复合材料学报 第18卷 第1期 2月 2001年
ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA Vol. 18 No. 1 February 2001

文章编号: 1000-3851(2001)01-0101-04

# 非均质梯度功能材料三维本构关系及宏细观结构分析

李 永[1], 张志民[1], 马淑雅[2]

(1. 北京航空航天大学 固体力学研究所, 北京 100083; 2. 中国航天机电集团 第四总体设计部, 北京 100854)

**摘 要:** 对非均质耐热梯度功能材料的结构与性能进行了研究。通过对陶瓷-金属梯度功能结构的分析, 建立了宏、细观力学模型, 并在此基础上导出了反映其宏观力学性能的三维本构关系。

**关键词:** 梯度功能材料; 三维本构关系; 力学模型; 结构分析

**中图分类号:** TB330.1 **文献标识码:** A

# NON-HOMOGENEOUS FUNCTIONALLY GRADIENT MATERIALS THREE DIMENSIONAL CONSTITUTIVE RELATION AND MACRO- OR MESO-SCOPIC STRUCTURE ANALYSIS

LI Yong[1], ZHANG Zhi-min[1], MA Shu-ya[2]

(1. Research Center of Solid Mechanics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China;
2. China Astronautics Mechanical and Electronic Group Forth Department, Beijing 100854, China)

Abstract: A study on the structure and property of uneven hot-resistant functionally gradient materials was introduced in this paper. The macro- and meso-scopic mechanical model was established by analyzing ceramic-metals FGM structure. Based on this analytical model, a three-dimensional constitutive relation reflecting its macro-properties was derived.

Key words: functionally gradient materials; three-dimensional constitutive relation; mechanic model; structure analysis

梯度功能材料(Functionally Gradient Materials, 以下简称 FGM)[1]是八十年代后期提出的新的材料设计思想, 是一种新型复合材料。从宏观上看, 其组分、结构形式和物性参数都呈梯度变化。陶瓷-金属 FGM 主要结构特点是各梯度层由不同体积浓度的陶瓷和金属组成, 不仅材料在升温和降温过程中宏观梯度层间产生热应力, 而且每一梯度层中细观增强相和基体的热物性失配将产生单层热应力, 以至导致材料整体的破坏。由于沿梯度方向和垂直于梯度方向的组织形态明显不同, 梯度结构表现出宏观上非均质性、各向异性和细观上连续性的分布特征。

近来的一些相关研究, 多采用 FGM 的当量方法、颗粒界面断裂理论、均匀化理论及有效性能预报, 这些工作大多包含了将增强相体分比(增强相占材料的百分含量, 用函数表示)作为表征材料宏细观结构的参数, 而并未充分考虑材料的宏细观特征, 虽方法简单, 但未揭示 FGM 的性能与结构本质。

本研究中针对 FGM 宏观厚层压板结构, 建立非均质各向异性三维 FGM 本构关系, 而对 FGM 细观结构分析时, 利用 Eshelby 理论、Mori-Tanaka 方法的结果, 建立含椭球形增强相 FGM 的细观力学本构关系。研究的目的在于建立 FGM 的宏观性能、组分材料性能及宏细观结构之间的定量关系, 揭示梯度结构的内在力学机理。同时, 其主要研究背景还在于, 根据工程上的需要选取合理的组分材料、梯度分布函数, 设计最优的 FGM 结构。有关该问题的数值分析与实验比较部分将在另文发表。

## 1 FGM 宏观结构分析与含热载、非均质、各向异性的三维 FGM 本构方程

针对 FGM 结构, 从层压 FGM 结构的三维宏观弹性特性[2]出发, 建立三维厚层压FGM结构分析

收稿日期: 2000-04-20; 收修改稿日期: 2000-06-23
作者介绍: 李 永(1972), 男, 博士研究生, 助理工程师, 从事梯度功能材料热应力的研究。
张志民(1934), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事复合材料板壳力学, 梯度功能材料结构等研究。

