复合材料学报 第18卷 第4期 11月 2001年
ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA Vol. 18 No. 4 November 2001

文章编号: 1000-3851(2001)04-0093-05

弹性接触颗粒状周期性结构材料力学分析的均匀化方法( )

——局部 RVE 分析

张洪武
(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室、工程力学系, 大连 116024)

摘 要: 研究工作目的是建立弹性接触颗粒状组成周期性结构材料力学分析的均匀化模型。首先对具有周期性构造的弹性接触颗粒材料力学的微观(小尺度)与宏观两级均匀化方法的研究现状进行了简要回顾, 进而发展了问题局部 RVE 分析的有限元求解技术, 该方法考虑了弹性接触体的粘着界面特性, 并基于参变量变分原理提出了问题求解的参数二次规划算法, 为宏观均匀化分析工作打下基础。

关键词: 周期性复合材料; 弹性接触; 颗粒材料; 均匀化方法
中图分类号: TB330.1 **文献标识码:** A

HOMOGENIZATION METHOD FOR THE ANALYSIS OF ASSEMBLAGE OF ELASTIC CONTACT GRAINS

PART ONE: LOCAL RVE ANALYSIS

ZHANG Hong-wu
(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment,
Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: This work attempts to find a new homogenization method for the analysis of assemblage of elastic contact bodies. A brief review of existing works for both micro or local analysis level and macro analysis level of the problem is given. The finite element method for the local RVE analysis is presented. An important feature of this work is the quasi-static cohesive frictional contact analysis of RVE, i.e. the local composed of deformable elastic bodies, by means of the parametric quadratic programming principle and its corresponding algorithmic implementation. The work presented in this paper is a fundamental study for the homogenization analysis of the problem.

Key words: periodic composite materials; elastic contact; qranular material; homogenization method

如果材料体在空间由重复且具有周期性的标准单元(单胞)所组成, 则可称之为周期性材料。一般说来, 周期性结构单胞的特征尺寸要比由很多单胞组成的宏观结构体的尺寸小得多。

基于弹性假设的问题均匀化分析方法的研究工作已有相当丰富的研究成果。由于材料的破坏过程往往与材料的非线性特征相联系, 对非线性问题分析均匀化方法的研究意义就显得更重要。然而, 由于非线性分析问题自身的难度, 该方面的研究显得较线性问题要复杂得多, 很难找到一种对一般非线性问题均较为适用的方法。迄今为止, 发展起来的各种方法一般说来都有自己的局限性。许多方法都限定于特定加(卸)载情况下问题的研究, 如何构造适用于各种受力状态的材料的非线性均匀化分析方法仍是人们所致力研究的课题。本领域目前较有代表性的是 Dvorak 等[1](及其后的文献)的工作, 但数值经验表明, Dvorak 等的 TFA (Transformation Field Analysis) 方法在许多情况下表现出的是其过于刚

收稿日期: 2000-01-07; 收修改稿日期: 2000-08-02
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50178016)
作者介绍: 张洪武(1964), 男, 教授, 从事计算非线性力学相关领域研究工作。

性,使均匀化计算结果与精细的有限元计算结果相比误差过大。而对于本文中所研究的周期性弹性颗粒接触体构成的复合材料的分析来说,利用 TFA 方法是相当困难的。

对于线弹性分析的均匀化分析方法,较早的研究可以追述到 Hill[2] 等的工作,其研究方法的核心是所谓的自洽理论。而对于弹塑性分析的均匀化理论,较早的工作由文献[3～7]给出。较新的工作则可以从文献[1]、[8～13]中看到。对于考虑弹性接触颗粒构成的周期性材料结构的非线性分析,文献[14]、[15]建立了适用于弹性圆盘组合体的数值分析模型,所建议的方法考虑了弹性体间的接触行为,并利用接触圆盘的形心之间的增量相对位移进行接触力与接触位移的计算;文献[16]进一步发展了一种适合粒状材料分析的特殊有限元方法(Distinct Finite Element Method),由于该方法具有较好的计算效率,后来由一些研究工作者进行了发展[17～19],该方法的特点是通过 Newton 第二定律的显式积分算法进行颗粒的运动计算;Chang 等[20]进一步采用自洽算法进行分析,该方法计及了颗粒体的各种接触状态的计算;Wren 和 Borja[21]则推导了拟静态条件下非均匀局部不连续颗粒体运动的宏观本构方程。

