复 合 材 料 学 报 第 18 卷 第 1 期 2 月 2000 年
ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA Vol. 18 No. 1 February 2001

文章编号: 1000-3851(2001)01-0097-04

粘弹性复合材料力学性能的细观研究

梁 军, 杜善义
(哈尔滨工业大学 复合材料研究所, 哈尔滨 150001)

摘 要: 利用细观力学的 Eshelby 等效夹杂方法研究了复合材料的粘弹性问题。通过时间域内的 Laplace 变换及对应性原理, 将问题线性化, 预报了颗粒增强复合材料的蠕变本构关系, 给出了材料模量随时间、夹杂体积分数的变化规律, 并与实验结果对照, 吻合较好。

关键词: 细观力学; 粘弹性能; 蠕变本构关系
中图分类号: TB330.1 **文献标识码:** A

STUDY OF MECHANICAL PROPERTIES OF VISCOELASTIC MATRIX COMPOSITE BY MICROMECHANICS

LIANG Jun, DU Shan-yi
(Center for Composite of Harbin Institute of Technology. Harbin 150001, China)

Abstract: The Eshelby equivalent inclusion method is used to study the viscoelastic problem of polymeric composite materials. The creep constitutive relations of particulate reinforced composites are investigated by Laplace transformation and the corresponding principle. The variation of the moduli of materials with time and inclusion volume fraction is given, and the theoretical prediction coincides with experimental results.

Key words: micromechanics; viscoelastic properties; creep constitutive relation

大多数聚合物材料具有粘弹性性能, 因此聚合物基复合材料也具有粘弹性性能。对于均匀非晶态聚合物来说, 其粘弹性主要取决于分子松弛过程; 而对于聚合物基复合材料, 其粘弹性不仅受到各组份材料分子松弛过程的影响, 还受到组份比例、微观结构形态和组份间相互作用等因素的影响, 使复合材料及其结构的粘弹性力学行为变得十分复杂[1]。随着复合材料研究的深入, 上述问题受到越来越多学者的关注。

蠕变和应力松弛是人们熟知的反映材料静态粘弹性的力学现象, 它们也同样出现于复合材料结构中。很多复合材料在室温下就可观测到明显的粘弹性变形。通常纤维增强塑料的蠕变极限只有其静强度的 40% 左右。当环境温度升高或由于载荷作用下的内耗引起自身温度升高时, 复合材料结构的粘弹性变形就变得非常严重。除了承受静载外, 很多复合材料结构的设计包含了抗冲击、抗疲劳、减振、耐磨和降噪等功能, 这些功能都和结构的静、动态粘弹性特征有直接或间接的关系。由于上述原因, 对复合材料结构的粘弹性力学研究近来更受重视。

关于聚合物材料静、动态粘弹性的研究报道已相当多[2~4]。由于本构关系的复杂性, 对于聚合物基复合材料静、动态粘弹性的研究文献却较少。文献[5]利用 Eshelby 等效夹杂理论研究了短纤维增强的非线性基体一维松弛本构方程, 非线性基的松弛函数通过一个弹簧和一个 Mexwell 体的并联形式得到。文献[6]针对单向纤维增强聚合物基复合材料, 利用细观力学理论和对应性原理分别研究了圆柱和条型纤维情况下复合材料五个独立的弹性常数随时间衰减规律, 并给出了动态粘弹性性能与载荷频率的变化关系。本文作者利用细观力学方法研究了颗粒增强聚合物基复合材料的粘弹性本构关系及复合材料力学性能与时间、夹杂体积分数、载荷之间的变化规律, 为更好地设计优化复合材料结构提供了理

收稿日期: 1999-07-23; 收修改稿日期: 1999-10-29
基金项目: 国家自然科学基金重点项目(19932030)
作者介绍: 梁 军(1969), 男, 副教授, 研究方向主要有: 三维编织复合材料力学性能表征及结构强度的细观研究、压电材料机电耦合场分析、梯度功能铁电材料电致失效机理研究等。

