复合材料学报 第 18 卷 第 4 期 11 月 2001 年
ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA Vol. 18 No. 4 November 2001

文章编号: 1000-3851(2001) 04-0108-07

稳态滚动轮胎的有限元分析模型

闫相桥

(哈尔滨工业大学 复合材料研究所, 哈尔滨 150001)

摘 要: 建立了一个稳态滚动轮胎的有限元分析模型, 考虑了轮胎变形的几何非线性、轮胎与地面和轮胎与轮辋的大变形非线性接触、轮胎材料的非均匀性、橡胶材料的不可压缩性和物理非线性、橡胶基复合材料的各向异性及轮胎与地面接触滑动摩擦。结果表明, 该模型是较为合理的。

关键词: 有限元分析; 非线性; 接触约束

中图分类号: TB330.1 文献标识码: A

FINITE ELEMENT ANALYSIS MODEL OF STEADY ROLLING TIRES

YAN Xiang-qiao

(Research Lab. for Composite Materials, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: A finite element analysis model of steady rolling tires is developed in this paper. The model includes the geometric nonlinearity due to large deformation, material nonlinearity, incompressibility constraint on deformation of elastomers, the anisotropy of cord-rubber composites, the nonlinear boundary conditions resulting from both tire-rim contact and tire-foundation contact and the tire-foundation contact slip friction in steady rolling. Numerical results show that the model is very reasonable.

Key words: finite element model; nonlinearity; contact constraint

随着计算机科学技术的飞速发展, 有限元分析技术在复杂工程结构中的应用愈来愈显示出巨大的作用。轮胎结构的分析方法也从简化过甚的轮胎模型分析, 如梁模型、网络模型、薄膜模型及层合模型[1, 2]等, 向数值模拟发展[3, 4, 13, 14]。

轮胎结构有限元分析是一项挑战性工作[3], 主要困难包括: (1) 由于轮胎的大变形引起的几何非线性; (2) 轮胎是一种非均质结构, 其橡胶材料具有不可压缩性和明显的物理非线性, 而其橡胶基复合材料呈现明显的各向异性; (3) 轮胎与地面和轮胎与轮辋的大变形非线性接触。一个轮胎结构有限元分析模型只有充分考虑这些因素才有效可靠。比如, 若不合理地考虑橡胶材料的不可压缩性, 则可能引起数值计算上的困难或得到不现实的结果[3]。再比如, 若采用不尽完善的模拟轮胎与地面和轮胎与轮辋的大变形非线性接触的模型[5, 6], 则地面和轮辋对轮胎的单边位移约束条件不能得到比较精确的满足[4], 而这对轮胎的结构分析至关重要[7]。

在这里, 我们建立了一个稳态滚动轮胎的有限元分析模型。在该模型中, 考虑了轮胎变形的几何非线性、轮胎与地面和轮胎与轮辋的大变形非线性接触、轮胎材料的非均匀性、橡胶材料的不可压缩性和物理非线性、橡胶基复合材料的各向异性及轮胎与地面接触滑动摩擦。结果表明, 该模型是较为合理的。

1 稳态滚动轮胎的一些基本关系

在这里, 我们将研究轮胎的稳态滚动(包括静态)。首先, 对做直线稳态滚动轮胎的一些基本关系进行描述。通过排除轮胎的平移运动, 则轮胎的稳态滚动等价于正在与运动地面接触的轮胎的定轴转动。这种运动可分解为两个连续的运动: 首先是刚体旋转, 继之是变形, 如图 1 所示。我们选取经过刚体旋转物体所占据的空间为参考构形, 其坐标用 X 表示, 对应的在刚体中的位置和变形后的位置分别用

收稿日期: 1999-12-27; 收修改稿日期: 2000-07-24
基金项目: 黑龙江省博士后科研启动基金
作者介绍: 闫相桥(1959), 男, 工学博士, 教授(博导), 主要从事轮胎分析技术的研究。

P 和 x 表示, 于是有

$$P = R^T X \tag{1}$$

$$[R] = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos wt & -\sin kt \\ 0 & \sin wt & \cos kt \end{matrix} \tag{2}$$

