第 15 卷 第 4 期 复 合 材 料 学 报 Vol 15 No. 4
1998 年 10 月 ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA October 1998

层合开口柱壳弱形式的混合状态方程及其边值问题

丁克伟 唐立民
(大连理工大学工程力学研究所, 大连 116023)

摘 要 根据 Hellinger-Reissner 变分原理, 在柱坐标系中, 导出叠层开口柱壳的弱形式混合状态方程和边界条件, 给出了叠层开口柱壳的解析解, 此法使得求解该类问题的形式得以扩大和统一。

关键词 混合状态方程, 开口柱壳, 弱形式, 边值问题
中图分类号 O343.1

随着复合材料在航空航天等领域里的广泛应用, 人们一直在寻求特殊性能的材料以及精确的结构设计来满足其要求。其中对叠层板壳结构的力学性能研究, 受到了极大地关注[1]。文献[2, 3]分别先后讨论了各向同性、正交各向异性板壳的三维弹性力学解, 文献[4]分析了双层横观各向同性圆柱壳的弹性理论解, 文献[5, 6]给出了叠层柱壳的精确解, 但这些解法由于都采用了强形式的平衡方程和边界条件, 使得在求解时面对不同的边值问题必须采用不同的处理方法, 且过多的依赖于技巧性, 因此难以得到推广。文献[7]阐明了弹性力学混合状态方程的重要性并首次给出与之对应的从 Hellinger-Reissner 变分以及修正后导出的 Hamilton 正则方程, 同时也指出求解混合状态方程组是一个有广泛应用但现在还没有很好开拓的领域, 这是因为在连续介质中的 Hamilton 方程要满足复杂的边界条件, 这也就是它的重点和难点。本文中正是基于解决这个问题, 从两类变量的 Hellinger-Reissner 变分原理出发, 导出了开口柱壳混合状态方程和边界条件弱形式的最一般方程, 并给出了强厚度叠层开口柱壳的解析解, 这使得求解该类问题的形式得以扩大和统一。

1 混合状态方程和边界条件的弱形式

在柱坐标系下, 三维复合材料具有任意边界条件的泛函如下:

$$U = \iiint \{\sigma_r \frac{\partial v}{\partial r} + \tau_{r\theta} \frac{\partial v}{\partial r} + \tau_{rx} \frac{\partial u}{\partial r} - H\} r\,dr\,d\theta\,dx + \Gamma \tag{1}$$

其中

$$-H = \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_\theta (\frac{w}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}) + \tau_{x\theta}(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}) + \tau_{r\theta}(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{r}) + \tau_{rx}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{2}\{\sigma\}^T [c]^{-1}\{\sigma\} \tag{2}$$

是 Hamilton 函数的一个二次式, 以上符号都是常规的。

$$\Gamma = \iint \{\lambda_x (P_x - \overline{P_x}) u + \lambda_\theta (P_\theta - \overline{P_\theta}) v + \lambda_r (P_r - \overline{P_r}) w + [(1-\lambda_x)\overline{u} - u] P_x + [(1-\lambda_\theta)\overline{v} - v] P_\theta + [(1-\lambda_r)\overline{w} - w] P_r\} dS \tag{3}$$

收修改稿、初稿日期: 1997-10-17, 1997-04-29。国家自然科学基金资助项目

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

(3) 式中的 λ_x、λ_θ、λ_r 的取值规则为

$S \in S_\sigma$(应力边界), $\lambda_x = \lambda_\theta = \lambda_r = 1$; $S \in S_u$(位移边界), $\lambda_x = \lambda_\theta = \lambda_r = 0$; $S \in S_{\sigma-u}$(混合边界), 在某一方向上(如 x)为力的边界条件, 则 $\lambda_x = 1$, 否则为零。

