复 合 材 料 学 报 第 18 卷 第 4 期 11 月 2001 年
ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA Vol. 18 No. 4 November 2001

文章编号: 1000-3851(2001)04-0098-05

弹性接触颗粒状周期性结构材料力学分析的均匀化方法( )

—— 宏观均匀化分析

张洪武

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 工程力学系, 大连 116024)

摘 要: 基于文献[1]的工作, 给出弹性接触颗粒状组成周期性结构材料宏观力学均匀化分析新方法。该方法的特点是在对材料进行微观分析的基础上建立宏观材料的均匀化非线性数值本构模型, 并在此基础上构造宏观分析的一致性方法。给出了数值算例, 说明了方法的正确性与有效性。

关键词: 周期性复合材料; 弹性接触; 颗粒材料; 均匀化方法

中图分类号: TB330.1 **文献标识码:** A

HOMOGENISATION METHOD FOR THE ANALYSIS OF ASSEMBLAGE OF ELASTIC CONTACT GRAINS, Part : MACRO HOMOGENISATION ANALYSIS

ZHANG Hong-wu

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Based on the work presented in paper [1], a new homogenisation method for the analysis of assemblage of elastic contact bodies is proposed in this paper. An important feature of this work is to define numerically a homogenised constitutive relationship for the global behaviour of the assemblies in terms of the analysis on the RVE level, and a new consistent homogenisation method is furthermore presented. Numerical example and results are given to demonstrate the validity and efficiency of the new method.

Key words: periodic composite materials; elastic contact; granular material; homogenisation method

文献[1]回顾了具有周期性构造的弹性接触颗粒材料力学的微观(小尺度)与宏观两级均匀化方法的研究现状, 对基于单胞的非线性分析方法进行了阐述, 数值模型中考虑了颗粒体的弹性行为以及颗粒体之间的粘着-脱离-滑动等的相互作用关系。与纯接触问题不同, 这种粘着效应考虑了颗粒体之间的原始的粘着强度, 当这种粘着状态被破坏后材料将发生破坏。文中给出了问题分析的数值方法, 使表征单元的分析归结为多种荷载路径条件下的弹性接触问题分析。

本文在文献[1]工作的基础上, 建立了用于宏观分析的非线性数值本构模型, 基于自洽方法将宏观问题的分析转化为一般的弹塑性分析, 文中对方法的原理与计算模型进行了阐述, 并给出数值算例说明方法的有效性。论文的最后对所存在的问题进行了讨论。

1 局部 RVE 分析的边值问题

文献[1]中的第 2 部分给出表征单元 RVE 与微-宏观变量的定义。在此基础上, 均匀化分析中通常采用施加于 RVE 的以下三种经典的边界条件:

(1) S_{RVE}上的均匀应变

$$u_i = E_{ij} x_i \tag{1}$$

(2) S_{RVE}上的均匀应力

收稿日期: 2000-01-07; 收修改稿日期: 2000-08-02
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50178016)
作者介绍: 张洪斌(1964), 男, 工程力学教授, 从事计算非线性力学相关领域研究工作。

$$f_i = e_{ij} n_j = E_{ij} n_j \tag{2}$$

(3) S_{RVE}上的周期性边界条件

$$u_i = E_{ij} x_j + u_i^*, \quad u_i^* \text{ 以及 } e_{ij} n_j \text{ 在 RVE 中的周期性} \tag{3}$$

其中(1)和(2)为通常表示的边界条件,但其有一定的局限性,因为它们没有考虑到 RVE 内场的周期性变化的影响。本文中采用条件(3),因为条件(3)是更为合理的选择,它体现了材料结构的周期性变化以及力学量的周期性变化。考虑到 RVE 中边界上对应的两点 P_1 和 P_2(图 1 所示),则有下式位移关系成立:

$$u_i(P_1) - u_i(P_2) = E_{ij}[x_j(P_1) - x_j(P_2)] \tag{4}$$

如此在 RVE 对称的条件下,周期应力边界条件将会自然成立。

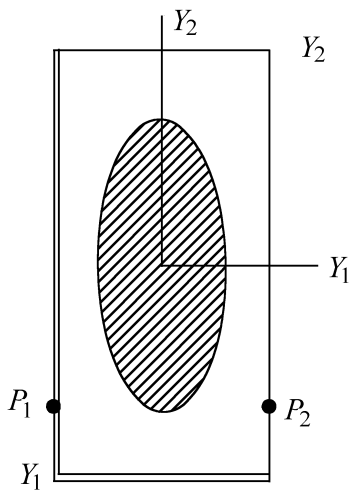

图 1 单胞或 RVE

Fig. 1 A unit cell or RVE

2 数值本构模型与均匀化分析方法

显然宏观的应力应变联系将构成材料在宏观上的本构关系,该方面较早的研究可参见 Tvergaard 的工作[2],因此这里研究的目的自然是寻求下列应力-应变关系:

