第 15 卷 第 3 期 复 合 材 料 学 报 Vol 15 No. 3
1998 年 8 月 ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA August 1998

含内部分层复合材料层板三维问题的三角级数能量解法

胡伟平 孟庆春 张 行
(北京航空航天大学五系508教研室, 北京 100083)

摘 要 本文根据叠加原理分解含内部分层复合材料层板的受力状态, 使分层问题归结为分层表面受附加剪切载荷作用时附加状态的分析, 然后根据边界条件, 利用三角级数构造位移模态, 进而由势能原理确定位移解答, 并做收敛性验证。计算表明, 结果收敛, 挠度收敛尤为迅速。

关键词 复合材料层板, 分层, 三维问题, 附加状态, 三角级数, 能量解法
中图分类号 TB331, O343.2

层间分层是复合材料层合结构的一种重要破坏形式, 因此受到国际与国内力学界高度重视。许多学者将分层看作层间裂纹, 即在界面断裂力学范畴内进行分层问题研究。文献[1～4]分析了界面裂纹尖端场与两个半无限大平面间的界面裂纹应力强度因子。文献[5～7]则分析了含有穿透分层的复合材料层合板与层合梁问题, 使研究工作向前迈进了一大步。然而, 这些均属二维范畴内的问题。

目前, 对于工程中最常见的内部分层问题即三维分层问题, 研究成果还不多见。在多数情况下, 只能借助三维有限单元法解决这一问题。然而三维有限单元法非常耗费机时, 不便于设计应用。所以, 三维分层问题的研究具有重要的实用与学术价值。本文目的在于提供具有理论依据与实用价值的分析三维分层问题的求解方法。为了简便, 本文暂以外切矩形分层代替椭圆分层。

1 复合材料层板的受力状态分解

图1表示四边简支复合材料四层板, 铺层上下对称, 受横向载荷作用, 在外层与内层间存在上下对称的矩形分层区。分层区边长为$2a$、$2b$, 外层、内层厚度分别为$2t_1$与t_2。如图建立$oxyz$坐标系, 原点o位于两分层区中心连线与层板上下对称面的交点处, x, y轴分别平行于分层区的两边。

层合板沿z方向受到横向载荷作用。进行状态分解时, 为简单起见, 仅画出xoz平面内板的受力状态。

首先将图2所示原始受力状态分解为对称状态(α)与反对称状态(β), 如图3(a)与(b)所示。分层时的受力状态可看成不受对称载荷的影响, 而仅取决于反对称载荷状态。进一步将状态(β)分解成图3(c)、(d)所示的状态(β_1)与(β_2)。在状态(β_1)中, 分层表面受到剪切载荷$\tau'_{zx}(x,$

