复合材料学报 第18卷 第4期 11月 2001年
ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA Vol. 18 No. 4 November 2001

文章编号: 1000-3851(2001)04-0103-05

两邻边铰支两邻边夹紧正交各向异性矩形板的中等大挠度

杨加明[1,2], 孙良新[1], 吴丽娟[2]
(1. 南京航空航天大学, 南京 210016; 2. 南昌航空工业学院 土木建筑系, 南昌 330034)

摘 要: 利用Galerkin方法分析了von-Karman型两邻边铰支两邻边夹紧正交各向异性矩形板。所设的位移函数为梁振动函数,它不仅能精确地满足边界条件,而且具有正交的特性,从而把复杂的非齐次非线性偏微分方程组化为一组非线性代数方程组。通过非线性方程组的线性化和可调节参数的修正迭代解法找出问题的解。实践证明,梁振动函数的收敛很快,只须取出级数的前几项即可满足精度要求。最后求出了不同复合材料的挠度和应力值。

关键词: 两邻边铰支两邻边夹紧; 正交各向异性; 几何非线性; 代数方程组
中图分类号: TB330.1 **文献标识码:** A

MODERATE LARGE DEFLECTION OF ORTHOTROPIC RECTANGULAR PLATES WITH TWO ADJACENT EDGES SIMPLY SUPPORTED AND THE OTHER TWO ADJACENT EDGES CLAMPED

YANG Jia-ming[1,2], SUN Liang-xin[1], WU Li-juan[2]
(1. Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China
2. Dept. of Civil Enginering, Nanchang Institute of Aeronautical Technology, Nanchang 330034, China)

Abstract: In the paper, von-Karman type orthotropic rectangular plates with two adjacent edges simply supported and the other two adjacent edges clamped are analysed by using Galerkin method. The beam vibration functions are taken as displacement functions that may accurately satisfy the boundary conditions, and have orthogonality property. The governing nonlinear partial differential equations are reduced to an infinite set of systems of nonlinear algebraic equations containing Fourier coefficients which have been solved by linearizing iterative procedures. The series of beam vibration functions are rapidly converged. Only a few items of the series may meet the need of accuracy. Numerical results of deflection and stress are obtained for different composite materials.

Key words: two adjacent edges simply supported and the other two adjacent edges clamped; orthotropic; geometrically nonlinear; algebraic equations

近几年来,关于正交各向异性板的几何非线性问题进行了大量的探讨工作。C. Y. Chia[1]教授较为系统地对各向同性、各向异性复合材料进行过分析。Sallam[2]研究了一种特定载荷的反对称层板的非线性问题。文献[3, 4]提出了板壳的线性和非线性问题较新的算法。但目前讨论较多的是四边简支或四边固定或两对边具有相同支撑的弹性转动约束边界条件。而对于两邻边铰支两邻边夹紧这种特定边界条件的大挠度问题的分析并不多见。本文作者找到了一种能够精确满足这种边界条件的梁振动函数,并充分利用其正交的优势把非线性偏微分方程组化为一组代数方程组,求出未知系数,找到问题的解。

1 基本理论

考虑一正交各向异性板,由于板厚与其横向尺寸相比较小,可利用克希霍夫基本假设,得到任意点的面内位移 u, v 和横向位移 w 与中面上的这三个分量 u^0, v^0 和 w^0 之间的关系

收稿日期: 2000-02-19; 收修改稿日期: 2000-09-06
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59675025)
作者介绍: 杨加明(1963), 男, 硕士, 副教授, 从事复合材料力学研究。

$$u(x,y,z) = u^0(x,y) - zw_{,x}$$
$$v(x,y,z) = v^0(x,y) - zw_{,y} \qquad (1)$$
$$w(x,y,z) = w^0(x,y)$$

在全拉格朗日法中，考虑中等大挠度的 von-Karman 板的大变形理论，根据文献[1]中的公式(1-42)，中面应变场为

$$X_x^0 = u_{,x}^0 + 0.5w_{,x}^2$$
$$X_y^0 = v_{,y}^0 + 0.5w_{,y}^2 \qquad (2)$$
$$X_{xy}^0 = u_{,y}^0 + v_{,x}^0 + w_{,x}w_{,y}$$