其中 k 为旋转角速度。

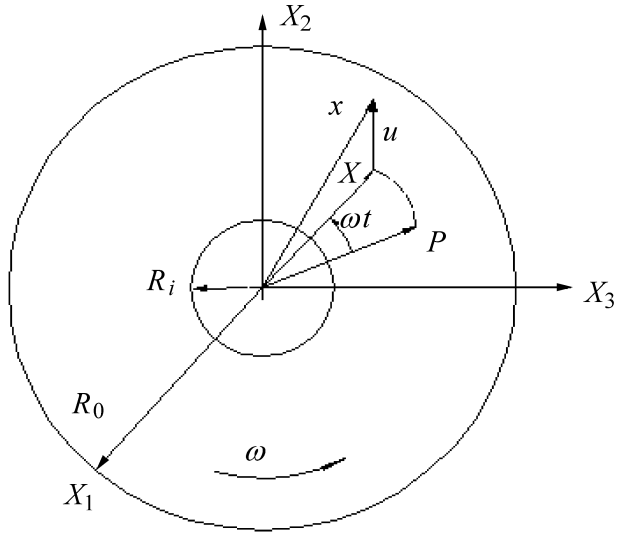

图 1 轮胎稳态滚动示意图

Fig. 1 Schematic of tire stable rolling

为了描述轮胎的变形, 我们定义一个变换 i(X, t), 它给出了质点 P 在时刻 t 的位置 x 作为该质点在时刻 t 的刚体位置 X 的函数

$$x = i(X, t) \tag{3}$$

于是, 速度场 v(X, t) 可表示为

$$v(X, t) = \frac{5i(X, t)}{5X}\frac{5X}{5t} + \frac{5i(X, t)}{5t} \tag{4}$$

其中, 5X/5t 是旋转刚体的速度场, 其分量形式为

$$\frac{5X_1}{5t} = 0;\ \frac{5X_2}{5t} = -kX_3;\ \frac{5X_3}{5t} = kX_2 \tag{5}$$

在稳态运动的情况下, k 是常数, i(X, t) = i(X), 此时速度场为

$$v(X, t) = \frac{5i(X, t)}{5X}\frac{5X}{5t} \tag{6}$$

在稳态运动的情况下, 加速度场 a(X, t) 的分量形式为

$$a_i = -k^2 X_I \frac{5i_i}{5X_I} + \frac{5^2 i_i}{5X_I 5X_j}(X_I X_j - W_j X_m X_m) \quad (i = 1, 2, 3) \tag{7}$$

在此使用了求和约定。

由 i(X, t) 可得变形梯度 F

$$F = \frac{5i}{5X} \tag{8}$$

及左 Cauchy-Green 形变张量 B 和右 Cauchy-Green 形变张量 C

$$B = FF^T,\ C = F^T F \tag{9}$$

Green-Lagrangian 应变张量 E 和第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量 S 可表示为

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{5x_k}{5X_i}\frac{5x_k}{5X_j} - W_{ij}\right) \tag{10}$$

$$S_{ij} = \frac{5X_i}{5x_I}E_{jI} \tag{11}$$

用位移 u 表示的 Green-Lagrangian 应变张量为

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{5u_i}{5X_j} + \frac{5u_j}{5X_i} + \frac{5u_k}{5X_i}\frac{5u_k}{5X_j}\right) \tag{12}$$

2 稳态滚动轮胎的边值问题

2.1 运动方程

令 E 为第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量, d_0 和 q_0 分别为定义在初始构形上的质量密度和体力, 则运动方程可表示为

$$DivE + q_0 = d_0 i \tag{13}$$

2.2 材料模型

(1) 橡胶材料模型

在这里, 假定橡胶材料的力学非线性性能可以用 Mooney-Rivlin 应变能密度函数描述

$$W(I_1, I_2) = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \tag{14}$$

其中: I_1, 和 I_2 分别为应变第一和第二不变量, C_{10}和 C_{01}为由实验确定的材料常数。对于橡胶材料的不可压缩性用 Lagrangian 乘子法解决[8]。

(2) 帘线-橡胶复合材料模型

子午线轮胎中的带束层及胎体是主要的承载部件, 它们均是帘线-橡胶复合材料, 其性能呈现明显的各向异性。在用有限元分析技术对轮胎进行分析时, 基于帘线-橡胶复合材料划分的单元通常分为两类, 一类是单元由单一帘线-橡胶复合材料构成, 另一类是单元由两层或两层以上的帘线-橡胶复合材料构成。在这里, 对于由单一帘线-橡胶复合材料构成的单元, 其材料性能用正交各向异性材料模型模拟, 相应的材料常数用 Halpin-Tsai 方程[10]由组分材料性能确定, 而对于由两层或两层以上的帘线-橡胶复合材料构成的单元, 其材料性能用 Sun 和 Li[11]提出的层合材料模型来模拟。这里需指出的是, 用由两层或两层以上的帘线-橡胶复合材料构成的单元对斜交胎进行有限元分析是非常必要的, 这是因为斜交胎的胎体通常由多层帘线-橡胶复合材料构成, 若用由单一帘线-橡胶复合材料构成的单元划分网格, 则由于单元和节点数目庞大而使计算难以进行, 而

用由两层或两层以上的帘线-橡胶复合材料构成的单元划分网格,则由于单元和节点数目相对少得多,从而使计算量大大减少。

关于帘线-橡胶复合材料模型的详细细节见附录。

2.3 边界条件

(1) 单边位移边界条件

轮胎受到来自轮辋和地面的单边位移边界条件。本文中采用文献[4]中提出的可变约束法来处理这种位移边界条件。鉴于轮胎与地面、轮胎与轮辋之间的作用对于轮胎结构分析的重要性及可变约束法的新颖性和有效性,在这里对这种方法介绍如下。