对(1)式变分运算, 得

$$\left.\begin{aligned}
&\iiint_V \left(\frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} + \frac{\partial H}{\partial u}\right)\delta u\,\mathrm{d}V + \iint_\sigma (\bar{P}_x - P_x)\,\delta u\,\mathrm{d}S = 0\\
&\iiint_V \left(\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial H}{\partial v}\right)\delta v\,\mathrm{d}V + \iint_\sigma (\bar{P}_\theta - P_\theta)\,\delta v\,\mathrm{d}S = 0\\
&\iiint_V \left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial H}{\partial w}\right)\delta w\,\mathrm{d}V + \iint_\sigma (\bar{P}_r - P_r)\,\delta w\,\mathrm{d}S = 0
\end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\iiint_V \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial H}{\partial \tau_{rx}}\right)\delta \tau_{rx}\,\mathrm{d}V + \iint_u [(\bar{w} - w)n_x + (\bar{u} - u)n_r]\,\delta \tau_{rx}\,\mathrm{d}S = 0\\
&\iiint_V \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial H}{\partial \tau_{r\theta}}\right)\delta \tau_{r\theta}\,\mathrm{d}V + \iint_u [(\bar{w} - w)n_\theta + (\bar{v} - v)n_r]\,\delta \tau_{r\theta}\,\mathrm{d}S = 0\\
&\iiint_V \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial H}{\partial \sigma_r}\right)\delta \sigma_r\,\mathrm{d}V + \iint_u (\bar{w} - w)n_r\,\delta \sigma_r\,\mathrm{d}S = 0
\end{aligned}\right\} \tag{4b}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\iiint_V \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial \sigma_x}\right)\delta \sigma_x\,\mathrm{d}V + \iint_u (\bar{u} - u)n_x\,\delta \sigma_x\,\mathrm{d}S = 0\\
&\iiint_V \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial H}{\partial \sigma_\theta}\right)\delta \sigma_\theta\,\mathrm{d}V + \iint_u (\bar{v} - v)n_\theta\,\delta \sigma_\theta\,\mathrm{d}S = 0\\
&\iiint_V \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial \tau_{x\theta}}\right)\delta \tau_{x\theta}\,\mathrm{d}V + \iint_u [(\bar{v} - v)n_x + (\bar{u} - u)n_\theta]\,\delta \tau_{x\theta}\,\mathrm{d}S = 0
\end{aligned}\right\} \tag{4c}$$

采用记号

$$q = (u, v, w)^{\mathrm{T}},\quad p = (\tau_{rx}, \tau_{r\theta}, \sigma_r)^{\mathrm{T}},\quad p_1 = (\sigma_x, \sigma_\theta, \tau_{x\theta})^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

则(4)式可以写成以下形式:

$$\left.\begin{aligned}
&\iiint_V \left(\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial H}{\partial q}\right)\delta q\,\mathrm{d}V + \text{边界}(1) = 0\\
&\iiint_V \left(\frac{\partial q}{\partial r} + \frac{\partial H}{\partial p}\right)\delta p\,\mathrm{d}V + \text{边界}(2) = 0\\
&\iiint_V \left(D q - \frac{\partial H}{\partial p_1}\right)\delta p_1\,\mathrm{d}V + \text{边界}(3) = 0
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

其中, 边界(1)、边界(2)和边界(3)分别是(4a)、(4b)和(4c)后面的边界积分项。

从(6)式可以看出, 有

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial H}{\partial q},\quad \frac{\partial q}{\partial r} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{7}$$

这就是以坐标 r 为展开方向的 Hamilton 正则方程。

选择 $\mathrm{F} = (p, q)^{\mathrm{T}}$ 组成状态向量, 将(6)式写成如下的混合状态微分方程组, 即

$$\iiint_V G_1 \frac{\partial}{\partial r}\mathrm{F}\,\mathrm{d}V = \iiint_V G_1 H\,\mathrm{F}\,\mathrm{d}V + \iiint_V G_1 D_1 p_1\,\mathrm{d}V + \iint_S G_1 S_1\,\mathrm{d}S \tag{8}$$

$$\iiint_V G_2 D_2 F\,\mathrm{d}V + \iiint_V G_2 B\,p_1\,\mathrm{d}V + \iint_S G_2 S_2\,\mathrm{d}S = 0 \tag{9}$$

这就是弱形式的混合状态方程和边界条件的统一方程。其中

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$G_1=\begin{bmatrix}\delta u & & & & & \\ & \delta v & & & [0] & \\ & & \delta w & & & \\ & & & \delta\tau_{rx} & & \\ & [0] & & & \delta\tau_{r\theta} & \\ & & & & & \delta\sigma_r\end{bmatrix},\quad S_1=\begin{bmatrix}p_x-\overline{p_x}\\ p_\theta-\overline{p_\theta}\\ p_r-\overline{p_r}\\ (w-\overline{w})n_x+(u-\overline{u})n_r\\ (w-\overline{w})n_\theta+(v-\overline{v})n_r\\ (w-\overline{w})n_r\end{bmatrix}$$

$$G_2=\begin{bmatrix}\delta\sigma_x & 0 & 0\\ 0 & \delta\sigma_\theta & 0\\ 0 & 0 & \delta\tau_{x\theta}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & S_{16}\\ S_{21} & S_{22} & S_{26}\\ S_{61} & S_{62} & S_{66}\end{bmatrix},\quad S_2=\begin{bmatrix}(u-\overline{u})n_x\\ (v-\overline{v})n_\theta\\ (u-\overline{u})n_\theta+(v-\overline{v})n_x\end{bmatrix}$$