对于大多数正交各向异性板，可采用线性的应力-应变本构关系

$$\begin{matrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{matrix} = \begin{matrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{matrix} \begin{matrix} X_x \\ X_y \\ X_{xy} \end{matrix} \qquad (3)$$

这里的 C_{ij} 为转换的折算刚度。将上面的公式代入到 Chia[1] 给出的运动方程((1-44)、(1-45)、(1-46))中(静态)，无量纲化之后得到以位移形式表示的 von-Karman 型控制方程

$$U_{,aa} + \wedge^2 C_1 U_{,zz} + \wedge C_2 V_{,az} =$$
$$- W_{,a}(W_{,aa} + \wedge^2 C_1 W_{,zz}) - \wedge^2 C_2 W_{,z} W_{,az} \qquad (4)$$
$$\wedge C_2 U_{,az} + C_1 V_{,aa} + \wedge^2 C_3 V_{,zz} =$$
$$- \wedge W_{,z}(C_1 W_{,aa} + \wedge^2 C_3 W_{,zz}) - \wedge C_2 W_{,a} W_{,az} \qquad (5)$$
$$W_{,aaaa} + 2\wedge^2 C_4 W_{,aazz} + \wedge^4 C_3 W_{,zzzz} =$$
$$Q + W_{,aa}(U_{,a} + \wedge \nu_{21} V_{,z}) +$$
$$\wedge^2 W_{,zz}(\nu_{21} U_{,a} + \wedge C_3 V_{,z}) +$$
$$2\wedge C_1 W_{,az}(\wedge U_{,z} + V_{,a} + \wedge W_{,a} W_{,z}) +$$
$$0.5W_{,aa}(W_{,a}^2 + \wedge^2 \nu_{21} W_{,z}^2) +$$
$$0.5\wedge^2 W_{,zz}(\nu_{21} W_{,a}^2 + \wedge^2 C_3 W_{,z}^2) \qquad (6)$$

其中：

$$Y = x/a,\ Z = y/b,\ \wedge = a/b,\ U = \frac{12au^0}{h^2},$$
$$V = \frac{12av^0}{h^2},\ W = 2\sqrt{3}\frac{w}{h},\ Q = \frac{24\sqrt{3}q_0 a^4}{E_1 h^4}, \qquad (7)$$
$$C_1 = \frac{G_{12}}{E_1},\ C_2 = \nu_{21} + C_1,\ C_3 = E_2/E_1,$$
$$C_4 = \nu_{21} + 2C_1,\ \Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21}$$

这里，q_0 为板受的均布载荷；a, b 和 h 分别为板的长、宽和厚度；E_1, E_2 和 G_{12} 分别为正交各向异性板的主弹性模量和剪切模量；ν_{12}, ν_{21} 为泊松比；x, y 轴分别沿两铰支边。用位移表示的两邻边铰支和两邻边夹紧的边界条件为

$$\begin{aligned} &当\ a = 0\ 时，U = V = W_{,aa} = W = 0 \\ &当\ a = 1\ 时，U = V = W_{,a} = W = 0 \\ &当\ Z = 0\ 时，U = V = W_{,zz} = W = 0 \\ &当\ Z = 1\ 时，U = V = W_{,z} = W = 0 \end{aligned} \qquad (8)$$

用位移形式表示的弯曲应力和膜应力分别为[1]

$$e_a^b = \pm\sqrt{3}(W_{,aa} + \wedge^2 \nu_{21} W_{,zz})$$
$$e_z^b = \pm\sqrt{3}(\nu_{21} W_{,aa} + \wedge^2 C_3 W_{,zz}) \qquad (9)$$
$$e_{az}^m = \pm 2\sqrt{3}\wedge C_1 W_{,az}$$

$$e_a^m = U_{,a} + \wedge \nu_{21} V_{,z} + 0.5(W_{,a}^2 + \wedge^2 \nu_{21} W_{,z}^2)$$
$$e_z^m = \nu_{21} U_{,a} + \wedge C_3 V_{,z} + 0.5(\nu_{21} W_{,a}^2 + \wedge^2 C_3 W_{,z}^2)$$
$$e_{az}^m = C_1(\wedge U_{,z} + V_{,a} + \wedge W_{,a} W_{,z}) \qquad (10)$$