轮胎受到来自轮辋和地面(均可视为刚体)的双重限位作用。我们称刚性物体的表面为约束面。此种约束的特点是:

(1) 单边的位移约束,即约束表面是不可渗透的;

(2) 约束表面只提供挤压和剪切约束力,不能提供拉力。

若记约束表面的方程为

$$x_2 = h(x_1, x_3) \tag{15}$$

则条件(1)可表示为

$$x_2 \geq h(x_1, x_3) \qquad x \in \Gamma_c \tag{16}$$

其中 Γ_c 为可能接触面。事实上,式(16)给出了检查接触约束合理性的位移条件,即不满足(16)式的位移场是不合理的。比如,在轮胎与地面接触的情况下(见图 2),接触面方程(15)为

$$x_2 = -(R - U) \tag{17}$$

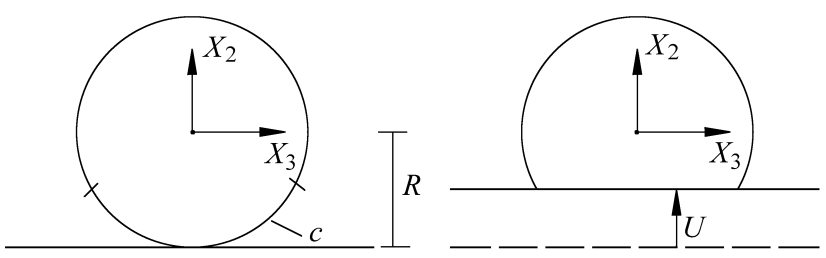

图 2　变形与未变形结构示意图

Fig. 2　Schematic of deformed and undeformed geometry of the structure

此时,条件(1)为

$$x_2 \geq -(R - U) \tag{18}$$

若令 $n(x)$ 为轮胎在可能接触面 Γ_c 上 x 处的单位外法矢,用 e 表示该点处的应力向量,则有

$$e = En \tag{19}$$

其法向和切向分量分别为

$$e_n = e \cdot b \tag{20}$$

$$e_t = 燏 - (e \cdot b)b燏 \tag{21}$$

这里 b 为接触面的单位法向矢量(指向接触刚体的外侧为正)。这样,条件(2)为

$$x_2 > h(x_1, x_3) \rightarrow e_n = 0 \qquad x \in \Gamma_c \tag{22a}$$

$$x_2 = h(x_1, x_3) \rightarrow e_n \geq 0 \qquad x \in \Gamma_c \tag{22b}$$

由于在求解过程中接触区域是变化的,必须在每一步迭代结束后对所有的约束节点及可能的约束节点(尚未被约束)进行一次校核。

(1) 约束节点的力校核

如图 3 所示,b 为约束面的外向法矢,而 r 是约束节点的约束反力。若 $r_b = r \cdot b > 0$,即表明接触面上存在压力,该点的约束是合理的,在下一步迭代计算中仍将该点约束住。否则约束是不合理的,在下一步计算中将该点解除约束,作为自由节点再进行计算。

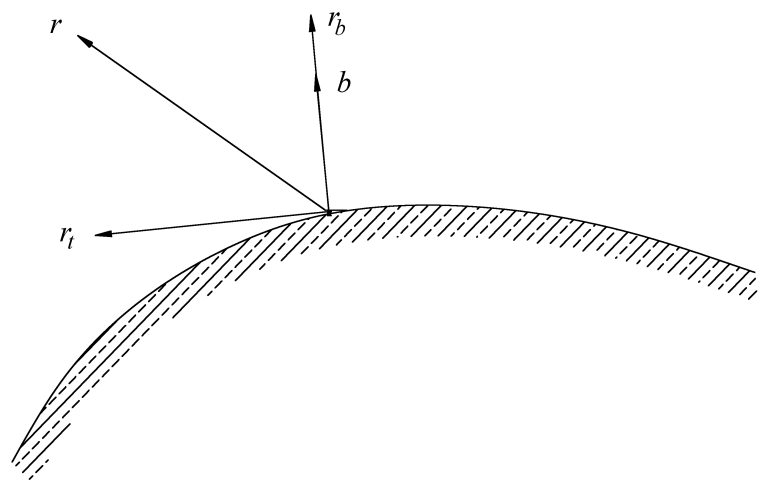

图 3　约束节点反力示意图

Fig. 3　Schematic of the reaction force of a constrained node

(2) 自由节点的位移校核

按照上面关于单边位移约束的定义,不应该有节点渗透到接触刚体内。但在计算过程中,某些临近约束面的自由节点有可能渗入到刚性约束面内,此时就有必要对约束条件修正。如图 4 所示,某一自由节点的位置在计算中越过了刚性约束面而发生了渗透,说明该节点应被约束住,在下一步迭代计算中将它作为约束节点进行计算。