S_{ij}为本构关系的柔度系数。

2　应用和算例

为了说明本文方法的有效性, 下面给出一算例。

考察一两对边固支, 两对边简支夹层开口壳($\theta=0$, φ)(图1), 令

$$u=u_x+(1-x/l)\overline{u}^{(0)}_{(\theta,r)}+(x/l)\overline{u}^{(l)}_{(\theta,r)}\qquad(10)$$

其中$\overline{u}^{(0)}_{(\theta,r)}$和$\overline{u}^{(l)}_{(\theta,r)}$分别是($x=0$, l)处的位移函数, 目的是为了使u在两端为零。取(记$\zeta=m\pi/l$, $\eta=n\pi/\varphi$)

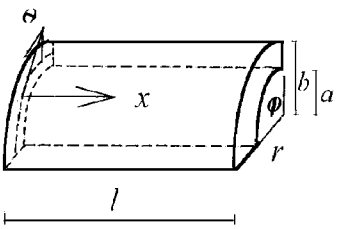

图1　开口柱壳

Fig. 1　Open cylindrical shell

$$\begin{aligned}u_x&=\sum_m\sum_n u_{x,mn}(r)\cos\zeta x\sin\eta\theta, & \tau_{rx}&=\sum_m\sum_n\tau_{rx,mn}(r)\cos\zeta x\sin\eta\theta\\ v&=\sum_m\sum_n v_{mn}(r)\sin\zeta x\cos\eta\theta, & \tau_{r\theta}&=\sum_m\sum_n\tau_{r\theta,mn}(r)\sin\zeta x\cos\eta\theta\\ w&=\sum_m\sum_n w_{mn}(r)\sin\zeta x\sin\eta\theta, & \sigma_r&=\sum_m\sum_n\sigma_{r,mn}(r)\sin\zeta x\sin\eta\theta\end{aligned}\qquad(11)$$

$$\begin{aligned}x\overline{u}^{(0)}_{(\theta,r)}&=\left(\frac{1}{2}+\frac{2l}{\pi^2}\sum_{m=1}\frac{\cos m\pi-1}{m^2}\cos\zeta x\right)\sum_n\overline{u}^{(0)}_{(r)}\sin\eta\theta\\ x\overline{u}^{(l)}_{(\theta,r)}&=\left(\frac{1}{2}+\frac{2l}{\pi^2}\sum_{m=1}\frac{\cos m\pi-1}{m^2}\cos\zeta x\right)\sum_n\overline{u}^{(l)}_{(r)}\sin\eta\theta\end{aligned}\qquad(12)$$

将(10)～(12)代入(8)、(9)式, 同时记

$C_1=-C_{13}/C_{33}$, $C_2=C_{11}-C_{13}^2/C_{33}$, $C_3=C_{12}-C_{13}C_{23}/C_{33}$, $C_6=C_{66}$

$C_4=C_{22}-C_{23}^2/C_{33}$, $C_5=-C_{23}/C_{33}$, $C_7=1/C_{33}$, $C_8=1/C_{55}$, $C_9=1/C_{44}$

于是对于每对m, n值, 即得开口柱壳混合方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[u_{x,mn}(r)\quad v_{mn}(r)\quad\sigma_{r,mn}(r)\quad\tau_{rx,mn}(r)\quad\tau_{r\theta,mn}(r)\quad w_{mn}(r)]^{\mathrm{T}}=$$

$$D(r)[u_{x,mn}(r)\quad v_{mn}(r)\quad\sigma_{r,mn}(r)\quad\tau_{rx,mn}(r)\quad\tau_{r\theta,mn}(r)\quad w_{mn}(r)]^{\mathrm{T}}+B(r)\qquad(13)$$