$$E_{ij} = E_{ij}(E_{ij}) \tag{5}$$

假设颗粒状材料组成的材料在宏观上服从一般的弹塑性应力-应变关系,因此有

$$E_{ij} = E_{ij}^E + E_{ij}^P \tag{6}$$

其中: E_{ij}^E为宏观弹性应变, E_{ij}^P为塑性应变。更进一步, E_{ij}, E_{ij}^E与 E_{ij}的关系可以由下式表示:

$$E_{ij} = A_{ijkl}^E E_{kl}^E = A_{ijkl} E_{kl} \tag{7}$$

其中, A_{ijkl}^E是宏观弹性本构张量,已有很成熟的方法对其进行求解。与以往的研究不同,本文的研究中将利用文献[1]的工作对 A_{ijkl}的获得采取数值计算的手段,而且计算在“全空间”下进行,因而需要进行大量的数值测试。文献[1]已给出局部 RVE 分析方法,以下介绍经过大量数值测试所获得的宏观本构模型的过程。

首先,利用文献[1]给出的计算方法,将全局应变张量施加于 RVE,作为计算上的一致性,可以采取比例加载的方式,将应变张量分为若干步进行加载。对于每个加载末端的均匀化应力张量可由文献[1]中的式(2)获得。通过 E_{ij}的一系列加载过程将会在应力空间中形成一系列的“点”,通过改变 E_{ij}的形式,将会获得一系列在应力空间中的“塑性屈服面”,自然同时也会获得“初始屈服面”,在初始屈服面内,材料将具有弹性行为。作为示例,图 2 给出所谓的宏观数值本构模型的形式。

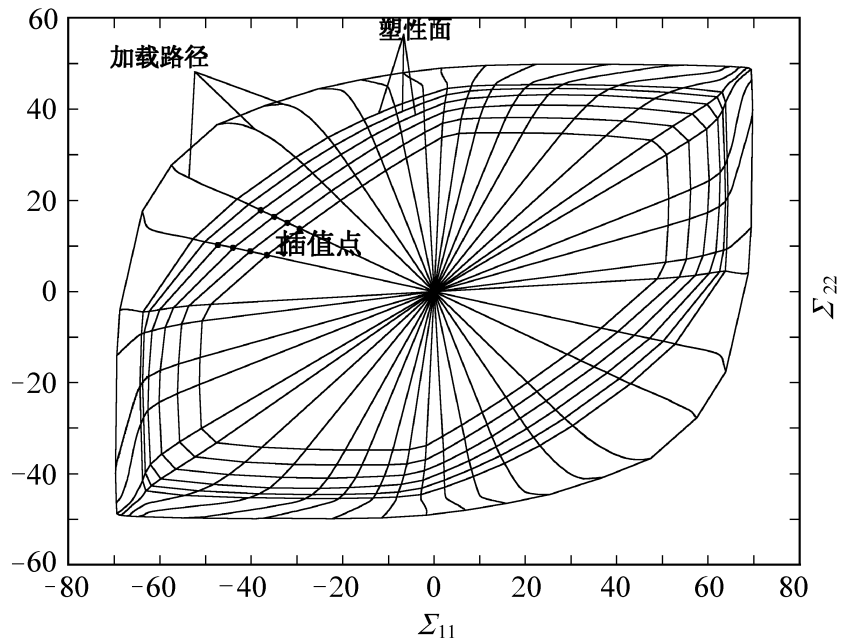

图 2 数值本构模型

Fig. 2 Numerical constitutive model

为保证宏观与微观分析上的一致性(或自洽),应进行宏观分析中概念的定义。也就是由图 2 定义塑性流动准则及硬化定律。由于宏观应力域已由图 2 所定义,因而有

$$E(x) \in S^{eff}(x) \tag{8}$$

其中 S^{eff}由图 2 所定义的应力空间。进一步,假设 S^{eff}位于下列屈服面内

$$S^{eff}(x) = \{E_{ij} \text{ 燏} (E_{ij}) \le E_y(x)\} \tag{9}$$

其中 $E_y(x)$为宏观屈服应力。在屈服函数 $f(E_{ij})$被确定之后(本文采取 von Mises 模型),由图 2 和式(9)可以对屈服应力 $E_y(x)$加以确定,自然在不同的插值点屈服应力的值一般说来将是不同的,插值的规则按线性插值进行,如图 3 所示。