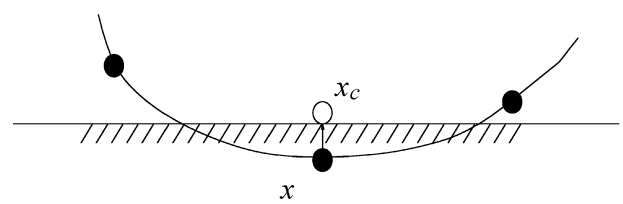

图 4　约束增量示意图

Fig. 4　The constraint increment of a constrained node

由此可见, 在求解过程中约束条件是随时变更的, 约束记录也随时增删。我们称这种允许改变的约束为可变约束[4]。

既然约束是可变的, 那么如何变、变多少又是如何确定的呢? 为此文献[4]提出了约束增量的概念, 其基本原则是:

(a) 任何一个驻定不动的约束节点的约束增量为零;

(b) 当一个自由节点渗入到约束表面内时, 从该点指向它约束面最近的点(垂足)矢量即为约束增量 Δu_c:

$$\Delta u_c = x_c - x \tag{23}$$

见图 4, 其中 x_c 代表指向垂足的矢径, x 代表该节点原来位置的矢径;

(c) 一个约束节点是否滑移取决于约束反力的切向分量与法向分量之比。

现将约束节点的约束反力分解为法向分量和切向分量(见图 3)

$$r = r_t + r_b \tag{24}$$

则约束节点滑移量的大小可确定如下:

$$\Delta u_c = 0 \quad \text{当} \quad \|r_t\| \leq \|r_b\| \cdot \mu \tag{25}$$

$$\Delta u_c = -r_t \cdot \mu' \quad \text{当} \quad \|r_t\| > \|r_b\| \cdot \mu \tag{26}$$

其中: μ 为摩擦系数, μ'是一个正数。μ'的大小对计算结果没有影响[4]。为了保证约束节点滑移之后仍位于约束面内, 如图 5 所示, 需由 $x + \Delta u_c$ 点向约束面作垂足交曲面于 c, 则 c 点成为该约束点的新驻定位置。修正后的约束增量为

$$\Delta u_c = x_c - x \tag{27}$$

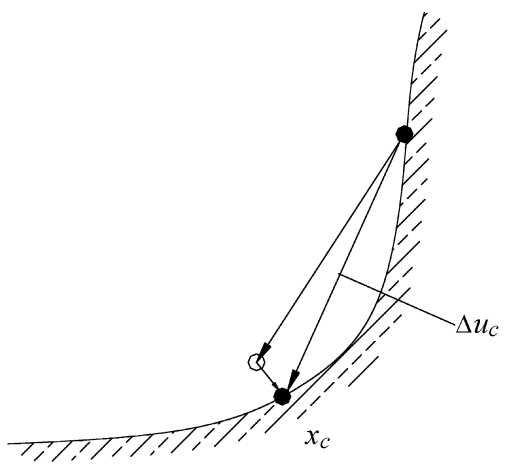

图 5 约束增量调节示意图

Fig. 5 The adjustment of constraint increment

由上述可见, 在约束调整的过程中, 一个约束节点可以离开约束面而成为自由节点(当约束反力为拉力时), 也可以沿着约束面滑移, 从而使切向约束力达到合理的大小; 一个自由节点随时都可以进入约束面成为新的约束节点(当发生位移渗透的时候)。如果计算是收敛的, 则在迭代中约束增量会越来越小, 以致于所有约束节点都会在合理的位置驻定下来, 见图 6。另外还可看出, 该方法使我们能象迭代修正自由节点位移一样对约束节点的驻定位置进行调节, 并可采用统一的最大位移增量收敛判剧, 从而使计算达到很高的精度。

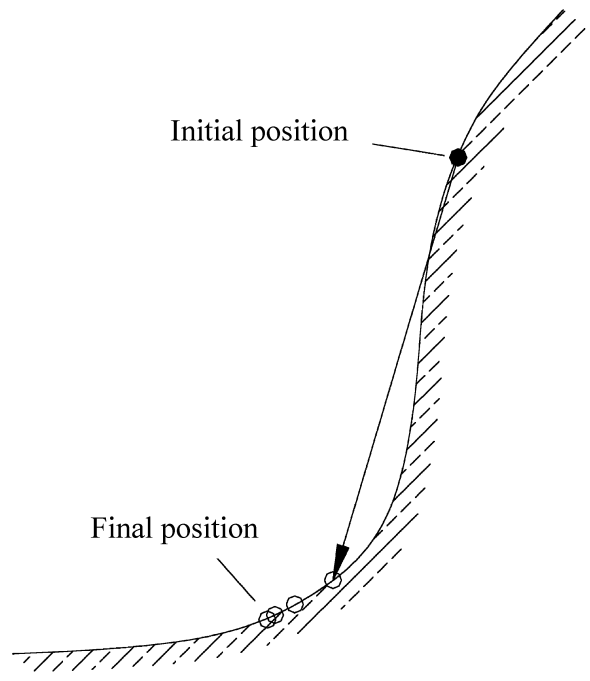

图 6 约束节点轨迹示意图

Fig. 6 The trajectory of a constrained node on the rigid surface

(3) 轮胎稳态滚动时的接触摩擦

轮胎在稳态滚动时, 在轮胎-地面接触面上有时会发生滑动摩擦。设地面相对于轮轴的运动速度为 V_0, 则滑移速度 Δv 可以定义为轮胎-地面接触面上 Ic 质点的速度 v 与 V_0 之差