2 分　析

位移函数用双重 Fourier 级数表达，它们能精确地满足边界条件(8)

$$U = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn} I_m(a) J_n(Z) \qquad (11)$$
$$V = \sum_{m,n=1}^{\infty} v_{mn} I_m(a) J_n(Z) \qquad (12)$$
$$W = \sum_{m,n=1}^{\infty} w_{mn} X_m(a) Y_n(Z) \qquad (13)$$

式中：u_{mn}, v_{mn}, w_{mn} 为级数的待定系数，而

$$I_m(a) = \sin m\pi a \qquad (14)$$
$$J_n(Z) = \sin n\pi Z \qquad (15)$$
$$X_m(a) = \sin\wedge_m a - T_m \sinh\wedge_m a \qquad (16)$$
$$Y_n(Z) = \sin\wedge_n Z - T_n \sinh\wedge_n Z \qquad (17)$$

式(16)、(17)中的 $\wedge_i$ 和 T_i 由下式确定：

$$\tan\wedge_i - \tanh\wedge_i = 0 \qquad (18)$$
$$T_i = \sin\wedge_i / \sinh\wedge_i \qquad (19)$$

$X_m(a)$、$Y_n(Z)$ 为梁振动函数，它具备如下正交特点：

$$\int_0^1 X_i(a) X_j(a)\,da =$$
$$\int_0^1 Y_i(Z) Y_j(Z)\,dZ = \begin{matrix} 0 & i \neq j \\ H_i & i = j \end{matrix} \qquad (20)$$

为便于计算，把均布载荷也转化为 Fourier 级数形式

$$Q = \sum_{m,n=1}^{\infty} Q_{mn} X_m(a) Y_n(Z) \qquad (21)$$

充分利用 $X_m(a)$ 和 $Y_n(Z)$ 的正交性，Q_{mn} 很容易被确定如下：

$$Q_{mn} = \frac{Q}{H_m H_n}\int_0^1\int_0^1 X_m(a) Y_n(Z)\,da\,dZ \qquad (22)$$

用 Galerkin 方法，式(4)、(5)两边同乘 $I_m(a) J_n(Z)$；式(6)的两边同乘 $X_m(a) Y_n(Z)$，对 a 和 Z 分别从 0 到 1 积分，得到

$$u_{mn} + H_{4mn}\sum_{k,l=1}^{\infty} v_{kl} P_{13}^{mk} P_{13}^{nl} =$$

$$H_{5mn}\sum_{k,l,r,s=1}^{\infty} w_{kl}w_{rs}(P_{14}^{mkr}P_{17}^{nls} + C_1\lambda^2 P_{15}^{mkr}P_{18}^{nls} + C_2\lambda^2 P_{15}^{mrk}P_{19}^{nls}) \tag{23}$$

$$v_{mn} + H_{6mn}\sum_{k,l=1}^{\infty} u_{kl}P_{13}^{mk}P_{13}^{nl} = H_{7mn}\sum_{k,l,r,s=1}^{\infty} w_{kl}w_{rs}(\lambda^2 C_3 P_{17}^{mkr}P_{14}^{nls} + C_1 P_{18}^{mkr}P_{15}^{nls} + C_2 P_{19}^{mkr}P_{15}^{nsl}) \tag{24}$$

