pm\theta)_n]_S$, $[(\pm\theta)_n]_S$ and $[90/(\pm\theta)_n]_S$) with the same wall thickness by high order theory and compared with the results evaluated by classic laminated theory. The effective modulus predicted by this theory can be used in the designing of composite tubular element structures.

Key words　composite tubular element, composite thin-walled beam, effective modulus

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net