为了获得屈服函数 $f(E_{ij})$,假设不同加载路径上的相同加载步点位于相同的“屈服面”上。如此可以构成一系列的“塑性屈服面”。显然这种定义具有

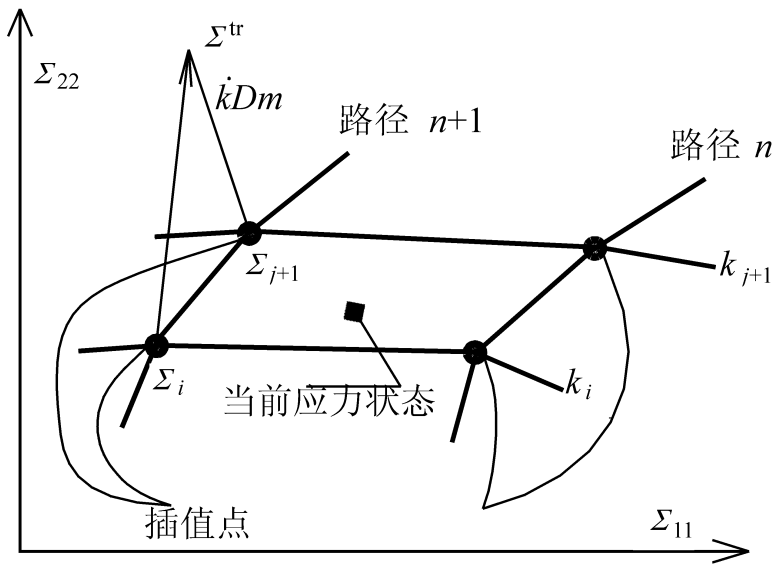

图 3　流动方向的插值求解

Fig. 3　Interpolation of the flow direction

广义性质,但却可以保证宏观与微观两级分析上的一致性。

进一步由式(6)与式(7),假设塑性流动规则可以表示为以下影射算法:

$$R = -E_{ij}^{tr} + E_{ij} + kA_{ijkl}^{E} m_{kl} \qquad (10)$$

其中: k 为塑性流动因子速率, m_{ij} 为流动方向,而 E_{ij}^{tr} 被表示为

$$E_{ij}^{tr} = A_{ijkl}^{E} E_{ij} \qquad (11)$$

塑性流动方向可以由图 2、图 3 的插值获得,表示为

$$m_{ij} = \frac{1}{k}(A_{klij}^{E})^{-1}(E_{kl}^{tr} - E_{kl})$$

$$= \frac{1}{k}(E_{ij} - (A_{klij}^{E})^{-1}E_{kl}) \qquad (12)$$

其中 k 值可以被任意的选取,本文中取值为 0.1。

至此已对宏观数值本构定律进行了阐述,利用宏观本构模型,宏观分析可以表述为

$$E_{ij,j} = F_i \quad \text{宏观平衡方程}$$

$$\text{宏观本构模型} \qquad (13)$$

$$\text{宏观边界条件}$$

其中 F_i 为外部荷载。

3　数值算例

作为数值计算,以下考虑两种计算方案对本文的算法加以验证。方案一是本文的模型,方案二是采取常规的一次性有限元分析。显然一次性的有限元分析的结果可以看作为问题的"精确解"来对本文的算法加以验证。

图 4 给出某类线圈的断面图,导线由铜、青铜以及 Nb_3Sn 合金制成,其弹性常数为: E= 128 GPa, `= 0.34。线圈的内部强度特性很大程度上取决于导线界面的强度。以下选择 4 种界面参数进行本文算法的验证。