收修改稿、初稿日期: 1997-05-18, 1997-04-03。国家自然科学基金资助课题之一

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

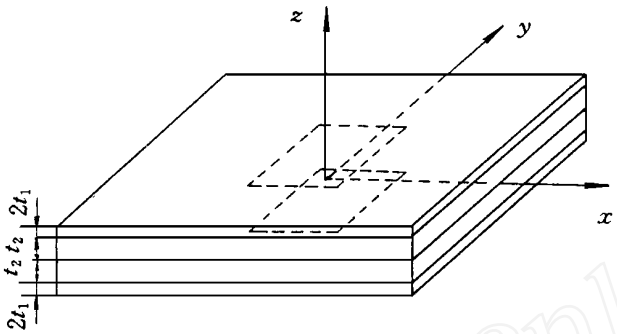


图1 含矩形分层的复合材料层板

Fig. 1 A composite laminate plate with inner rectangular delaminations

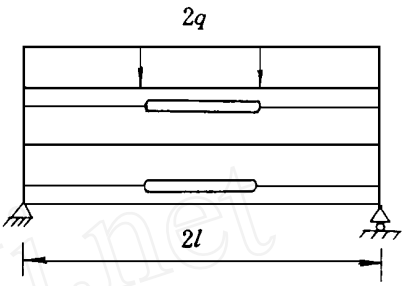
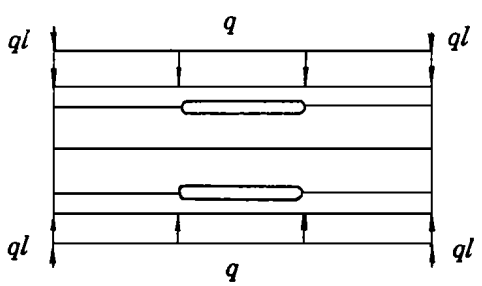


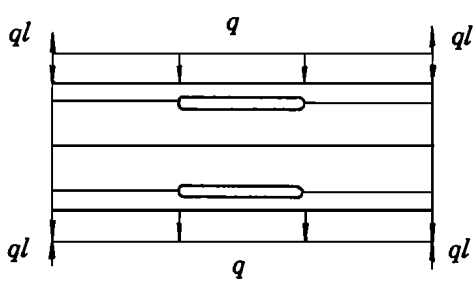
图2 原始受力状态

Fig. 2 The original loading state

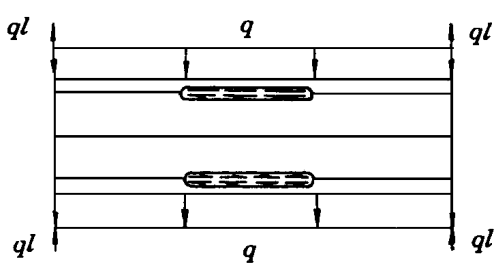
y)和 $\tau'_{zy}(x,y)$。它们等于无分层时层板中的层间剪应力。状态(β_1)即相当于无分层层板。$\tau'_{zx}(x,y)$和 $\tau'_{zy}(x,y)$就是由常规层板理论所求出的层间剪应力。由于结构关于三个坐标平面对称,外载荷关于 xoz 与 yoz 平面对称,而关于 xoy 平面反对称,故 $\tau'_{zx}(x,y)$和 $\tau'_{zy}(x,y)$关于 xoz 与 yoz 平面对称,而关于 xoy 平面反对称,且分层上下表面的剪切载荷互为作用力与反作用力。在状态(β_2)中,各分层表面受到与 $\tau'_{zx}(x,y)$和 $\tau'_{zy}(x,y)$大小相等,方向相反的剪切载荷 $\tau_{zx}(x,y)$和 $\tau_{zy}(x,y)$。层板分层的产生与扩展即源于此状态。和分层相关的位移和应力取决于 $\tau_{zx}(x,y)$和 $\tau_{zy}(x,y)$。通过以上分析,我们在考虑板受横向均布载荷的分层问题时,就只需研究图3(d)所示的状态(β_2),从而使问题大为简化。



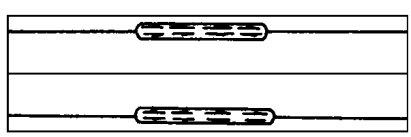
3(a) 对称状态(α) (symmetric loading state)



3(b) 反对称状态(β) (antisymmetric loading state)



3(c) 无分层状态(β_1) (loading state without delamination)



3(d) 附加分层状态(β_2) (additional loading state)

图3 分层问题的状态分解

Fig. 3 State about the problem of delamination decomposition

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

2　位移函数的设立

考虑到结构与载荷的对称性, 我们仅分析复材层板的第一象限, 并将外层标识为第1层, 内层标识为第2层, 如图4所示。

对于层板的未分层区, 在状态(β_2)中, 在未分层的板面上与边界上没有外力, 在它与分层区的交界上也无合力。故根据经典的无分层的层板理论, 板的未分层区可被视为刚体。进一步考虑到结构及载荷的对称性, 可得到分层区如下边界条件:

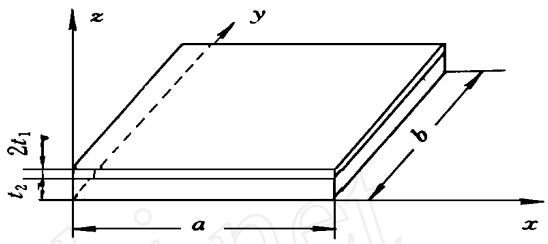


图4　分层区第一象限

Fig. 4　The first quadrant of delamination area

$$\left.\begin{aligned} &x = 0, u_{10} = 0, \partial w/\partial x = 0; x = a, u_{10} = 0, v_{10} = 0, w = 0, \partial w/\partial x = 0; \\ &y = 0, v_{10} = 0, \partial w/\partial y = 0; y = b, v_{10} = 0, u_{10} = 0, w = 0, \partial w/\partial y = 0。\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

以上各表达式中, u_{10}、v_{10}分别代表第1层中面的 x、y 向中面位移, w 代表板的横向位移。

应指出, 由于状态(α)的存在, 在分层区中, 外层与内层之间没有法向相对位移, 即可认为外层与内层之间存在法向约束。

根据边界条件, 我们可采用三角函数项级数表示上述位移:

$$\left.\begin{aligned} w &= \sum_{m,n} A_{mn} f_m(x) f_n(y) = \sum_{m,n} A_{mn}\left[\cos\left(\frac{2m-1}{a}\pi x\right) + 1\right]\left[\cos\left(\frac{2n-1}{b}\pi y\right) + 1\right] \\ u_{10} &= \sum_{m,n} B_{mn} g_m(x) f_n(y) = \sum_{m,n} B_{mn}\left[\sin\left(\frac{2m-1}{a}\pi x\right)\right]\left[\cos\left(\frac{2n-1}{b}\pi y\right) + 1\right] \\ v_{10} &= \sum_{m,n} C_{mn} g_n(y) f_m(x) = \sum_{m,n} C_{mn}\left[\sin\left(\frac{2n-1}{b}\pi y\right)\right]\left[\cos\left(\frac{2m-1}{a}\pi x\right) + 1\right] \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

3　几何方程

在小变形条件与直法线假设的前提下, 层1与2的面内位移分别为:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u_{10} - \frac{\partial w}{\partial x} z_1 \qquad & v_1 &= v_{10} - \frac{\partial w}{\partial y} z_1 \\ u_2 &= -\frac{\partial w}{\partial x} z_2 \qquad & v_2 &= -\frac{\partial w}{\partial y} z_2 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

z_1、z_2分别为第1、2层的局部坐标, z_1的坐标原点位于第一层中面与总体坐标的交点上, z_2的坐标原点与总体坐标原点重合。

在小变形条件下, 根据几何方程, 我们有:

$$\epsilon_{xx}^{(k)} = \frac{\partial u_k}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy}^{(k)} = \frac{\partial v_k}{\partial y}, \quad \epsilon_{xy}^{(k)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_k}{\partial x}\right) \tag{4}$$

4　物理方程

在线弹性条件下, 层板的物理方程可表示成

$$\sigma_{ij}^{(k)} = C_{ijpq}^{(k)} \epsilon_{pq}^{(k)} \qquad (i, j, p, q = 1, 2) \tag{5}$$

$k = 1, 2$表示层号, 不求和。$C_{ijpq}^{(k)}$为各层刚度系数。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

5 能量解法

至此, 我们已经满足了位移边界条件、几何方程与物理方程。为了得到本问题的真实解答, 还需要建立与满足平衡方程和静力边界条件。由势能原理可知, 以上方程与条件是和系统总势能 Π 的极值条件等价。因此, 可以采用最小总势能原理解决这一问题。

由于我们仅需考虑分层区第一象限, 故应变能

$$U = \frac{1}{2}\iiint_{t_1}^{t_1} \sigma_{ij}^{(1)} \epsilon_{ij}^{(1)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z_1 + \frac{1}{2}\iiint_{t_2}^{t_2} \sigma_{ij}^{(2)} \epsilon_{ij}^{(2)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z_2 \tag{6}$$