$$\Delta v = v - V_0 \tag{28}$$

不妨假设在接触面上 Coulomb 摩擦定律仍然适用[9]

$$\|r_t\| < \mu \|r_b\| \quad \Delta v = 0 \tag{29}$$

$$\|r_t\| = \mu \|r_b\| \quad \Delta v \neq 0 \text{ 和 } \Delta v = -\lambda r_t \tag{30}$$

这里 μ 是摩擦系数, λ是一正数。r_t 与 Δv 的数值量关系见图 7(a), 图中的正负号仅表示两矢量的方向是相反的。r_t 在转向时的不连续跳跃往往会引起数值计算上的困难[9]。在本文中, 为解决这一数值计算的困难, 采用正则化的 Coulomb 摩擦定律形式[9]

$$r_t = -\mu \|r_b\| \cdot Q(\|\Delta v\|) \cdot \frac{\Delta v}{\|\Delta v\|} \tag{31}$$

其中: h_X 是正数$\|\Delta v\|$的足够平滑的函数, X是一个适当大小的正数, 如图 7(b)中的虚线所示。此外

$$Q(\|\Delta v\|) = 1 \quad \text{当} \quad \|\Delta v\| > X \tag{32}$$

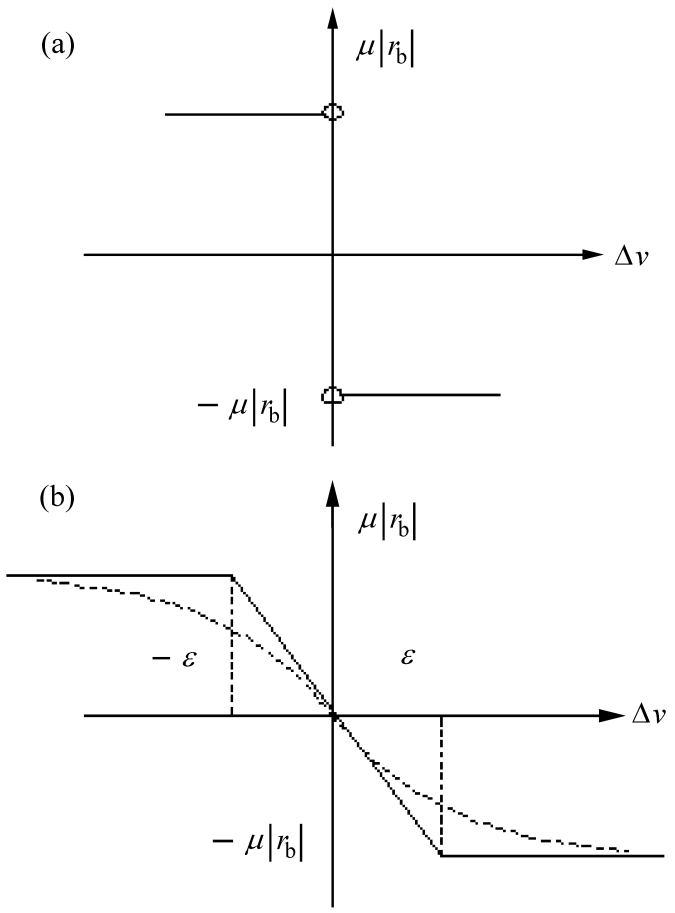

图 7　摩擦力与滑动速度之间的关系示意图

Fig. 7　Relationship between friction force and slip velocity

3　虚功方程

令 C 为右 Cauchy-Green 形变张量, ^ 为 Lagrangaian 乘子, p_0 和 q_0 分别为轮胎内表面压力和体力, 则虚功方程为

$$\int_{V_0} S: W\dot{E}dV + \int_{V_0} (\det C - 1) W\dot{W}dV =$$

$$\int_{V_0} d_0 i W\dot{W}dV + \int_{A_0} p_0 W\dot{W}dA + \int_{V_0} q_0 W\dot{W}dV \quad (33)$$

其中第一项是结构的变形虚功, 第二项是用 Lagrangaian 乘子处理材料的不可压缩性能[8]。该方程右边第一项、第二项和第三项分别为惯性力、表面力和体力的虚功。