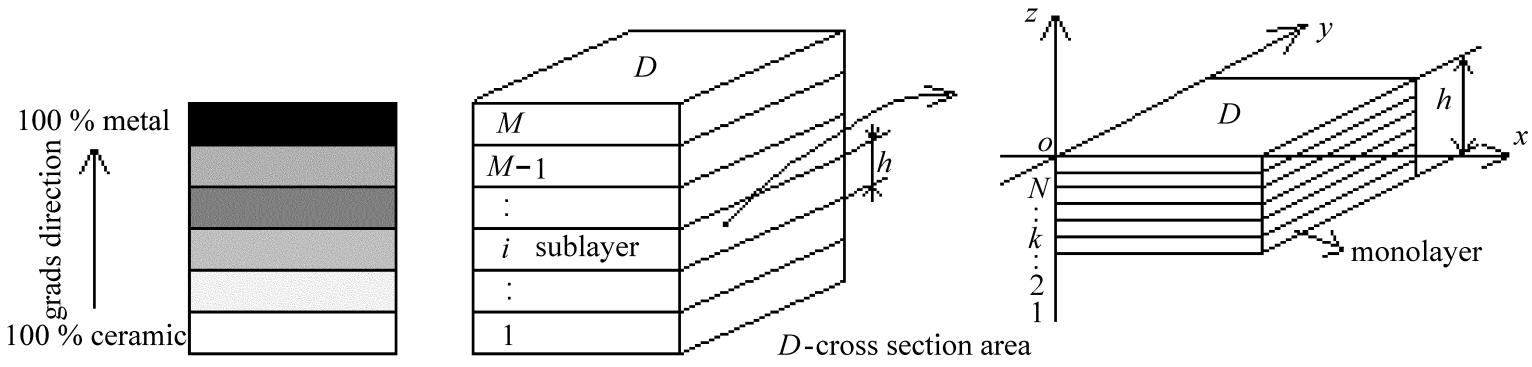


图 1　FGM 宏观厚层压三维结构模型示意图

Fig. 1　FGM macoscopical thick laminated three-dimensional structure model

理论。本研究建立了两次分层模型，其效果使材料分布趋于梯度连续，完整地反映了材料的结构。

考虑到制备、工艺、结构及计算等方面的原因，可将 FGM 分层。含一个梯度成分对偶对称面(在与 oxy 面平行等距离的两平面，陶瓷、金属成分体分比相等)，假定其为结构的广义弹性对称面，三维 FGM 厚层压结构由 M(M→∞)个等厚叠合的正交各向异性子层板组成，各子层具有不同的体分比，第 i 子层的体分比为 $f_i$。每一子层板又包含了 N 个正交各向异性的颗粒增强 FGM 单层(横截面积与子层相等，任一单层厚度相同)，各单层具有不同的体分比，因而具有各异的性能，第 k 单层的体分比为 $f_{(k)}$。但针对一个单层，层中各点的体分比是相同的，因而每一个单层都是均质材料，如图 1 所示。

对于三维 FGM 结构的宏观有效应力与有效应变的定义如下：

$$e_{mn} = \frac{1}{V}\int_V e_{mn}\,dV \qquad X_{mn} = \frac{1}{V}\int_V X_{mn}\,dV \tag{1}$$

式中，V 表示典型 FGM 结构整个厚度内的体积，同时假定子层面内的尺寸是微小的，每一子层内的应力 $e_{mn}$ 与应变 $X_{mn}$ 在面内可看作是均匀分布的，于是由式(1)可得

$$e_{mn} = \sum_{i=1}^{M} f_i e_{mn}^{i} \qquad X_{mn} = \sum_{i=1}^{M} f_i X_{mn}^{i} \qquad (i = 1, 2, \cdots, M) \tag{2}$$

本文中提出的 $f_i$ 由下式确定：

$$f_i = \sum_{k=1}^{N} f_{(k)} / N \tag{3}$$

假定单层面内的尺寸是很微小的，单层内的应力与应变在面内可看作是均匀分布的，可得 i 子层的应力与应变表达式为

$$e_{mn}^{i} = \sum_{k=1}^{M} f_{(k)} e_{mn}^{(k)} \qquad X_{mn}^{i} = \sum_{k=1}^{M} f_{(k)} X_{mn}^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \cdots, N) \tag{4}$$