在第一象限中, 外力势能 V 等于

$$V = -\int \{\tau_{zx}[u_1(x, y, -t_1) - u_2(x, y, t_2)] + \tau_{zy}[v_1(x, y, -t_1) - v_2(x, y, t_2)]\mathrm{d}A \tag{7}$$

t_1, t_2 分别为在 z_1、z_2 局部坐标下的 z 方向坐标。

层间剪应力可以被设成如下幂函数项级数形式:

$$\left.\begin{aligned} \tau_{zx} &= \sum_{m,n} \lambda_{mn} \left(\frac{x}{a}\right)^p \left(\frac{y}{b}\right)^q \\ \tau_{zy} &= \sum_{m,n} \mu_{mn} \left(\frac{x}{a}\right)^p \left(\frac{y}{b}\right)^q \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

根据最小势能原理, 我们有:

$$\delta(U + V) = 0$$

由此可得求解待定系数 A_{mn}, B_{mn} 与 C_{mn} 的线性代数方程组如下:

$$\left.\begin{aligned} A_{mn}P_{mn}^{(A)} + \sum_{l \neq n} A_{ml}Q_{ml}^{(A)} + \sum_{k \neq m} A_{kn}R_{kn}^{(A)} &= I_{mn} \\ B_{mn}P_{mn}^{(B)} + \sum_{l \neq n} B_{ml}Q_{ml}^{(B)} + C_{mn}R_{mn}^{(B)} &= J_{mn} \\ B_{mn}P_{mn}^{(C)} + \sum_{k \neq m} C_{kn}Q_{kn}^{(c)} + C_{mn}R_{mn}^{(C)} &= K_{mn} \end{aligned}\right\} \quad (m, n = 1, 2, 3\cdots\cdots) \tag{9}$$

式中, $P_{mn}^{(A)}$, $Q_{ml}^{(A)}$, $R_{kn}^{(A)}$, I_{mn}, …等系数均可由以上各式积分而得。

通过求解线性方程组(9), 可得待定系数 A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, 由此可求出位移解答, 再将所得结果回代到式(4)与(5), 即可得到应变、应力解答。

6 算 例

设正交复材四层板材料为石墨/环氧, 铺设角为0°/90°/90°/0°, 0°层纤维沿 y 方向, 材料常数如下:

$E_1 = 53.74\text{GPa}$, $E_2 = 17.95\text{GPa}$, $\nu_{12} = 0.25$

$G_{12} = 8.626\text{GPa}$, $\nu_{21} = 0.083$, $K = \dfrac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = 1.021$

进一步, 假设分层区为正方形, 即 $a = b$, 取附加剪切载荷 $\tau_{zx} = \tau_{zy} = \lambda = \mu = 0.1\text{GPa}$。

当取 $a = b = 10\text{mm}$, $t_1 = 0.2\text{mm}$, $t_2 = 0.5\text{mm}$ 时, 计算 $x = a/2$、$y = b/2$ 处的 w_0、u_{10}、v_{10}, 计算结果如下:

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$m_{max}=n_{max}$	$-w_0$(mm)	u_{10}(mm)	v_{10}(mm)
1	0.92927840	0.095184178	0.029978014
2	0.95813254	0.11216250	0.038501619
3	0.96201142	0.11791509	0.041493877
4	0.96303032	0.12068286	0.042943223
5	0.96340453	0.12228152	0.043780831
6	0.96357252	0.12331345	0.044320825
7	0.96365873	0.12403106	0.044695654
8	0.96370740	0.12455738	0.044970037

若改变 t_2的数值再计算, 发现 u_{10}, v_{10}均不变, 只有 w_0的值发生变化, 计算结果如下:

$m_{max}=m_{max}$	(t_2=0.6mm) $-w_0$(mm)	(t_2=0.7mm) $-w_0$(mm)
1	0.64545933	0.46926158
2	0.66579817	0.48418489
3	0.66853676	0.48619638
4	0.66925646	0.48672516
5	0.66952083	0.48691941
6	0.66963952	0.48700664
7	0.66970043	0.48705140
8	0.66973482	0.48707667

由以上计算结果可知, 无论是哪一种情况, 三个位移分量的收敛性都很好。挠度的收敛尤为迅速, w_0的第1项和第8项相差均小于5%。而对于 u_{10}和 v_{10}, 当取到第4项时, 和第8项相差也小于5%。另外, 也可看出 w_0的值与 t_2的关系很大, 当 $t_1 \ll t_2$时, w_0的值与 t_2的平方成反比。

7 结　　论

(1) 本文采用状态分解方法, 使层板分层归结为在分层表面只受附加剪切载荷的层板受力状态, 大大简化了对问题的分析。

(2) 本文采用最小势能原理代替平衡方程及静力边界条件, 求解附加位移。

(3) 本方法收敛性好, 挠度收敛尤为迅速, 取一项即可。在这个意义上讲, 对于挠度而言, 可以得到封闭形式的解答。

参 考 文 献

1 Williams M L. The stress around a fault or crack in dissimilar media. Bulletin Seismological Society of America, 1959, 49: 199～204

2 Erdogan F. Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks. Journal of Applied Mechanics, 1965, 32: 403～410

3 Gotch M. Some problems of bonded anisotropic plates with cracks along the bond. International Journal of Fracture Mechanics, 1967, 3: 253～265

4 Rice J R. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial crack. Journal of Applied Mechanics, 1988, 55: 92～103

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

5 Wang S S. Fracture mechanics for delamination problem in composite materials. Journal of Composite Materials, 1983, 17: 210～223

6 孟庆春, 张行, 王俊奎. 复合材料层合梁在横向载荷作用下分层问题的解析-广义变分解法. 复合材料学报, 1991, 8(3): 53～60

7 Meng Qingchun, Zhang Xing. Analytical-generalized variational method of solution for delamination of laminates. Engineering Fracture Mechanics, 1993, 46(5): 797～808

8 张行. 高等弹性理论. 北京: 北航出版社, 1994

ENERGY-METHOD OF TRIGONOMETRIC SERIES ABOUT THREE-DIMENSIONAL PROBLEMS OF INNER DELAMINATION IN COMPOSITE LAMINATES

Hu Weiping Meng Qingchun Zhang Xing
(Divison 508, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

Abstract By means of the principle of superposition, the stress state of a composite laminate with inner delamination is decomposed and the problem of delamination can be reduced to the analysis of an additional stress state of the original laminate subjected to additional shear load along the delamination surfaces. The trigonometric series is applied to describe the displacement mode satisfying the boundary conditions and the principle of minimum potential energy is used to determine the unknown coefficients of the above series. The convergency tests are carried out. From the computational results, it can be shown that all of the displacement components are convergent and the deflection converges more rapidly.

Key words composite laminated plate, delamination, three dimensional problem, additional state, trigonometric series

ICCM-12(第12届国际复合材料会议)

ICCM-12事务局开始征集来年7月在巴黎召开的第12届国际复合材料会议讲演论文。要点如下:

地 点: 法国巴黎 La Palais des Congres 日 期: 1999年7月5日～9日

摘要截止: 1998年9月15日; 采用通知: 1998年12月1日

论文截止: 1999年2月1日; 日程邮寄: 1999年4月1日

摘要要领: 含图2页, 以 E-mail 或盘(3 1/4PC)送达事务局。查读后通知是否采用。

摘要集于会议当天发给; 会议当天仅发放 CD-ROM, 印刷出版采用会后预订制。

联系查询: ICCM-12 Conference Office

MTE-BP298-F33605 PESSAC-France

Tel: 33(0)557265342 Fax: 33(0)557265343 e-mail: orga@iccm12.org

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net