4　数值结果

本文中利用上面所述的模型研制了一个模拟轮胎稳态滚动的有限元分析软件。在该软件中, 采用了两种三维等参单元, 即八节点六面体单元和六节点五面体单元。

在这里对载重子午线轮胎(9.00R20)进行了分析。图 8 给出的是截面几何和材料分布图, 图 9 是在一个截面内的有限元网格(有 167 个节点), 图 10 是整体有限元网格图。在分析中考虑到轮胎结构及受力的对称性, 只需分析其一半。轮胎内压为 0.91 MPa。

图 8　轮胎截面几何及材料分布图

Fig. 8　Diagram of tire sectional geometry and material distribution

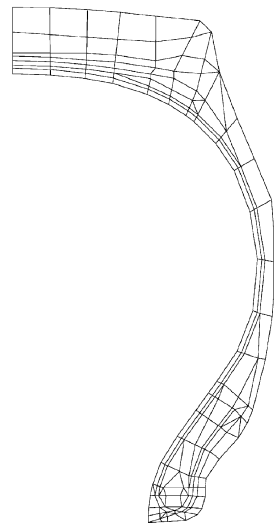

图 9　在一个截面内的有限元网格图

Fig. 9　Finite element mesh

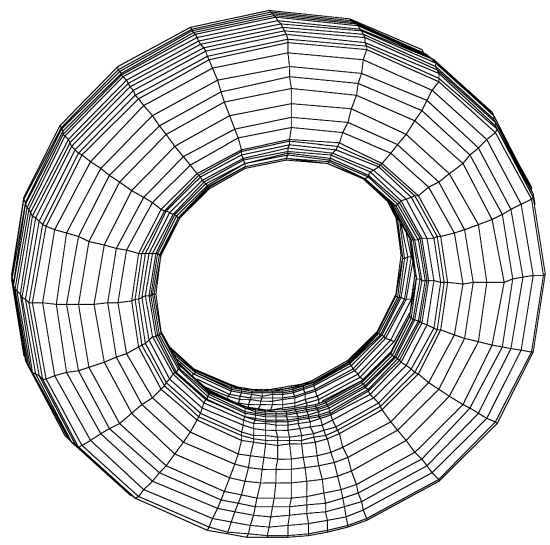

图 10　有限元整体网格图

Fig. 10　Whole finite element mesh

表 1 给出的是一些数值计算结果。由表 1 可以看出, 由本文有限元模型所预报的最大截面宽度随着轮胎运行速度的增加而减少, 地面总反力随着轮

表 1　轮胎最大截面宽度和地面总反力随着轮胎运行速度及下沉量的变化

Table 1　Varition of maximum sectional width and total tire-foundation contact force with speed and deflection

下沉量/mm	运行速度/(km·h^{-1})	最大截面宽度/mm	地面总反力/kN
10	0.0	262.27	5.1049
	50	261.96	5.2425
	100	261.57	5.7723
	150	260.78	6.6686
32	0.0	283.10	29.4913
	50	282.75	30.2242
	100	282.17	31.5737
	150	281.00	33.6859

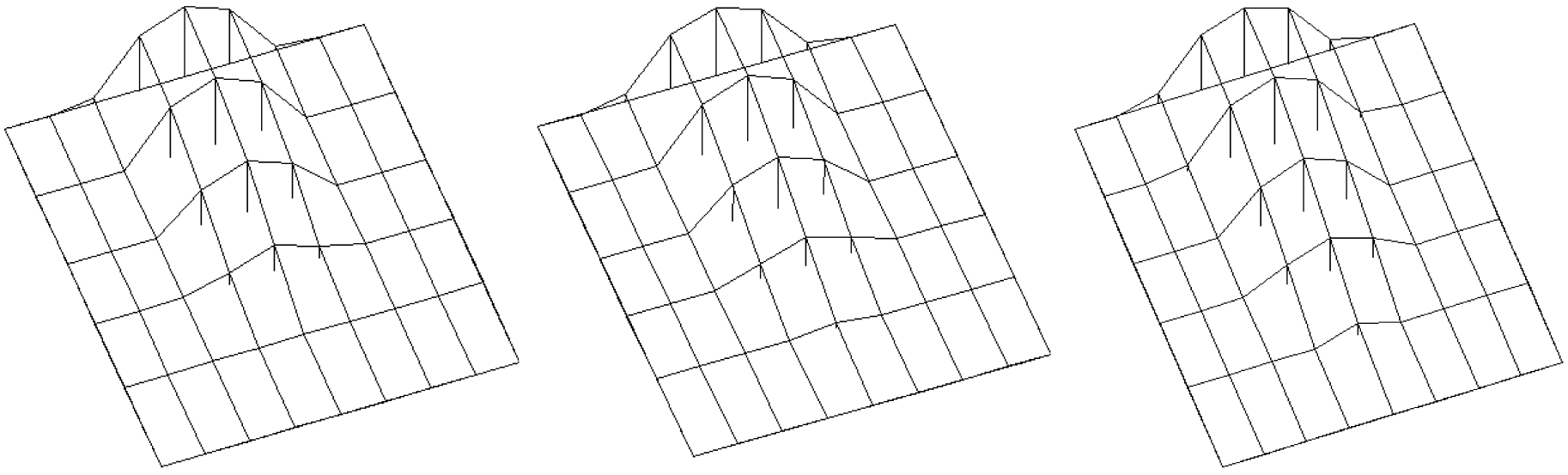

图 11 下沉量为 10 mm 时轮胎接地压力随轮胎速度的变化: (a) 速度为 50 km/ h, 最大接地压力为 405. 81 N; (b) 速度为 100 km/ h, 最大接地压力为 421. 30 N; (c) 速度为 150 km/ h, 最大接地压力为 453. 59 N