式中，第 k 单层的体分比 $f_{(k)}$ 由下式确定：

$$f_{(k)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 y + a_4 y^2 + a_5 z + a_6 z^2 \tag{5}$$

式中，$a_j$ 为可变参数，其值取决于施加的约束条件、制备工艺及单层相对于子层的位置。因此 $f_{(k)}$ 的取值主要决定于梯度方向(z 向)的变化。这时可取 $a_1$，$a_2$，$a_3$，$a_4 \to 0$，涉及 x、y 方向时再考虑到夹杂和制备中燃烧波的影响。采用三元二次函数而不是用幂函数来描述 FGM 的成分分布，是从后续的热应力解析计算角度考虑，更易分析。

受机械/热载、含一个梯度成分对偶对称面的非均质各向异性 FGM 三维结构的本构方程为

$$\begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{yz} \\ e_{xz} \\ e_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{xx} \\ X_{yy} \\ X_{zz} \\ V_{yz} \\ V_{xz} \\ V_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{zz} \\ T_{yz} \\ T_{xz} \\ T_{xy} \end{bmatrix} \Delta T \tag{6}$$

式中[C]为三维结构的有效弹性系数矩阵，坐标平面 oxy 是整个三维结构层板的梯度成分对偶对称面，因此也是每个单层及子层的其中一个对称面。$[T_{(mn)}]$ 为结构热膨胀系数矩阵；ΔT 为结构梯度温差。

当已知子层板中第 i 子层的有效弹性系数矩阵 $[C]^i$，可由广义虎克定律得：任一正交各向异性梯度子层板的三维应力与应变的关系为

$$\begin{bmatrix} e_{xx}^{i} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{yz} \\ e_{xz} \\ e_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}^{i} \begin{bmatrix} X_{xx}^{i} \\ X_{yy} \\ X_{zz} \\ X_{yz} \\ X_{xz} \\ X_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T_{xx}^{i} \\ T_{yy} \\ T_{zz} \\ T_{yz} \\ T_{xz} \\ T_{xy} \end{bmatrix} \Delta T^{i} \tag{7}$$

式中：$[T_{(mn)}]^i$ 为子层板热膨胀系数矩阵，$\Delta T^i$ 为子层板梯度方向温差[3]。

由广义虎克定律得到任一正交各向异性单层板的三维应力与应变的关系式与子层板的式(7)形式相同。综上所述，我们得到 FGM 三维结构的有效弹性系数矩阵$[C]$、第 i 子层的有效弹性系数矩阵$[C]^i$与第 k 单层的有效弹性系数矩阵$[C]^{(k)}$存在定量的力学关系，例如

$$C_{11} = \sum_{i=1}^{M} f_i C_{11}^i + \sum_{i=2}^{M} (C_{13}^i - \nu_{13}^i) f_i (C_{13}^i - C_{13}^1) / C_{33}^i$$

$$C_{12} = \sum_{i=1}^{M} f_i C_{12}^i + \sum_{i=2}^{M} (C_{13}^i - \nu_{13}^i) f_i (C_{13}^i - C_{13}^1) / C_{33}^i$$

$$C_{11}^i = \sum_{k=1}^{N} f_{(k)} C_{11}^{(k)} + \sum_{k=2}^{N} (C_{13}^{(k)} - \nu_{13}) f_{(k)} (C_{13}^{(k)} - C_{13}^{(1)}) / C_{33}^{(k)}$$

$$C_{12}^i = \sum_{k=1}^{N} f_{(k)} C_{12}^{(k)} + \sum_{k=2}^{N} (C_{13}^{(k)} - \nu_{13}) f_{(k)} (C_{13}^{(k)} - C_{13}^{(1)}) / C_{33}^{(k)} \qquad (8)$$