与以上研究工作不同,本文作者在建立周期性弹性颗粒组成的材料的宏观本构模型上将考虑颗粒体的弹性行为以及颗粒体之间的粘着-脱离-滑动等相互作用关系。与纯接触问题不同,这种粘着效应考虑了颗粒体之间的原始粘着强度,当这种粘着强度被破坏后材料将发生破坏。在以下的论述过程中将首先给出均匀化分析的基本方程,进一步对基于单胞的非线性分析方法进行了阐述,其原理基于钟万勰教授等提出并发展的非线性问题分析的参变量变分原理[22, 23]并针对本文的问题进行了适当的改进,提出了用于粘连性弹性接触问题分析的参数二次规划算法,于是表征单元的分析归结为多种荷载路径条件下的弹性接触问题分析。

本文是宏观均匀化问题分析的第一步研究工作,在此基础上建立的弹性接触颗粒状组成周期性结构材料力学分析的均匀化方法将在另文[24]中给出。

1　表征单元与微观、宏观变量

考虑周期性结构体 K,其力学或几何特性参量(如本构张量) a 可以表示为

$$\text{if } X \in K \text{ and } (X+Y) \in K \quad \text{有} \quad a(X+Y) = a(X) \tag{1}$$

其中,Y 是结构的周期。单胞的特征尺寸一般说来要比宏观结构的尺寸小得多,通常的处理方式是将单胞作为 RVE 处理(RVE——表征体单元)。

在以下的描述中,微观(RVE 尺度)量的描述用小写字符表示,而宏观变量则用大写字符表示。如用 e_{ij}、e_{ij} 表示微观应力、应变张量,E_{ij}、E_{ij} 表示宏观应力、应变张量。宏观应力与应变可定义为

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{V}\int_{V^*} e_{ij}\,dV \\ E_{ij} &= \frac{1}{2V}\int_{S_{RVE}} (u_i n_j + u_j n_i)\,dS - \\ &\quad \frac{1}{2V}\int_{S_{12}} ([u_i] n_j + [u_j] n_i)\,dS_{12} \end{aligned} \tag{2}$$

其中:V^* 为 RVE 中介质所占空间的体积,S_{RVE} 是 RVE 外表面面积,S_{12} 是 RVE 内出现的间断面(如接触破坏面)面积,$[u_i]$ 表示越过 S_{12} 间断位移场的突变量,n_i 是与 S_{12} 垂直的法矢量。

2　局部 RVE 分析基本理论

鉴于 RVE 分析的实质是进行具有粘连特性的弹性接触分析,不失一般性,问题归结为如图 1 所示两个弹性接触体 K_1 与 K_2 的分析问题。令接触体的边界 $S^{(T)}$ 分别由力边界 $S_p^{(T)}$、位移边界 $S_u^{(T)}$ 和接触边界 $S_c^{(T)}$ 组成,其中 T= 1, 2 表示两个接触体。

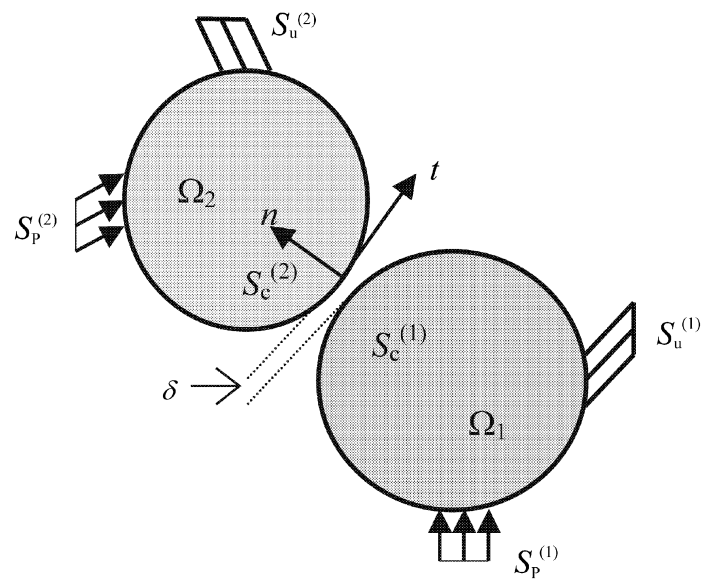

图 1　RVE 内的接触体

Fig. 1　A unit cell or RVE

令 $p_c = \{p_t, p_n\}^T$ 表示接触面上的压力,接触面的局部坐标系用 o-t-n 表示,则接触状态的三类特征可表示为

(1) 自由状态(两体分离)