$$w_{mn} + H_{1mn}\sum_{k,l=1}^{\infty} w_{kl}P_1^{mk}P_1^{nl} = H_{2mn}Q_{mn} + H_{3mn}\sum_{k,l,r,s=1}^{\infty} u_{kl}w_{rs}(P_2^{mkr}P_4^{nls} + \lambda^2\nu_{21}P_5^{mkr}P_3^{nls} + 2\lambda^2 C_1 P_6^{mkr}P_7^{nls}) + H_{3mn}\sum_{k,l,r,s=1}^{\infty} v_{kl}w_{rs}(\lambda\nu_{21}P_3^{mkr}P_5^{nls} + \lambda^3 C_3 P_4^{mkr}P_2^{nls} + 2\lambda C_1 P_7^{mkr}P_6^{nls}) + 0.5H_{3mn}\sum_{i,j,k,l,r,s=1}^{\infty} w_{ij}w_{kl}w_{rs}(P_8^{mikr}P_{10}^{njls} + \lambda^2\nu_{21}P_9^{mikr}P_{12}^{nslj} + \lambda^2\nu_{21}P_{12}^{mrki}P_9^{njls} + \lambda^4 C_3 P_{10}^{mikr}P_8^{njls} + 4\lambda^2 C_1 P_{12}^{mikr}P_{12}^{njsl}) \tag{25}$$

式中 H_{imn} 和 P_i 详见附录。

3 非线性代数方程组的求解

实际上式(23)、(24)和(25)为一组非线性代数方程组。u_{mn}, v_{mn} 和 w_{mn} 为所求的未知数。我们知道, 非线性代数方程组有很多求解方法。实践表明, 下面介绍的所谓"可调节参数的修正迭代法"对解决这一类问题是行之有效的。求解的具体步骤如下:

(1) 先求解式(25)中的线性部分, 即等式左边的二项和右边的第一项。实际上它就是板的线性解。由于梁振动函数收敛很快, 取级数前几项即可。为不失一般性, 假设 m, n= 1, 2, …, N。通过求解 N×N 个未知数的线性代数方程组可求出第一次 $w_{ij}^{(1)}$ 值。

(2) 把上面求出的 $w_{ij}^{(1)}$ 值代入式(23)、式(24)的右边项, 将其结果作为常数项。

(3) 联合求解已线性化的式(23)、式(24)。$u_{ij}^{(1)}$, $v_{ij}^{(1)}$ 为未知数, 未知数总数为 $2N^2$ 个。

(4) 把第一次求出的 $u_{ij}^{(1)}$, $v_{ij}^{(1)}$ 和 $w_{ij}^{(1)}$ 再代入式(25)的非线性部分, 将其并入 $H_{2mn}Q_{mn}$ 作为新的线性解的常数项, 求出 $w_{ij}^{(2)}$, 利用刚求出的 $w_{ij}^{(2)}$ 再代入式(23)和式(24)中求出 $u_{ij}^{(2)}$ 和 $v_{ij}^{(2)}$, 重复上述过程直到满足精度要求为止。

值得注意的是, 上述方法仅当 Q 较小时可以收敛, 当 Q 较大时, 由于式(23)、(24)中的非线性部分突然增大会使结果发散。作者经多次实践发现, 采用下面的计算公式可以解决这一问题而无须使用传统费时的载荷递增迭代法。

$$\begin{aligned} u_{mn}^{(i)} &= (u_{mn}^{(i-1)} + u_{mn}^{(i-2)} + \cdots + u_{mn}^{(i-N_1)})/N_1 \\ v_{mn}^{(i)} &= (v_{mn}^{(i-1)} + v_{mn}^{(i-2)} + \cdots + v_{mn}^{(i-N_1)})/N_1 \\ w_{mn}^{(i)} &= (w_{mn}^{(i-1)} + w_{mn}^{(i-2)} + \cdots + w_{mn}^{(i-N_1)})/N_1 \end{aligned} \tag{26}$$

N_1 为一个可调节的参数。当载荷较小时, N_1 较小; 当载荷较大时, N_1 可取较大值。

4 数值结果

本文中采用的三种正交各向异性材料的弹性常数见表 1, 分别为玻璃环氧、硼环氧和石墨环氧。表 2 为超越方程(18)的根 λ_i、式(19)的值 T_i 和式(20)中范数 H_i 的值。从表 2 中可看出 T_3 比 T_i 小了几个数