其余数学表征详见文献[5]附录，单层板的弹性系数表征沟通了 FGM 宏细观的结构分析。

## 2　FGM 弹性系数的细观力学分析

在 FGM 单层板中存在含有扁长椭球形($a_z > a_x = a_y$)增强相的典型三维单元细观结构(定义为 FGM 单胞，与任一单层板等厚)，椭球颗粒大小相等，且排列一致，椭球体的三个轴($a_x$, $a_y$, $a_z$)分别与单胞坐标轴($x_d$, $y_d$, $z_d$)、单层板坐标轴($x$, $y$, $z$)平行。每个 FGM 单胞的基体和增强相均为各向同性材料，而 FGM 整体单胞却显示出各向异性，增强材料的体积相对于基体为非常地小并与基体紧密相联，如图 2 所示。

FGM 三维结构应力 e 和 X应变的向量表征为

$$e = (e_x, e_y, e_z, f_{yz}, f_{zx}, f_{xy})^T$$

$$X = (X_x, X_y, X_z, V_{yz}, V_{zx}, V_{xy})^T, \quad e = [C]X \qquad (9)$$

研究增强相 $K = K_1 + K_2 + K_3 + \cdots$ 处于 FGM 单层板的单胞 p 中的应力和应变。增强相形状和材质均相同，基体 $M(M = p - K)$ 的弹性系数矩阵为 $C_m$，增强相的弹性系数矩阵为 $C_r$，其体分比为 $f_{(k)}$。对于含有椭球形增强相的 FGM，设 FGM 单胞的平均应力场为 $e_p$，平均应变场为 $X_p$，其基体的平均应力场为 $e_m$，增强材料的平均应力场为 $e_r$，则

$$e_m = e_p - f_{(k)} C_m (S - E)\{C_m - (C_m - C_r) \cdot [S - f_{(k)}(S - E)]\}^{-1} [(C_m - C_r) C_m^{-1} e_p] \qquad (10)$$

$$e_r = e_p + (1 - f_{(k)}) C_m (S - E)\{C_m - (C_m - C_r) \cdot [S - f_{(k)}(S - E)]\}^{-1} [(C_m - C_r) C_m^{-1} e_p] \qquad (11)$$

$$X_p = \{C_m - (C_m - C_r)[S - f_{(k)}(S - E)]\}^{-1} \cdot [C_m - (1 - f_{(k)})(C_m - C_r) S] C_m^{-1} e_p \qquad (12)$$

$$e_p = C_p X_p \qquad (13)$$

这里，根据 FGM 单胞细观力学模型图，我们引入 Eshelby 张量 S[4]，S 张量的一个重要特性为：不对形式复杂的基体应力场进行详细考察也可以计算增强相的(非均匀)应力与应变 E 为单位矩阵，S 张量的表征为

$$S = \begin{matrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2S_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2S_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2S_{1212} \end{matrix} \qquad (14)$$

由 Eshelby 张量演算方法得到 S 的各个分量见文献[5]附录。式(12)表明 $e_p$ 与 $X_p$ 成线性关系，材料整体处于弹性状态。由式(11)、式(12)可得含有陶瓷、金属的 FGM 整体单胞的弹性系数矩阵为

$$C_p = C_m [C_m - (1 - f_{(k)})(C_m - C_r) S]^{-1} \cdot \{C_m - (C_m - C_r)[S - f_{(k)}(S - E)]\} \qquad (15)$$

上式表明当增强相为椭球颗粒时，若已知 FGM 的体分比 $f_{(k)}$ 和 Eshelby 张量 S(表征增强相的具体形状和尺寸)，由实验测得陶瓷、金属的弹性系数[6]，可由上述 FGM 的细观力学方法计算出材料整体的弹