$$du_n^{(1)} - du_n^{(2)} + \overset{*}{W} > 0,\ p_n = p_t = 0 \tag{3}$$

(2) 粘连状态

$$\begin{aligned} &du_n^{(1)} - du_n^{(2)} + \dot{W} = 0,\ p_n - p_{n0} < 0 \\ &du_t^{(1)} - du_t^{(2)} = 0,\ \|p_t\| < -\lambda p_n + p_{t0} \end{aligned} \tag{4}$$

(3) 滑动状态

$$\begin{aligned} &du_n^{(1)} - du_n^{(2)} + \dot{W} = 0,\ p_n < 0 \\ &du_t^{(1)} - du_t^{(2)} > 0,\ \|p_t\| = -\lambda p_n \end{aligned} \tag{5}$$

其中: $du_t^{(T)}$、$du_n^{(T)}$、p_t 及 p_n 是接触(面)点切向增量位移、法向增量位移、切向与法向力; p_{t0} 与 p_{n0} 是接触(面)点的初始切向与法向粘着力, 自然这种粘着力在粘连状态被破坏后不再存在; λ 与 $\dot{W}$ 是滑动摩擦系数与接触面可能存在的间隙值。通过罚函数手段, 接触摩擦本构关系可进一步表示为

$$\begin{aligned} &p_n = 0, \text{自由状态;} \\ &p_n = \chi_n(du_n^{(2)} - du_n^{(1)} - \dot{W}), \text{粘着与滑动状态} \\ &p_t = 0, \text{自由状态} \\ &p_t = -\chi(du_t^{(2)} - du_t^{(1)}), \text{粘着状态} \\ &p_t = -\lambda\|p_n\|\operatorname{sign}(du_t^{(2)} - du_t^{(1)}), \text{滑动状态} \end{aligned} \tag{6}$$

其中 χ_n 与 χ 是惩罚因子。

作为算法建立, 进一步引入塑性屈服与流动势函数定义

$$\begin{aligned} &f_1 = \|p_t\| + \lambda p_n - Zp_{t0} \le 0 \\ &f_2 = -\|p_t\| + \lambda p_n - Zp_{t0} \le 0 \\ &f_3 = p_n - Zp_{n0} \le 0 \end{aligned} \tag{7}$$

以及

$$g_1 = \|p_t\|;\ g_2 = -\|p_t\|;\ g_3 = p_n \tag{8}$$

其中, Z 是依赖于状态的参数, 当为粘着状态时为 1, 否则为 0。由此可将增量相对位移表示成

$$du_c^p = \frac{\partial g^T}{\partial p}\lambda \tag{9}$$

其中: $g = [g_1, g_2, g_3]^T$, $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^T$。进一步可导得问题的互补本构方程

$$\begin{aligned} &f_k^0 + W_k du_c - M_k\lambda_k + v_k = 0 \\ &\lambda_k v_k = 0,\ \lambda_k, v_k \ge 0,\ k = 1, 2 \end{aligned} \tag{10}$$

其中: v_k 是松弛变量, f_k^0 是屈服函数的初始值, 而 W_k 与 M_k 的定义见文献[22, 23]。

基于弹塑性分析的参变量变分原理[22, 23]问题的变分泛函(虚位移原理)可以表示为

$$\begin{aligned} \Pi_\tau = &\int_V e_{ij}\frac{\partial \dot{W}_i}{\partial x_i}dV - \int_V b_i\dot{W}_i dV - \int_{S_p} f_i\dot{W}_i dS + \\ &\int_{S_c} p_c\dot{W}_{ci}dS - \int_{S_c}\lambda H_{Fi}\dot{W}_{ci}dS \end{aligned} \tag{11}$$