表 1 材料的弹性常数

Table 1 Elastic parameters of orthotropic materials

材料	E_1/E_2	G_{12}/E_2	ν_{12}
玻璃环氧	3	0.5	0.25
硼环氧	10	1/3	0.22
石墨环氧	40	0.5	0.25

表 2 式(18)、(19)、(20)中的三个系数值

Table 2 Coefficients in equations(18), (19) and (20)

i	1	2	3	4	5	…
λ_i	3.926602	7.068583	10.21018	13.35177	16.49336	(i+ 0.25) π
T_i	-2.78749e-02	1.204117e-03	-5.203456e-05	2.248617e-06	-9.717156e-08	…
H_i	0.499612	0.500000	0.500000	0.500000	0.500000	0.500000

表 3 不同级数项对 D 解的影响

Table 3 Effect of different items of series on central deflection

Q	250		500		750		1000	
	线性	非线性	线性	非线性	线性	非线性	线性	非线性
1 项	0.9070	0.8855	1.8140	1.6696	2.7211	2.3289	3.6281	2.8837
9 项	0.9008	0.8500	1.8016	1.5010	2.7024	2.0213	3.6032	2.4302
25 项	0.9045	0.8517	1.8089	1.5031	2.7134	2.0222	3.6178	2.4289

量级,这说明由梁振动函数 $X_m(a)$ 和 $Y_n(Z)$ 构成的级数收敛速度会很快。另外,H_i 的值从第 2 项开始均可取为 0.5。

表 3 为玻璃环氧材料的正方形板取不同的级数项时对 W 解的影响。由表 3 可见,如果载荷不大,仅考虑板的线性解时,取一项其误差小于 0.3 %;当 Q 不断增加,需考虑非线性部分时,仅取 1 项是不合适的,但取 9 项(即 m, n= 1, 2, 3)其误差会小于 0.3 %。下图中的数值计算均取级数的前 9 项。

图 1 为典型的载荷挠度图。上线和中线为硼环氧材料,下线为各向同性材料(`= 0.3)。从图中可以清楚地看出,硼环氧方板当 w/h= 0.8 时其非线性程度达 40 %,随着 Q 值增大,w/h 接近 1 时,非线性程度会更大。计算表明,选用第一种材料,a= Z= 0.3, Q= 2250 时 W 线性值为 10.63,而非线性值仅为3.762。由此可见,当板的挠度达到中等变形或大变形时,考虑板的非线性影响是非常必要的。

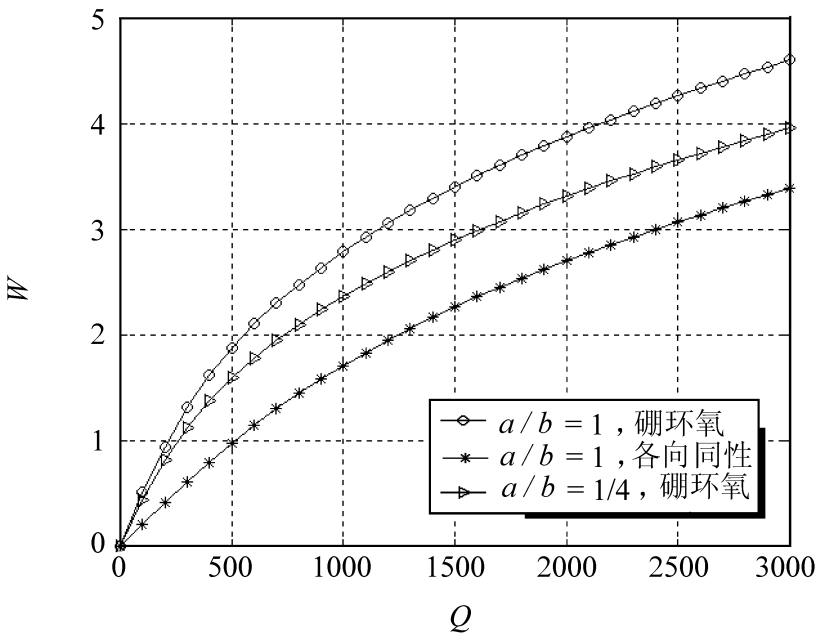

图 1　均布载荷与中心挠度的关系

Fig. 1　Relationship between central deflection and uniformly distributed loads

图 2 显示了当 a= Z= 0.3 时其挠度与应力的关系。从图中可清楚地看出:在小挠度情况下,弯曲应力占主导地位;随着变形的不断增加到达中等挠度时,膜应力增长很快,此时薄板的变形由弯矩和薄膜力共同承担。