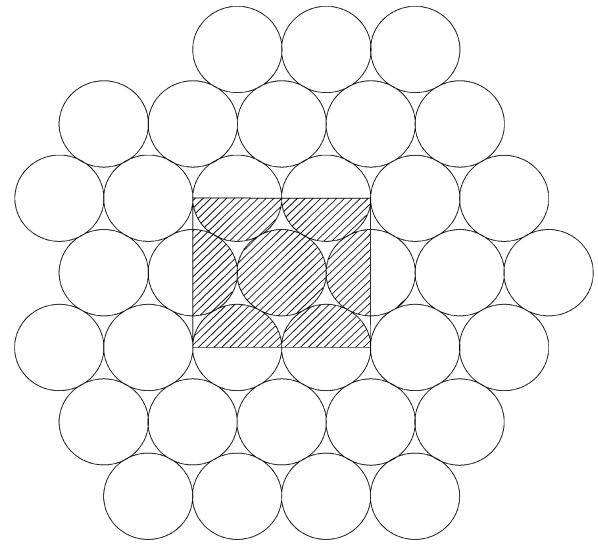

图 4　线圈断面图

Fig. 4　Cross section of strands

A　纯摩擦接触:

_= 0.25, p_{n0}= p_{t0}= 0, $\dot{W}^{*} \neq 0$

B　粘连性有摩擦接触:

_= 0.25, p_{n0}= 0, p_{t0}= $\frac{80}{3}$ MPa, $\dot{W}^{*}$= 0

C　粘连性有摩擦接触:

_= 0.10, p_{n0}= 0, p_{t0}= $\frac{80}{3}$ MPa, $\dot{W}^{*}$= 0

D　粘连性无摩擦接触:

_= 0.00, p_{n0}= 0, p_{t0}= $\frac{80}{3}$ MPa, $\dot{W}^{*}$= 0

图 5 给出 RVE 及网格划分。

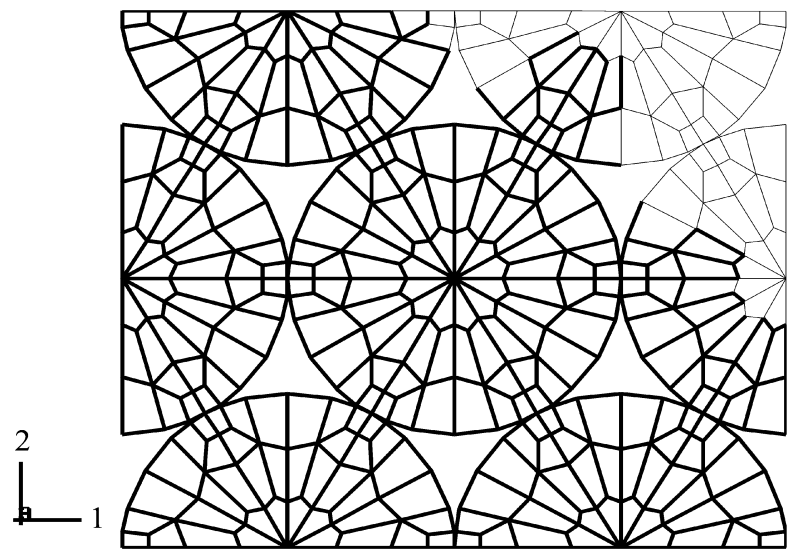

图 5　RVE 网格划分

Fig. 5　Mesh discretization of RVE

不同参数选取下通过计算获得的数值本构模型主应力空间{ E_{11}, E_{22} 燼 $E_{11} \leq 0$, $E_{22} \leq 0$} 示于图 6。显然,材料的微观性质对全局特性有明显的影响,图 6(b)、6(c)和 6(d)显示出界面摩擦系数对宏观材料性态的影响。