自然 $\dot{W}_{ci}$ 为满足位移边界与协调方程的可能的虚位移场。应当注意的是, 式(11)应受控于接触约束条件(10)。

3 局部 RVE 分析的有限元列式

对于接触面的描述, 采取点面描述方法, 即 3 节点接触单元。将接触面分为主接触面与从接触面两种, 将主接触面上的点按 1 到 m 排列, 对于从接触面上的点 i 来说, 其在主接触面上的对应位置 i^* 的位移可表示为

$$u_{i^*}^{(2)} = \sum_{i=1}^{m} w_i u_i^{(2)} \tag{12}$$

其中, w_i 是权函数(或插值函数)。可行的选择办法是假设 i^* 位于$(j, j+1)$之间, 即

$$\begin{aligned} &w_j \ne 0,\ w_{j+1} \ne 0,\ w_i = 0 \\ &(i = 1, 2, \cdots, j-1, j+2, \cdots, m) \end{aligned} \tag{13}$$

则 $u_{i^*}^{(2)}$ 可通过简单的插值获得。由此可将接触相对位移 du_c 表示为

$$du_c = [TR][I \ -w_1 \ -w_2 \ \cdots \ -w_m]\begin{bmatrix} du^{(1)} \\ du_1^{(2)} \\ du_2^{(2)} \\ \cdots \\ du_m^{(2)} \end{bmatrix} \tag{14}$$

其中: [TR]表示坐标转换矩阵, $du^{(1)}$ 是从节点的增量位移。

作为算法实现, 从节点位移 $du^{(1)}$ 可以由接触相对位移 du_c 表示, 这样就可以在总位移向量中消去从节点位移, 也就是

$$du^{(1)} = [TR^{-1} \ -w_1 \ -w_2 \ \cdots \ -w_m]\begin{bmatrix} du_c \\ du_1^{(2)} \\ du_2^{(2)} \\ \cdots \\ du_m^{(2)} \end{bmatrix} \tag{15}$$

假设 RVE 区域被分为 N_e 个常规单元, N_c 个接触单元, 常规单元的体积与表面由 V_e 与 S_c^e 表示。如果 nc_e 被用于表示接触单元中的接触屈服面数, 则总体 RVE 系统的屈服面数为

$$m_c = \sum_{e=1}^{N_c} nc_e$$

又令 N 表示插值形函数, 则问题的求解离散方程可以归纳为

$$\min \frac{1}{2}du^T K du - du^T(G\lambda + dt) \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad &Cdu - U\lambda - d + v = 0 \\ &v^T\lambda = 0,\quad v, \lambda \ge 0 \end{aligned} \tag{17}$$

其中

$$K = \sum_{e=1}^{N_e} K_e + \sum_{e=1}^{N_c} K_e^c$$

$$K_e = \int_{V_e} B^T D B \, dV$$

$$K_e^c = \int_{S_c^e} N_c^T D_c N_c \, dS$$

$$dt = dt_r - t_0,$$

$$dt_r = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{V_e} N^T db \, dV + \sum_{e=1}^{N_e} \int_{V_e} N^T df \, dV$$

$$t_0 = \sum_{e=1}^{N_c} K_e^c \bar{W}^*$$

$$G = \sum_{e=1}^{N_c} \int_{S_c^e} N_c^T R^T dS$$

$$C = \sum_{e=1}^{N_c} \int_{S_c^e} W N_c \, dS, \quad U = \sum_{e=1}^{N_c} \int_{S_c^e} M \, dS$$

$$d = d_0 + d_W, \; d_0 = -\sum_{e=1}^{N_c} \int_{S_c^e} f_0 \, dS$$

$$d_W = -\sum_{e=1}^{N_c} \int_{S_c^e} W \, dS \bar{W}^*$$

$$W_k = \frac{\partial f_k}{\partial p_c}^T D_c, \quad M_k = \frac{\partial f_k}{\partial p_c}^T D_c \frac{\partial g_k}{\partial p_c}$$

$$R_{kl} = \frac{\partial g_l}{\partial p_{ci}} D_{cik}$$

$$D_{c11} = X, \; D_{c22} = X, \; D_{c12} = D_{c21} = 0$$

式(16)与(17)构成一个数学规划问题，利用 Kuhn-Tucker 条件，可以推导获得

$$v - (U - CK^{-1}G)\lambda = -CK^{-1}dt_r + d_0 - (U - CK^{-1}G)\bar{W}^*$$

$$v^T \lambda = 0, \quad v, \lambda \geq 0 \tag{18}$$

对于接触分析，式(18)中存在惩罚因子，故需考虑惩罚因子的消除问题。假设有限元方程中的位移向量被分为接触相对位移与常规位移两部分，容易验证，只有接触相对位移相关的部分存在惩罚因子。又设 ND 表示总位移矢量的自由度数，Nd_i 表示非接触相对位移自由度数，Nd_0 为接触相对位移自由度数，则有 $ND = Nd_i + Nd_0$。不失一般性，Nd_i 个自由度排在总位移向量之前，Nd_0 相对接触位移排在后面，则经过组装的结构刚度矩阵可以表示为