Fig. 11 Variation of tire-foundation contact pressure with tire speed under deflection of 10 mm

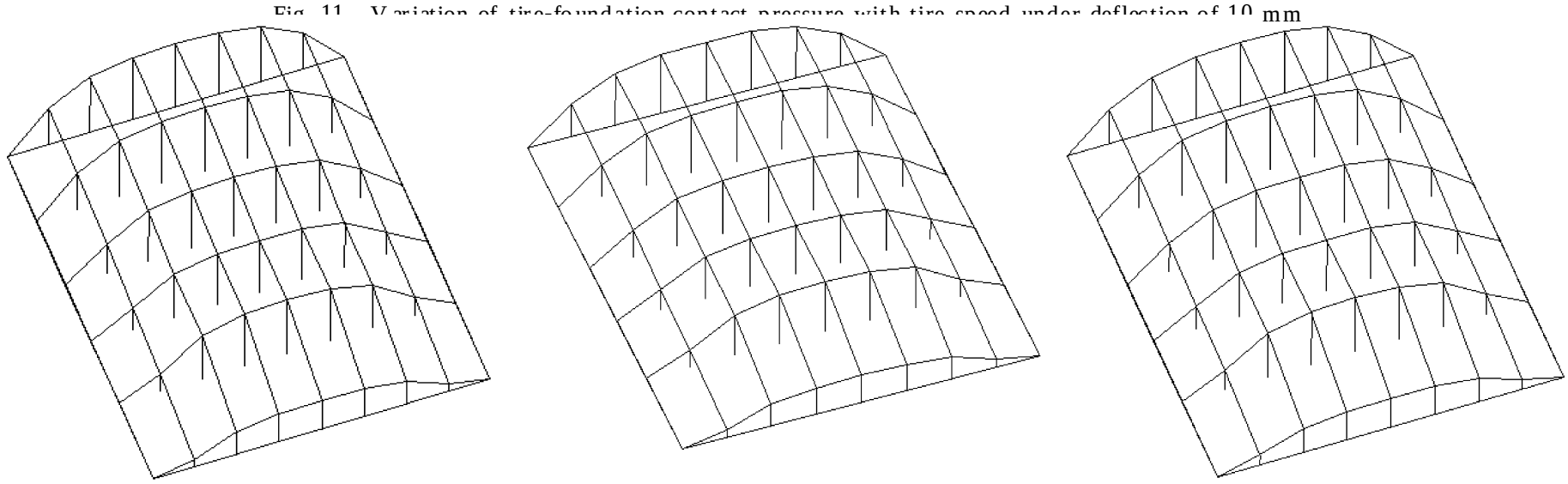

图 12 下沉量为 32 mm 时轮胎接地压力随轮胎速度的变化: (a) 速度为 50 km/ h, 最大接地压力为 603. 37 N; (b) 速度为 100 km/ h, 最大接地压力为 630. 26 N; (c) 速度为 150 km/ h, 最大接地压力为 667. 29 N

Fig. 12 Variation of tire-foundation contact pressure with tire speed under deflection of 32 mm

胎运行速度的增加而增加。这是因为轮胎运行速度愈高, 离心惯性力愈大。这种离心惯性力导致轮胎的胎冠沿径向向外移动。这可能就是轮胎的最大截面宽度和地面总反力随着轮胎运行速度呈现上述规律的原因。另外从表 1 还可看出, 在低载荷(或低下沉量) 情况下的轮胎运行速度对总地面反力的影响比高载荷(或高下沉量) 情况下的影响明显的多。

图 11～12 给出的是轮胎-地面接触节点力分布随轮胎运行速度和下沉量的变化, 可以看出最大轮胎-地面接触节点力随轮胎运行速度和下沉量的变化在趋势上与地面总反力的变化相同。

5 结 论

我们建立了一个稳态滚动轮胎的有限元分析模型。在该模型中, 考虑了轮胎变形的几何非线性、轮胎与地面和轮胎与轮辋的大变形非线性接触、轮胎材料的非均匀性、橡胶材料的不可压缩性和物理非线性、橡胶基复合材料的各向异性及轮胎与地面接触滑动摩擦。数值计算结果表明, 该模型是较为合理的。

参考文献:

[1] Noor A K, Tanner A. Advances and trends in the development of computational model for tires [J]. Computers and Structures, 1988, 20(3): 517- 533.