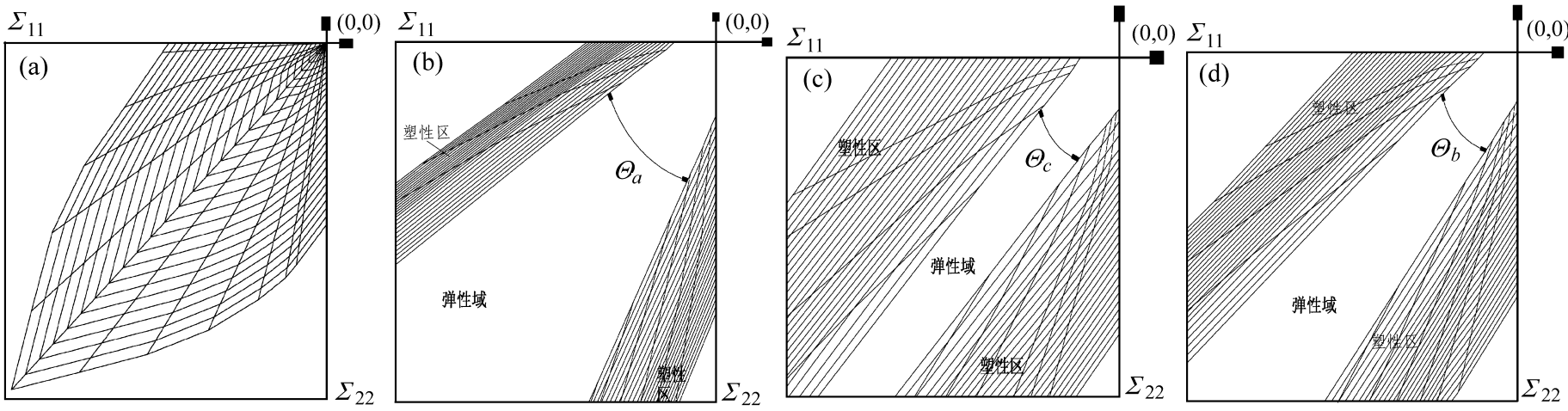

图 6 数值算例本构示意图

Fig. 6 Constitutive model of the numerical example

选取 140 砸线圈进行分析,图 7 给出加载情况。

均匀化分析采用 43 节点 35 单元的网格划分,作为结果比较,选取底面中点处由均匀化分析与一次性有限元分析的反作用力计算结果进行比较。图 8(a)、8(b)、8(c)与 8(d)给出不同参数情况下结果的比较,其中均匀化计算结果由“homog.”表示,而一次性有限元分析的结果由“heterog.”表示。显然均匀化方法给出良好的计算结果。

特别值得说明的是,对于纯摩擦接触的情形,宏观材料在压力作用下往往表现出“强化(压密)”的过程,应力-应变曲线成凹状,这种情况一般说来对算法会有特殊的要求。而本文的算法对这类问题则不具有任何困难,因而本文算法对接触粒状结构材料的均匀化分析是尤为有利的。