论基础。

1　颗粒增强复合材料的有效模量预报

设给定的复合材料在其边界上受到远场均匀的应力 e^A 作用，复合材料基体中的平均应力为

$$e^M = e^A + e = L^M(e^A + e) \tag{1}$$

其中：$e^A = L^M e^A$，L^M 是基体材料的弹性常数，e 是夹杂相间相互作用产生的扰动应变。

同样，球型颗粒夹杂内的平均应力为 e^F

$$e^F = e^A + e + e' = L^F(e^A + e + e') = L^M(e^A + e + e' - e^*) \tag{2}$$

其中：L^F 为夹杂相的弹性常数张量，e^* 为球型夹杂的等效本征应变，e' 与 e' 为由于单个夹杂的存在引起的扰动应力与应变。沿用 Eshelby 等效夹杂理论的推导有

$$e' = Se^* \tag{3}$$

式中，S 是四阶 Eshelby 张量，它与基体弹性性质及夹杂的形状有关[7]，具体形式见附录。由式(1)～式(3)求得

$$e' = L^M(S - I)e^* \tag{4}$$

已知复合材料的体平均应力等于远场作用的均匀应力 e^A，即

$$e^A = (1 - f)e^M + fe^F \tag{5}$$

其中，f 是增强相的体积分数。利用式(1)和式(2)的关系有

$$e = -fe' \tag{6}$$

$$e = -f(S - I)e^* \tag{7}$$

将式(3)与式(7)分别代入式(2)中，可以解得

$$e^* = Ae^A \tag{8}$$

其中

$$A = \{L^M + (L^F - L^M)[fI + (1 - f)S]\}^{-1}(L^M - L^F)$$

设增强颗粒与粘弹性基体均是各向同性材料，它们的弹性常数可表示为

$$\begin{aligned} L^F_{ijkl} &= \lambda_1 W_{ij}W_{kl} + 2\mu_1 W_{ij}W_{kl} \\ L^M_{ijkl} &= \lambda_0 W_{ij}W_{kl} + 2\mu_0 W_{ij}W_{kl} \end{aligned} \tag{9}$$

式中：λ_0，μ_0 及 λ_1，μ_1 分别是基体与夹杂材料的拉梅常数和剪切模量，则矩阵 A 中的各个分量可写为

$$a_1 = \frac{d_1 b_2 + d_1 b_1 - 2b_2}{b_1^2 + b_2 b_1 - 2b_2^2} \qquad i = j \in 1, 2, 3$$

$$a_2 = \frac{b_1 - d_1 b_2}{b_1^2 + b_2 b_1 - 2b_2^2} \qquad i \neq j \in 1, 2, 3 \tag{10}$$

$$a_3 = d_2 / b_3 \qquad i = j \in 4, 5, 6$$

其余 a_{ij} 分量为零，式中与组分材料性能有关的参量 b_i，d_i 具体形式见附录。根据求得的夹杂等效本征应变，下一步就可以预报颗粒增强复合材料的弹性模量。

(1) 杨氏模量　$E_{11} = E_{22} = E_{33}$

沿 x 轴方向作用均匀拉伸应力 e^A_{11}，利用虎克定律可以导出如下关系，$e^A_{11} = E_{11}e_{11}$，其中 $e_{11} = e^A_{11} + fe^*_{11}$，而对于纯基体材料则存在下列式子：$e^A_{11} = E_0 e^A_{11}$，$e^A_{22} = e^A_{33} = -\nu_0 e^A_{11}$。比较两式关系，利用式(8)得到

$$\frac{E_{11}}{E_0} = \frac{e^A_{11}}{e^A_{11} + fe^*_{11}} = \frac{1}{1 + f(a_1 - 2\nu_0 a_2)} \tag{11}$$

(2) 剪切模量　$\mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{23}$

在垂直 x 轴方向的平面内作用纯剪切应力 e^A_{12}，利用虎克定律得到复合材料和纯基体材料中分别存在下列本构关系：$e^A_{12} = 2\mu_{12}e_{12}$，其中 $e_{12} = e^A_{12} + fe^*_{12}$，和 $e^A_{12} = 2\mu_0 e^A_{12}$，比较两式关系，利用式(8)得

$$\frac{\mu_{12}}{\mu_0} = \frac{e^A_{12}}{e^A_{12} + fe^*_{12}} = \frac{1}{1 + fa_3} \tag{12}$$

(3) 泊松比　$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23}$

沿 x 轴方向作用均匀拉伸应力 e^A_{11}，颗粒增强复合材料内部存在 $e_{22} = -\nu_{12}e_{11}$ 的关系，其中 $e_{11} = e^A_{11} + fe^*_{11}$，$e_{22} = e^A_{22} + fe^*_{22}$。利用式(8)得

$$\nu_{12} = -\frac{e^A_{22} + fe^*_{22}}{e^A_{11} + fe^*_{11}} = \frac{\nu_0 - f[a_2 - \nu_0(a_1 + a_2)]}{1 + f(a_1 - 2\nu_0 a_2)} \tag{13}$$

式(11)～(13)对于各向同性材料存在两个独立的弹性常数，根据对应性原理，在 Laplace 变换域内材料粘弹性与弹性性质一一对应，就可以通过弹性问题的细观力学方法求出相应在粘弹性复合材料的力学性能。