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} + XK_{22}^* \end{bmatrix} \tag{19}$$

其中，X为惩罚因子。注意到接触单元只与接触相对位移有关，因而在总刚度阵中只有贡献 XK_{22}^*。相应地，矩阵 C, G, U 进一步依次表示为

$$C = [0 \quad XC^*], \; G = \begin{bmatrix} 0 \\ XG^* \end{bmatrix}, \; U = [XU^*]$$

$$dt_r = \begin{bmatrix} dt_{ri} \\ dt_{ro} \end{bmatrix}, \quad dt_0 = \begin{bmatrix} dt_{0i} \\ dt_{0o} \end{bmatrix} \tag{20}$$

为消除由于惩罚因子存在造成的矩阵病态，首先进行矩阵 K 当 $X = +\infty$ 时的求逆演算

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{bmatrix} \tag{21}$$

其中

$$V_1 = K_{11}^{-1} + \frac{1}{X} K_{11}^{-1} K_{12} K_{22}^{*-1} K_{21} K_{11}^{-1} + O\left(\frac{1}{X^2}\right) \tag{22}$$

$$V_2 = -\frac{1}{X} K_{11}^{-1} K_{12} K_{22}^{*-1} + O\left(\frac{1}{X^2}\right), \; V_3 = V_2^T \tag{23}$$

$$V_4 = \frac{1}{X} K_{22}^{*-1} - \frac{1}{X^2} K_{22}^{*-1} \cdot (K_{22} K_{22}^{*-1} - K_{21} K_{11}^{-1} K_{12}) K_{22}^{*-1} + O\left(\frac{1}{X^3}\right) \tag{24}$$

由于采用的是相对位移，因而刚度矩阵 K_{22}^* 为单位矩阵。可以证明，对接触分析下式成立[23]

$$U^* = C^* K_{22}^{*-1} G^* \tag{25}$$

将式(20)、(21)代入(18)，经过演算推导，可以将 X从表达式中消除，由此获得

$$v - (C^* K_r G^*)\lambda = -C^* df_r + d_0 - C^* K_r \bar{W}^*$$

$$v^T \lambda = 0, \quad v, \lambda \geq 0 \tag{26}$$

其中

$$K_r = K_{22} - K_{21} K_{11}^{-1} K_{12}$$

$$df_r = dt_{ro} - K_{21} K_{11}^{-1} dt_{ri} \tag{27}$$

显然，表达式(27)与子结构分析中的表达式是完全一致的，因而对 RVE 分析的算法采用子结构分析程序 JIFEX 进行实现。

4 结　论

本文中回顾了具有周期性构造的弹性接触颗粒材料力学的微观(小尺度)与宏观两级均匀化方法的研究现状。研究工作集中在局部 RVE 的非线性分析方法方面，目的是为进一步的宏观均匀化研究打下基础。

由于考虑界面的粘着特性，本文作者依据参变量变分原理建立了问题分析的有限元参数二次规划算法，引入点面接触单元使方法对不同问题具有较好的适应性，通过特定的技术对所引入的惩罚因子进行了消除，使求解算法具有较好的数值稳定性与计算精度。

致　谢: 对 Schrefler 教授在本文工作中的有益帮助表示谢意。

参考文献:

[1] Dvorak G J, Bahei Y A, Wafa A M. Implementation of the transformation field analysis for inelastic composite materials[J]. Computational Mechanics, 1994, 14: 201- 228.

[2] Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials [J]. J Mech Phys Solids, 1965, 13: 213- 222.

[3] Hill R. The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals[J]. J Mech Phys Solids, 1967, 15: 79- 95.

[4] Mandel J. Equations de comportement d'un systeme astoviscoplastique dont l'crouissage est du à des contraintes residuelles [M]. Paris: Acad Sci Press, 1977. 257- 260.