图 3 和图 4 分别为石墨环氧方板当 Z= 0.5 时平行于 x 轴的直线上弯曲应力和膜应力分布情况。随着 Q 值不断增加,e_a^b 和 e_a^m 也不断增加,并且其最大值不在板的中心,弯曲应力的最大值在边界上;而膜应力的最大值在 a= 0.8 附近。

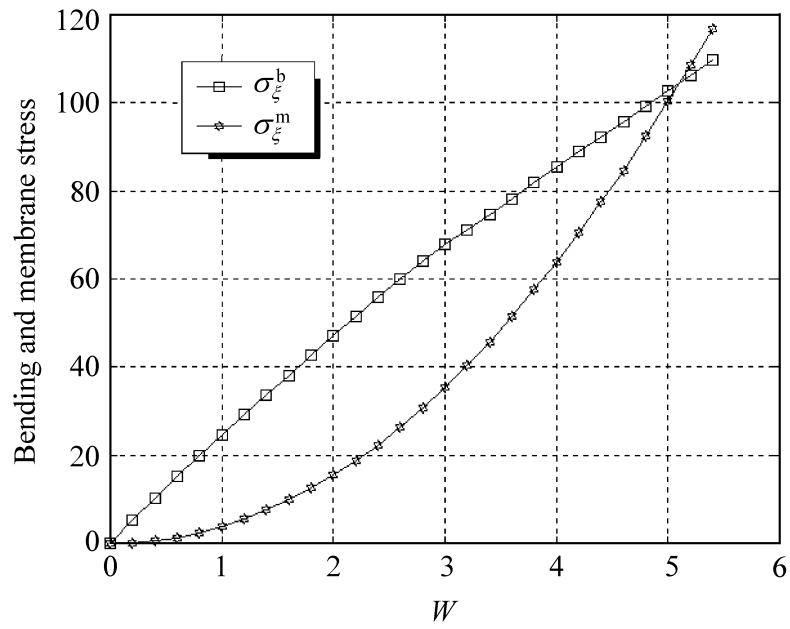

图 2　挠度与弯曲应力和膜应力的关系

Fig. 2　Relationship of deflection vs. bending and membrane stress

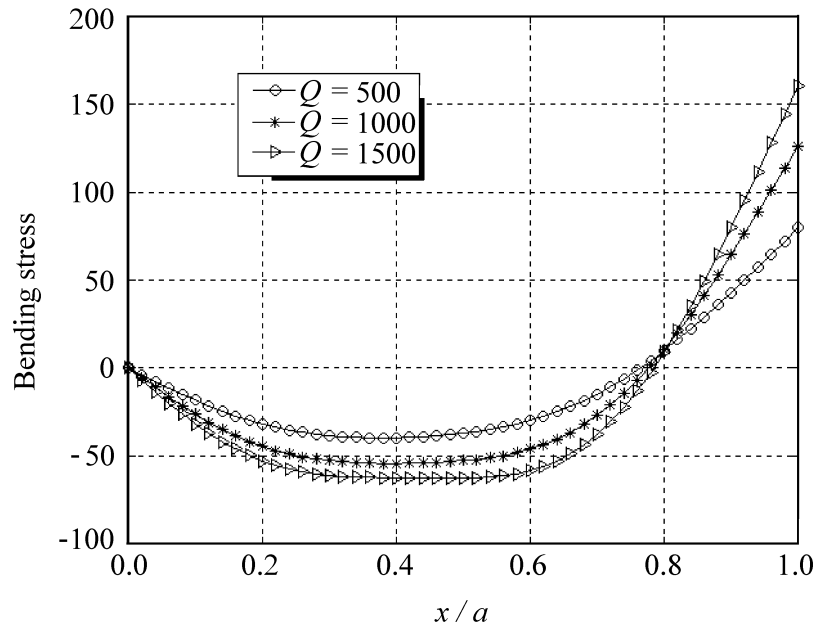

图 3　弯曲应力沿 Z= 0.5 直线上的分布曲线

Fig. 3　Distributed curves of bending stress along with Z= 0.5