式中

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$D(r)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & C_8 & 0 & -\zeta \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 & C_9 & -\frac{\eta}{r} \\ -\frac{C_3}{r}\zeta & -\frac{C_4}{r^2}\eta & -\frac{C_5+1}{r} & \zeta & \frac{\eta}{r} & \frac{C_4}{r^2} \\ C_2\zeta^2+\frac{C_6}{r^2}\eta^2 & \frac{C_3+C_6}{r}\zeta\eta & C_1\zeta & -\frac{1}{r} & 0 & -\frac{C_3}{r}\zeta \\ \frac{C_3+C_6}{r}\zeta\eta & C_6\zeta^2+\frac{C_4}{r^2}\eta^2 & \frac{C_5}{r}\eta & 0 & -\frac{2}{r} & -\frac{C_4}{r^2}\eta \\ -C_1\zeta & -\frac{C_5}{r}\eta & C_7 & 0 & 0 & \frac{C_5}{r} \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$B(r)=\left[\frac{2(\cos m\pi-1)}{m^2\pi^2}\left(\frac{\mathrm{d}\bar{u}_{(r)}^{(0)}}{\mathrm{d}r}-\frac{\mathrm{d}\bar{u}_{(r)}^{(l)}}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{C_3A}{m\pi lr}\left(\frac{C_2}{l^2}+\frac{C_6n^2}{m^2\varphi^2r^2}\right)A\quad\frac{(C_3+C_6)nA}{mrl\varphi}-\frac{C_1A}{m\pi l}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$A=2(\cos m\pi-1)(\bar{u}_{(r)}^{(l)}-\bar{u}_{(r)}^{(0)})$$

为了求解方程(13), 需将层壳分割成若干薄层, 并以薄层中径 r 代替(14)中的 r, 于是(13)的解是

$$R(r)=G(r-a)R(a)+C(r-a) \tag{15}$$

其中

$$R(r)=[u_{x,mn}(r)\quad v_{mn}(r)\quad \sigma_{r,mn}(r)\quad \tau_{rx,mn}(r)\quad \tau_{r\theta,mn}(r)\quad w_{mn}(r)]^{\mathrm{T}}$$

$$R(a)=[u_{x,mn}(a)\quad v_{mn}(a)\quad \sigma_{r,mn}(a)\quad \tau_{rx,mn}(a)\quad \tau_{r\theta,mn}(a)\quad w_{mn}(a)]^{\mathrm{T}}$$

$$G(r-a)=\exp[D\cdot(r-a)],\quad C(r-a)=\int\exp[D\cdot(r-t)]B(t)\,\mathrm{d}t$$

对于多层壳, 采用转移矩阵法求解, 对于第一层, 则有(h_1指层厚),

$$R(r_1)=G(-h_1)R(a)+C(-h_1)$$

把第一层的终值当作第二层的初值就有

$$R(r_2)=G(-h_2)G(-h_1)R(a)+G(-h_2)C(-h_1)+C(-h_2)$$

所以对 k 层就有

$$R(b)=\Pi R(a)+\bar{\Pi} \tag{16}$$

式中

$$\Pi=G(-h_k)G(-h_{k-1})G(-h_{k-2})\cdots G(-h_2)G(-h_1)$$

$$\bar{\Pi}=G(-h_k)[G(-h_{k-1})\cdots G(-h_2)C(-h_1)+G(-h_{k-1})\cdots C(-h_2)+\cdots+C(-h_{k-1})]+C(-h_k) \tag{17}$$

在通常情况下, 作用在壳体内外表面的外力是给定的, 所以(16)式实际上是壳体内外表面六个位移分量以及边界位移(在 $\bar{\Pi}$ 内)的矩阵方程, 取其中的第3、第4和第5行组成新的方程组, 即

$$\begin{Bmatrix} u_{x,mn}(a) \\ v_{mn}(a) \\ w_{mn}(a) \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \Pi_{31} & \Pi_{32} & \Pi_{36} \\ \Pi_{41} & \Pi_{42} & \Pi_{46} \\ \Pi_{51} & \Pi_{52} & \Pi_{56} \end{bmatrix}^{-1}\left(\begin{Bmatrix} \sigma_{r,mn}(b) \\ \tau_{rx,mn}(b) \\ \tau_{r\theta,mn}(b) \end{Bmatrix}-\begin{bmatrix} \Pi_{33} & \Pi_{34} & \Pi_{35} \\ \Pi_{43} & \Pi_{44} & \Pi_{45} \\ \Pi_{53} & \Pi_{54} & \Pi_{55} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \sigma_{r,mn}(a) \\ \tau_{rx,mn}(a) \\ \tau_{r\theta,mn}(a) \end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} \bar{\Pi}_3 \\ \bar{\Pi}_4 \\ \bar{\Pi}_5 \end{Bmatrix}\right) \tag{18}$$