[5] Rice J R. Constitutive equations in plasticity[M]. Cambridge: The MIT Press, 1975. 23- 79.

[6] Stolz C. In: Gittus J, Zarka J, eds. Modelling Small Deformation of Polycrystals, General relationships between micro and macro scales for the non- linear behavior of heterogeneous media [C]. London: Elsevier, 1986. 89- 115.

[7] Suquet P M. In: Sanche-Palencia E, Zaoui A, eds. Homogenization Techniques for Composite Media, Elements of homogenization of inelastic solid mechanics [C]. Paris: Springer-Verlag, 1987. 194- 275.

[8] Body J G, Costanzo F, Allen D H. A micromechanics approach for constructing locally averaged damage dependent constitutive equations in inelastic composites[J]. Int J Damage Mech, 1993, 2: 209- 228.

[9] Allen D H, Jones R H, Boyd J G. Micromechanical analysis of continuous fiber metal matrix composite including the effects of matrix viscoplasticity and evolving damage[J]. J Mech Phys Solids, 1994, 42: 505- 529.

[10] Ghosh S, Moorthy S. Elasto-plastic analysis of arbitrary heterogeneous materials with the Voronoi-Cell Finite Element Method [J]. Comp Meth Appl Mech Engng, 1995, 121: 373- 409.

[11] Costanzo F, Body J G, Allen D H, Micromechanics and homogenization of inelastic composite materials with growing cracks [J]. J Mech Phys Solids, 1996, 44: 333- 370.

[12] Reiter T, Dvorak G J. Micromechanical models for graded composite materials [J]. J Mech Phys Solids, 1997, 45: 1281- 1302.

[13] Schrefler A B, Galvanetto U, Pellegrino C. Ohmenhaeuser F. Macroscopic effective yield surfaces taking into account microscopic behaviour [A]. Palmer C. Proc. of IUTAM/IACM Symposium on Discretisation Methods in Structural Mechanics II [C]. Vienna: Cambridge Press, 1997. 213- 218.

[14] Serano A A, Rodriguez-Ortiz J M. A contribution to the mechanics of heterogeneous granular media[A]. Palmer A C. Proc. Symposium on the Role of Plasticity in Soil Mechanics [C]. Cambridge: Cambridge Press, 1973. 215- 228.

[15] Rodriguez-Ortiz J M. Estudio del comportamiento de medios granulares heterogeneous mediante modelos discontinuous analogicosy matematicos[D]. Madrid: Universidad Politecnica de Madrid, 1974.

[16] Cundall P A, Strack O D L. A discrete numerical model for granular assemblies [J]. Geotechnique, 1979, 29: 47- 65.

[17] Thorton C, Randall C W. In: Satake M, Jenkins T J, eds. Micromechanics of Granular Materials, Applications of Theoretical Contact Mechanics to Solid Particle System Simulation[C]. Amsterdam: Elsevier, 1988. 133- 142.

[18] Walton O R, Braun R L. Stress calculation for assemblies of inelastic spheres in uniform shear[J]. Acta Mechanica, 1986, 63: 73- 86.

[19] Ng T T. A non-linear numerical model for soil mechanics [J]. Int J Numer Anal Methods Geomech, 1992, 16: 247- 263.

[20] Chang C S, Chang Y, Kabir M G. Micromechanical modelling for stress- strain behaviour of granular soils, part I: Theory [J]. ASCE J Geotech Engng, 1992, 118: 1959- 1974.

[21] Wren J R, Borja R I. Micromechanics of granular media, part I: Generation of overall constitutive equation for assemblies of circular disks [J]. Comp Methods Appl Mech Engng, 1995, 127: 13- 36.

[22] 钟万勰, 张洪武, 吴成伟. 参变量变分原理及其在工程中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1997.

[23] Zhang H W, Zhong W X, Gu Y X. A combined parametric quadratic programming and iteration method for 3D elastic-plastic frictional contact problem analysis [J]. Comput Meths Appl Mech, 1998, 155: 307- 324.

[24] 张洪武. 弹性接触颗粒状周期性结构材料力学分析的均匀化方法(Ⅱ)——宏观均匀化分析 [J]. 复合材料学报, 2001, 18(4): 98- 102.