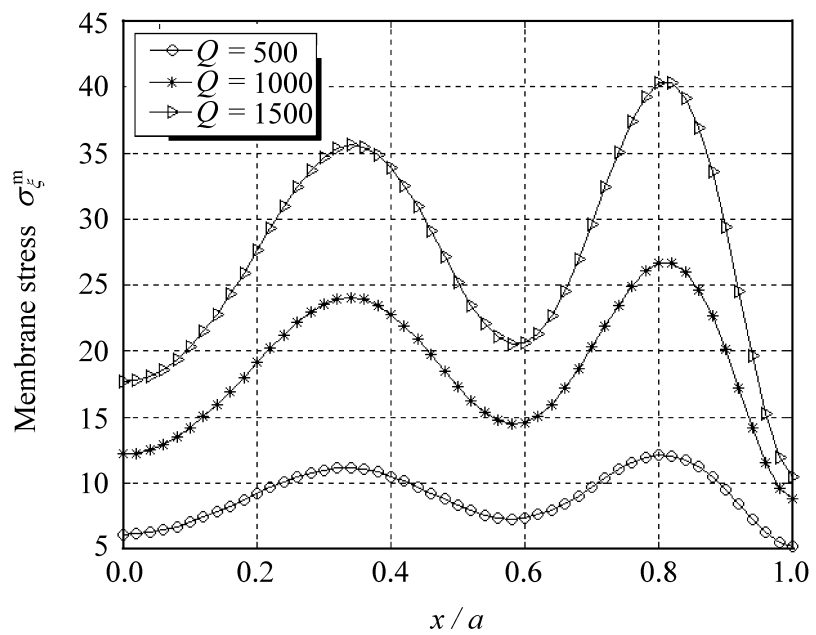

图 4　膜应力沿 Z= 0.5 直线的分布曲线

Fig. 4　Distributed curves of membrane stress along with Z= 0.5

图 5 为本文的线性与非线性解同其它结果的比较情况。两条斜直线为线性解。上面的虚直线为文

献[5]的结果; 下面实直线为本文的结果, 材料参数见文献[5]。上面三条曲线为非线性解。作者没有检索到同本文同样边界条件的几何非线性结果, 图中除列出了本文的两邻边铰支两邻边夹紧(SCSC)的解之外, 还列出了文献[1]的四边夹紧(CCCC)的结果和常见的四边铰支(SSSS)解, 选用的参数为 $\wedge=1$; $E_2/E_1=3$; $G_{12}/E_1=0.5$; $\nu_{21}=0.25$。