上式中的 $\bar{\Pi}_3$、$\bar{\Pi}_4$、$\bar{\Pi}_5$由边界条件确定后, $R(a)$成为已知, 于是就可以利用式(15)求得任一层的状态力学量。

对于该壳尚未满足的边界条件是

$$u=0,\quad \text{在 } x=0,\ l \text{ 处} \tag{19}$$

为了写出 u_x 的表达式, 仿照(16)式的推导过程, 可将任一层(第 j 层)的力学量用 $R(a)$ 表

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

示, 即

$$R(r_j) = \Pi_j R(a) + \overline{\Pi}_j \tag{20}$$

式中 Π_j 和 $\overline{\Pi}_j$ 类似(17)式。

取(20)式中的第一行, 得

$$[u_{x,mn}(r)]_j = [\Pi_{11}(r) \quad \Pi_{12}(r) \quad \Pi_{16}(r)]_j \begin{Bmatrix} u_{x,mn}(a) \\ v_{mn}(a) \\ w_{mn}(a) \end{Bmatrix} + [\overline{\Pi}_1(r)]_j \tag{21}$$

将(18)式代入上式, 再代入(10)式, 由(19)式即可求得边界位移, 当边界位移求出后, 由(18)式就可得到 $R(a)$, 这样整个层合壳就变为可求。

表1　三层开口柱壳的挠度和应力

Table 1　Deflection and stresses of three-ply open cylindrical shell

		$(h/R_0 = 0.8)$				$(h/R_0 = 1.0)$			
$\rho = 5$		w^*	σ_x^*	σ_r^*	σ_θ^*	w^*	σ_x^*	σ_r^*	σ_θ^*
present	1+	27.716	-3.7831	0.0000	-4.7313	18.370	-3.0172	0.0000	-3.3199
	1-	27.686	-5.3793	-0.4660	-4.0880	18.351	-4.6151	-0.4252	-2.7765
	2+	27.686	-1.1343	-0.4660	-0.8985	18.351	-0.9764	-0.4252	-0.6291
	2-	28.095	-2.6563	-0.6875	-1.3168	18.764	-2.1232	-0.6737	-1.1897
	3+	28.095	-12.850	-0.6875	-5.9875	18.764	-10.193	-0.6737	-5.3638
	3-	28.062	-14.860	-0.9742	-6.1224	18.739	-12.186	-0.9742	-5.5215
SAP5	1+	28.058	-3.3141	0.6615	-5.0100	18.543	-2.6941	0.5199	-3.4929
	1-	28.001	-5.0479	0.6787	-4.0320	18.500	-4.3083	0.5164	-2.7454
	2+	28.001	-1.0993	-0.3367	-0.8802	18.500	-0.9449	-0.3354	-0.6175
	2-	28.416	-2.7262	-0.7813	-1.2930	18.925	-2.1579	-0.6934	-1.1427
	3+	28.416	-12.714	0.9243	-5.7110	18.925	-10.096	0.1857	-5.1433
	3-	28.319	-15.193	0.6788	-6.0728	18.866	-12.557	-0.0698	-5.5649

注: w、σ_x、σ_r、σ_θ 在 $x = l/2$, $\theta = \pi/2$; 1+: 内层内表面, 1-: 内层外表面; 2 表示中层, 3表示外层