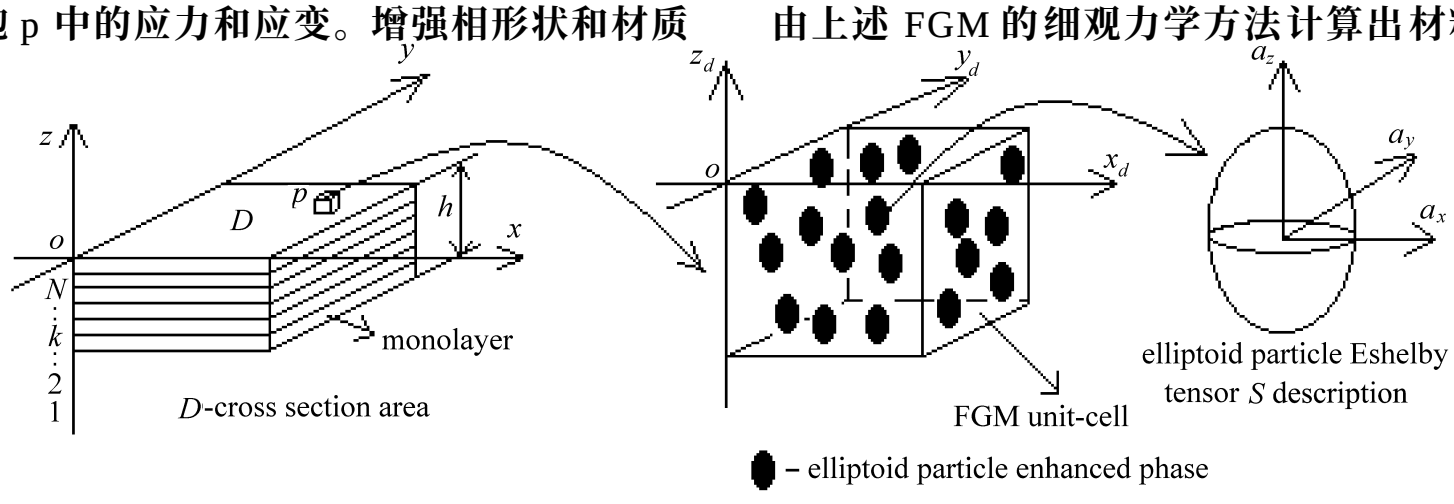


图 2　FGM 单胞细观力学模型图

Fig. 2　FGM unit-cell meso-scopic-mechanic model

性模量,为以后结构优化和材料设计、评估提供理论依据,已知 FGM 整体、陶瓷和金属任意两相的弹性系数,就可算出第三相的弹性系数。

## 3 结　论

FGM 有其独特的结构和特点,与通常的三维编织、纤维铺层结构以及陶瓷-金属复合结构有很大差异,本文中将其宏观本构理论与弹性系数的细观表征结合起来,使得 FGM 的宏观三维弹性系数均有适合梯度材料及结构特点的细观表征。使用本研究的结果,在 FGM 应力及应变的演算中,各种系数能够明确地显示,可完整、定量的表达其梯度本质,给后续的热应力计算带来了极大的方便。将在另文中为实际应用提供 FGM 结构热应力得以缓和的优化方法及数值分析结果。

## 参考文献:


[1] 川崎亮, 渡边龙三. 热应力缓和倾斜机能材料の$H_2O_2$燃烧がスによる遮热, 耐热特性评价[J]. 日本金属协会志, 1992, 56: 472- 480.

[2] 张志民. 复合材料结构力学[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1993. 30- 40.

[3] Erdogan F, Wu B U. Crack problem in FGM layers under thermal stress[J]. Thermal Stresses, 1996, 19: 237- 265.

[4] Eshelby J D. The determination of the elastic field of ellipsoidal inclusion and related problems[J]. Proc Roy Soc. 1957, A 241: 376- 396.

[5] 李　永, 张志民, 马淑雅. 梯度功能材料的结构分析与本构方程[A]. 第十一届全国复合材料学术会议论文集[C]. 合肥: 中国科技大学出版社, 2000. 819- 823.

[6] 李　永, 张志民, 马淑雅. 梯度功能材料的热应力研究进展[J]. 力学进展, 2000, 30(4): 571- 580.