[2] Clark S K. Mechanics of pneumatic tires [M]. Washington D C: Department of Transportation, 1981. 480- 496.

[3] Tseng N T, Pelle R G, Chang J P. Finite element simulation of tire-rim Interface [J]. Tire Science and Technology, 1989, 17(4): 305- 325.

[4] Wu B, Du X. Finite element formulation of radial tires with variable constraint conditions [J]. Computers and Structures, 1995, 55(5): 871- 875.

[5] Rother H, Idelberger H, Jacobi W. On the finite element solution of the three dimensional tire contact problem [J]. Nucl Engng Des, 1984, 78: 363- 375.

[6] Sarkar K, Kwom Y D, Prevosek D C. A new approach for the thermo-mechanical analysis of tires by the finite element method

[J]. Tire Science and Technology, 1987, 15(4): 261- 275.

[7] Pottinger M G. The three-dimensional contact patch stress field of solid and pneumatic tires [J]. Tire Science and Technology, 1992, 20(1): 3- 32.

[8] Domscheit A, Rother H, Winkelmann T. Refined methods for tire computation [J]. Tire Science and Technology, 1989, 17(4): 291- 304.

[9] Faria L O, Bass J M, Oden J T, et al. A three-dimensional rolling contact model for a reinforced rubber tire [J]. Tire Science and Technology, 1989, 17(3): 217- 233.

[10] Halpin J C, Kardos J L. The Halpin-Tsai equations: a review [J]. polymer engineering and science, 1976, 16(5): 344- 352.

[11] Sun C T, Li S J. Three-dimensional effective elastic constants for thick laminates [J]. Journal of Composite Materials, 1988, 22: 629- 639.

[12] Tseng N T, Pelle R G, Chang J P, et al. Finite element simulation of destructive tire testing [J]. Tire Science and Technology, 1991, 19(1): 2- 22.

[13] Gall R, Tkacik P, Andrews M. On the incorporation of frictional effects in the tire/ground contact area [J]. Tire Science and Technology, 1993, 21(1): 2- 22.

附录:

帘线-橡胶复合材料模型

在用有限元法对轮胎进行分析时, 基于帘线-橡胶复合材料划分的单元通常分为两类, 一类是单元由单一帘线-橡胶复合材料构成(对子午胎的带束层和胎体通常是这样划分单元); 另一类是单元由两层或两层以上的帘线-橡胶复合材料构成(对斜交胎的胎体通常是这样划分单元, 因为斜交胎的胎体通常有很多层帘线-橡胶复合材料构成, 此时在一个单元内, 材料模型可看作是角铺设的层合板)。在这里, 对于由单一帘线-橡胶复合材料构成的单元, 其材料性能用正交各向异性材料模型模拟, 相应的材料常数用 Halpin-Tsai 方程[10]由组分材料性能确定

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m \tag{1}$$

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m V_m \tag{2}$$

$$\frac{M}{M_m} = \frac{1 + aZV_f}{1 - ZV_f} \tag{3}$$

$$Z = \frac{(M_f/M_m) - 1}{(M_f/M_m) + a} \tag{4}$$

式中: M= 复合材料模量 E_2, G_{12}, 或 ν_{23};

M_f= 对应于纤维模量 E_f, G_f, 或 ν_f;

M_m= 对应于基体模量 E_m, G_m, 或 ν_m;

a 是与纤维几何形状、填充几何形状和载荷情况相关的复合材料中纤维增强作用的量度[10]。

而对于由两层或两层以上的帘线-橡胶复合材料构成的单元, 其材料性能用 Sun 和 Li[11]提出的层合材料模型来模拟。对于有 N 层复合材料构成的层合板, 有效宏观应力(effective macro-stress)和有效宏观应变(effective macro-stress)之间的关系为[11]

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = [c] \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \tag{5}$$

其中当每一铺层材料具有 x-y 对称面时, 弹性常数矩阵为

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{45} & c_{55} & 0 \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \tag{6}$$

对于角铺设的层合板, c_{ij} 具有简单的形式

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \nu_k c_{ij}^{(k)} \qquad i, j = 1, 2, 3, 6 \tag{7}$$

$$c_{pq} = \left(\sum_{k=1}^{N} \nu_k c_{pq}^{(k)} / \gamma_k \right) / \gamma \qquad p, q = 4, 5 \tag{8}$$

其中 $c_{ij}^{(k)}$ 和 ν_k 分别为第 k 层材料的弹性常数和体积份数, 而

$$\gamma_k = c_{44}^{(k)} c_{55}^{(k)} - (c_{45}^{(k)})^2 \tag{9}$$

$$\gamma = \sum_{k=1}^{N} \nu_k c_{44}^{(k)} / \gamma_k \sum_{k=1}^{N} \nu_k c_{55}^{(k)} / \gamma_k - \left(\sum_{k=1}^{N} \nu_k c_{45}^{(k)} / \gamma_k \right)^2 \tag{10}$$