表2　单层开口柱壳的挠度和应力

Table 2　Deflection and stresses of single-ply open cylindrical shell

		$(h/R_0 = 0.8)$				$(h/R_0 = 1.0)$			
$\rho = 1$		w^*	σ_x^*	σ_r^*	σ_θ^*	w^*	σ_x^*	σ_r^*	σ_θ^*
present	$r = R_0 - 0.5h$	50.043	-0.6326	0.0000	-2.0338	32.402	-0.2243	0.0000	1.4551
	$r = R_0 - 0.4h$	49.983	-1.2286	-0.1966	-1.8454	32.366	-0.7952	-0.1832	-1.3058
	$r = R_0 + 0.4h$	50.111	-5.6685	-0.9136	-2.2448	32.619	-4.7154	-0.9166	-1.9693
	$r = R_0 + 0.5h$	50.186	-6.4154	-0.9742	-2.3334	32.693	-5.4469	-0.9742	-2.0707
SAP5	$r = R_0 - 0.5h$	50.569	-0.5035	-0.0093	-2.1832	32.602	-0.2085	-0.0076	-1.5452
	$r = R_0 - 0.4h$	50.512	-1.1909	-0.0236	-1.9299	32.562	-0.7528	-0.0109	-1.3662
	$r = R_0 + 0.4h$	50.475	-5.6216	0.1133	-2.1105	32.715	-4.7185	-0.2819	-1.8775
	$r = R_0 + 0.5h$	50.328	-6.5377	0.0204	-2.2937	32.659	-5.5902	-0.3781	-2.0219

注: w、σ_x、σ_r、σ_θ 在 $x = l/2$, $\theta = \pi/2$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

本文中仅讨论了一种边界条件, 对于其它边界情况完全可以用本文方法类似处理。

下面给出一个三层开口柱壳外表面受法向均布压力 q 作用的具体数值结果。该壳里外两层材料相同, 每层均有以下的弹性常数

$C_{22}/C_{11}=0.543103$, $C_{12}/C_{11}=0.246269$, $C_{23}/C_{11}=0.115017$, $C_{13}/C_{11}=0.083172$

$C_{33}/C_{11}=0.530172$, $C_{44}/C_{11}=0.266810$, $C_{55}/C_{11}=0.159914$, $C_{66}/C_{11}=0.262931$

几何参数为: 壳厚为 h, 里外两层各厚 $0.1h$, 中层厚为 $0.8h$, $l=2\pi R_0$ 为壳长, R_0 为中面半径。令 ρ 为第一层材料与第二层材料 C_{11} 比值, 若 $\rho=1$ 则为单层壳, 若 $\rho\neq1$ 则为三层壳。计算结果见表1、表2, 级数取项为 $m=1,3,\cdots,199$; $n=1,3,\cdots,27$。表中还给出了 SAP5 有限元解, 采用的是20节点64个三维块体等参元(对1/2壳)。从表中可以看出 SAP5 解得的 σ_r 在壳体的内表面不为零, 这显然是错误的。表中 $w^*=wC_{11}^{(2)}/(qh)$, $\sigma_x^*=\sigma_x/q$, $\sigma_\theta^*=\sigma_\theta/q$, $\sigma_r^*=\sigma_r/q$。

3 结 论

本文中导出的开口柱壳弱形式求解混合状态方程是有效的, 并给出了解析解, 同时可以看出采用弱形式求解问题, 物理概念清晰, 无需特殊技巧, 数值算例表明, 本文方法误差可控, 精度高。也为验证其它数值方法的正确性和计算精度提供了考题和依据。

参 考 文 献

1 Mallikarjuna, Kant T. A critical review and some results of recently developed refined theories of fibre-reinforced laminated composites and sandwich. Composite Struct, 1993, 23: 293～312

2 Kardomateas G A. Buckling of thick orthotropic cylindrical shells under external pressure. ASME J Appl Mech, 1993, 60: 195～202

3 Srinivas S, Rao A K. Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates. Int J Solids Struct, 1970, 6: 1463～1481

4 李思简, 罗祖道. 双层横观各向同性圆柱壳体的弹性理论解. 复合材料学报, 1985, 2(1): 47～61

5 Fan J R, Zhang J Y. Exact solution for thick laminated shells. Science in China (Series A), 1992, 35(11): 1343～1355

6 丁克伟, 范家让. 强厚度叠层连续闭口柱壳轴对称问题的精确解. 工程力学, 1994, 11(2): 8～19

7 唐立民. 弹性力学的混合方程和 Hamilton 正则方程. 计算结构力学及其应用, 1991, 8(4): 343～350

WEAK FORMULATION OF MIXED STATE EQUATION AND BOUNDARY VALUE PROBLEM OF LAMINATED OPEN CYLINDRICAL SHELL

Ding Kewei Tang Limin

(Research Institute of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116023)

Abstract Weak formulation of mixed state equation including boundary conditions is presented in a cylindrical coordinate system by introducing Hellinger-Reissner variational principle. Analytical solutions were obtained for laminated open cylindrical shells. The present study extends and unifies solution of laminated open shells.

Key words mixed state equation, open cylindrical shell, weak formulation, boundary value problem

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net