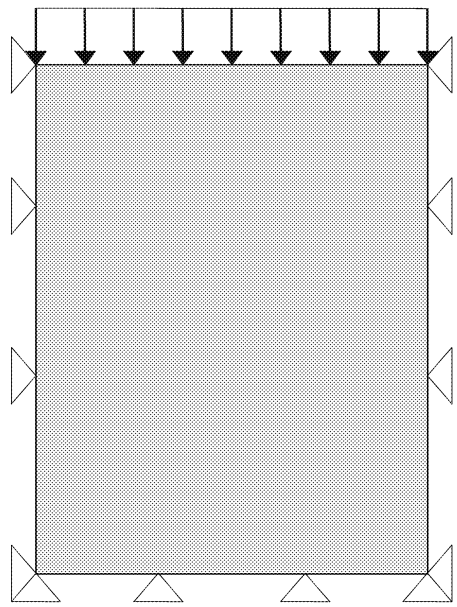

图 7 宏观结构与加载图

Fig. 7 Macro-structure and the load case

可以发现,图 6(a)显示的结果与常规的 Mohr-

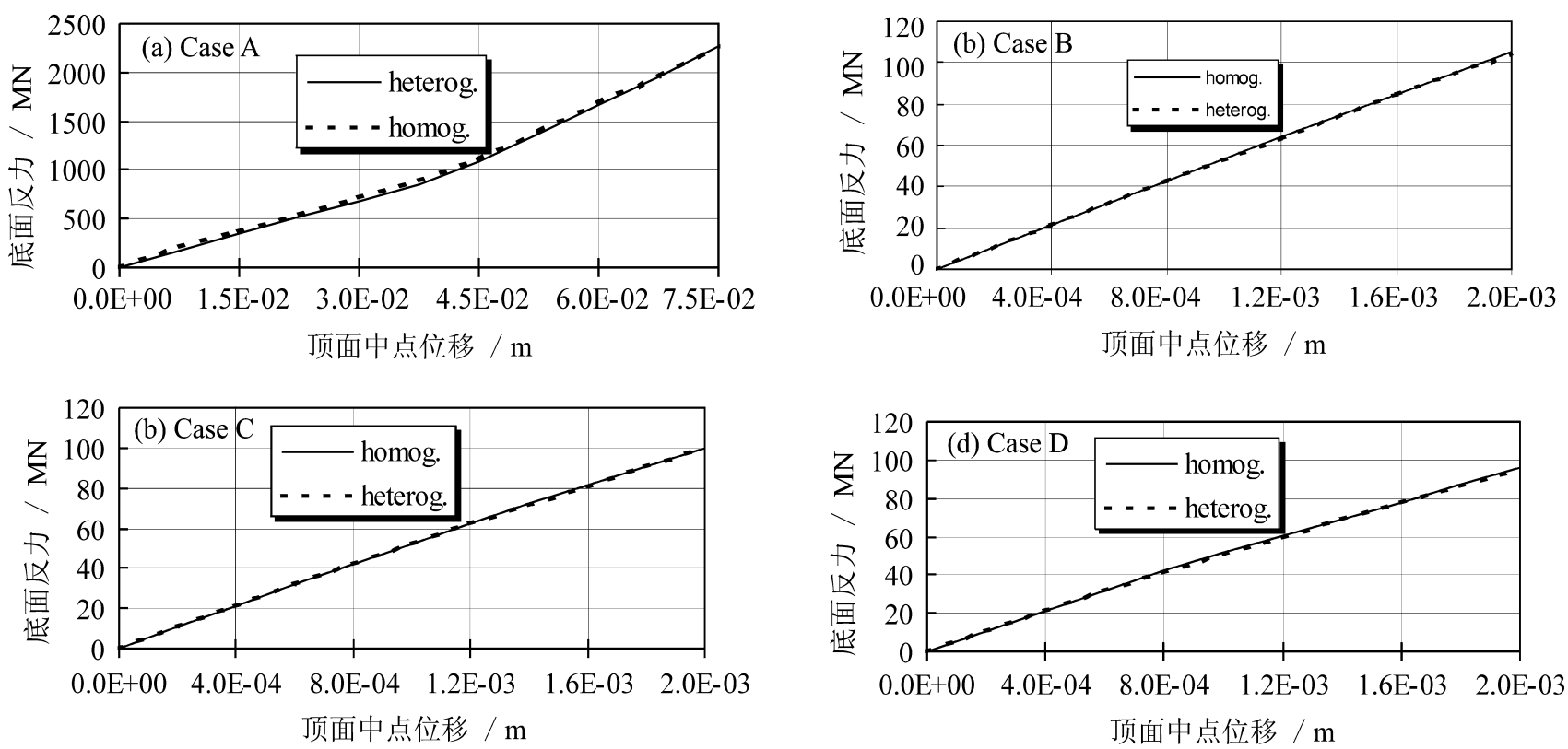

图 8 不同接触情况下结果比较

Fig. 8 Results comparison, (a) under purely frictional contact; (b) under adhesion contact with friction (c) under adhesion contact with friction; (d) under adhesion contact without friction

Coulomb 本构模型有很强的相似性,不同的是这里的各向异性特征,在本文数值本构测试的基础上采取修正的 Mohr-Coulomb 本构模型对宏观模型进行处理将是值得研究的工作,有待进一步进行。

4　问题讨论与结论

本文中通过数值本构模型的建立进行了弹性颗粒体组成结构宏观均匀化分析。对于微观分析,采用考虑粘着接触模型的问题有限元分析的参数二次规划算法;而对于宏观均匀化分析,则通过定义宏观"弹塑性"本构模型对问题进行求解,由于这种定义与运算严格按照由 RVE 分析所获得的数值本构模型来进行,因而宏观的均匀化分析与微观计算之间具有一致性,保证了宏观结果的自洽特性。数值上的计算结果很好地验证了这一点。

自然,目前所建立的算法也有值得进一步改进的方面。由于这里只进行二维问题的研究,所以数值本构模型的一般形式是三维的,在表述上无任何问题,但当所面临的问题是三维情形时,本构模型将是六维空间的形式,在表述上很难用直观的图形表示,应寻求相应的表示方法,尤其是数学上的直接表示方法,这一方面的工作有待进一步的研究。

致　谢: 感谢 Schrefler 教授对本文研究工作的帮助。

参考文献:

[1] 张洪武. 弹性接触颗粒状周期性结构材料力学分析的均匀化方法(Ⅰ)—— 局部 RVE 分析 [J]. 复合材料学报, 2001, 18(4): 93- 97.

[2] Tvergaard V. Analysis of tensile properties for whisker-reinforced metal-matrix composites [J]. Acta Metall Mater, 1990, 38: 185- 194.