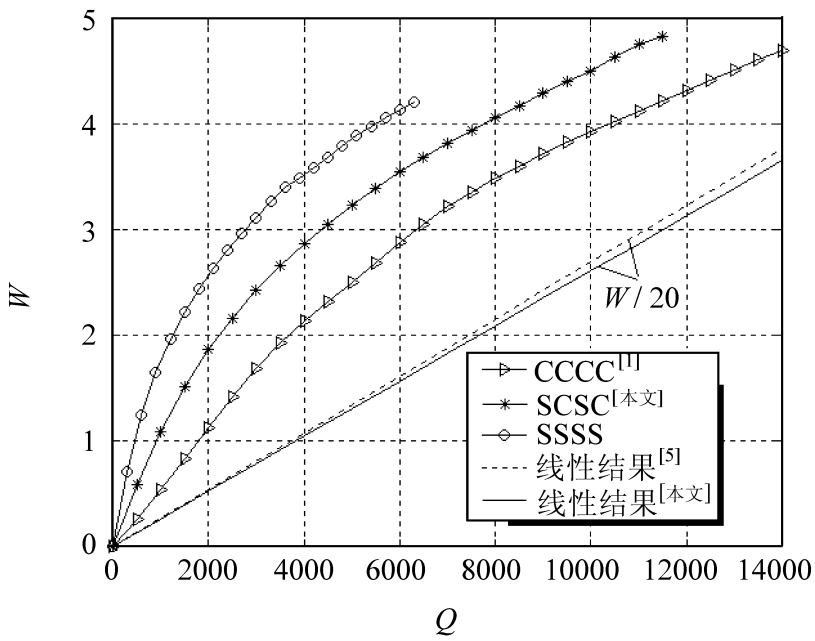

图 5 本文线性与非线性解同其它结果的比较

Fig. 5 Comparison of present linear and nonlinear results with others

5 结 论

(1) 本文中所选用的梁振动函数能精确地满足边界条件, 具备正交性, 收敛速度非常快。

(2) 本方法能同时解决线性问题和非线性问题并可进行比较。

(3) 利用可调节的参数 N_1 进行修正迭代是解决几何非线性的有效方案之一。

(4) 计算线性挠度仅取级数的第 1 项即可; 计算非线性挠度和应力值可取级数的前 9 项。

参考文献:

[1] Chia C Y. Nonlinear Analysis of Plates[M]. New York: McGraw-Hill, 1980. 253- 269.

[2] Sallam S, Simitses G J. Nonlinear analysis of laminated antisymmetric flat plates subjected to eccentric compression[J]. J Compos Struct, 1984, 2(6): 272- 281.

[3] 尹邦信. 复合材料多层板壳大挠度非线性问题的叠代解法[J]. 应用数学和力学, 1999, 20(7): 721- 728.

[4] 杨加明, 孙锁泰. 用减少弯曲刚度法研究非对称复合材料层压板的弯曲[J]. 复合材料学报, 1993, 10(4): 13- 22.

[5] 张福范. 弹性薄板[M]. 北京: 科学出版社, 1984. 103- 108.

附录:

(23)、(24)、(25)中的有关系数由下式定义:

$$H_{1mn}=\frac{2\wedge^2C_4}{H_mH_n(\wedge_m^4+C_3\wedge^4\wedge_n^4)}$$

$$H_{2mn}=\frac{1}{\wedge_m^4+C_3\wedge^4\wedge_n^4}$$

$$H_{3mn}=\frac{1}{H_mH_n(\wedge_m^4+C_3\wedge^4\wedge_n^4)}$$

$$H_{4mn}=-\frac{4\wedge C_2}{m^2+C_1\wedge^2n^2}$$

$$H_{5mn}=\frac{4}{c^2(m^2+C_1\wedge^2n^2)}$$

$$H_{6mn}=\frac{4\wedge C_2}{C_1m^2+C_3\wedge^2n^2}$$

$$H_{7mn}=\frac{4\wedge}{c^2(C_1m^2+C_3\wedge^2n^2)}$$

$$P_1^{mk}=\int_0^1 X_mX_k''da$$

$$P_2^{mkr}=\int_0^1 X_mI_k'X_r''da$$

$$P_3^{mkr}=\int_0^1 X_mI_kX_r''da$$

$$P_4^{mkr}=\int_0^1 X_mI_kX_rda$$

$$P_5^{mkr}=\int_0^1 X_mI_k'X_rda$$

$$P_6^{mkr}=\int_0^1 X_mI_kX_r'da$$

$$P_7^{mkr}=\int_0^1 X_mI_k'X_r'da$$

$$P_8^{mikr}=\int_0^1 X_mX_i''X_k'X_r'da$$

$$P_9^{mikr}=\int_0^1 X_mX_i''X_kX_rda$$

$$P_{10}^{mikr}=\int_0^1 X_mX_iX_kX_rda$$

$$P_{12}^{mikr}=\int_0^1 X_mX_i'X_k'X_rda$$

$$P_{13}^{mk}=\frac{1}{c}\int_0^1 I_mI_k'da$$

$$P_{14}^{mkr}=\int_0^1 I_mX_k'X_r''da$$

$$P_{15}^{mkr}=\int_0^1 I_mX_k'X_rda$$

$$P_{17}^{mkr}=\int_0^1 I_mX_kX_rda$$

$$P_{18}^{mkr}=\int_0^1 I_mX_kX_r''da$$

$$P_{19}^{mkr}=\int_0^1 I_mX_k'X_r'da$$