2　基体粘弹性和复合材料的粘弹性

基体的粘弹性对聚合物基复合材料的粘弹性起主导作用，很多研究者从基体的粘弹性根据典型单元模型的细观结构导出了聚合物基复合材料的粘弹性应力-应变关系。对于 Glass/ED-6 树脂基复合材料，它的蠕变特性代表着一大类聚合物基复合材料的粘弹性能，我们利用 Maxwell 和 Voigt 组合的四参量流变模型来模拟基体性能，如图 1 所示。

基体的杨氏模量在 Laplace 变换域内可表示为[6]

$$E_0^{TD} = \frac{E_0^M Z_0^M (E_0^\nu + Z_0^\nu s)s}{E_0^M E_0^\nu + [Z_0^M E_0^M (Z_0^M + Z_0^\nu)]s + Z_0^M Z_0^\nu s^2} \tag{14}$$

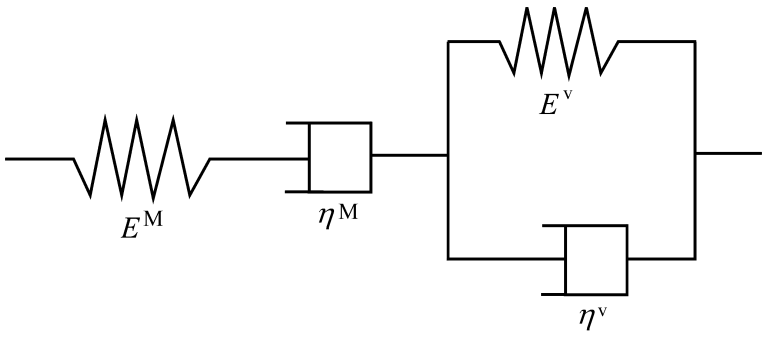

图 1　四参量流变模型示意图

Fig. 1　Four-parameter theoretical model

式中: E_0^M, E_0^v 是基体材料的弹性系数, Z_0^M, Z_0^v 是基体材料的粘性系数, s 表示变换参量, 函数 f(t) 的拉氏变换定义为

$$f^{TD}(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \qquad (15)$$

关于 Laplace 变换及其反演的性质这里不再多述。

所选取的组分材料是各向同性, 根据对应性原理, 在 Laplace 变换域内由弹性力学得到杨氏模量 E, 泊松比 V, 体积模量 K 和拉梅常数 ^ 之间的变换关系为

$$E_r^{TD} = \frac{9K_r^{TD}_{}_r^{TD}}{3K_r^{TD} + _{}_r^{TD}}$$

$$V_r^{TD} = \frac{3K_r^{TD} - 2_{}_r^{TD}}{2(3K_r^{TD} + _{}_r^{TD})}$$

$$V_r^{TD} = K_r^{TD} - \frac{2}{3}_{}_r^{TD} \qquad (16)$$

式中: 上标 TD 表示 Laplace 变换, 下标 r 代表第 r 相组分材料。r= 0 为基体, r= 1 为夹杂。

对于粘弹性复合材料, 式(11)～(13) 中各个参变量均是时间 t 的函数, 利用式(16) 的关系, 得到复合材料粘弹性常数的变换形式

$$\frac{E^{TD}}{E_0^{TD}} = \frac{1}{1 + f(a_1^{TD} - 2V_0^{TD}a_2^{TD})}$$

$$\frac{_^{TD}}{__0^{TD}} = \frac{1}{1 + f a_3^{TD}}$$

$$V^{TD} = \frac{V_0^{TD} - f[a_2^{TD} - V_0^{TD}(a_1^{TD} + a_2^{TD})]}{1 + f(a_1^{TD} - 2V_0^{TD}a_2^{TD})} \qquad (17)$$

对(17) 式求 Laplace 逆变换可以得到复合材料的粘弹性性能。但是, 这些复杂的公式求逆并不容易, 不妨令 V_r 与时间因素无关而求其近似, 即 $V_r^{TD} = V_r$, 则可将问题大大简化。

沿 x 轴方向作用均布载荷 e_{11}^A, 则复合材料的本构关系在 Laplace 变换域内可表示为

$$e_{22}(s) = \frac{1}{E_{11}^{TD}}\frac{1}{s} \cdot e_{11}^A \qquad (18)$$

最终通过式(17)、式(18) 求得聚合物基复合材料的蠕变规律。

3　数值结果与算例

对于 Glass/ED-6 复合材料, 增强相在室温(20℃) 时具有弹性性质, 其材料常数为

$K_1^{TD} = K_1 = 39.43$ GPa

$__1^{TD} = __1 = 28.35$ GPa

ED-6 基体在室温下具有粘弹性蠕变特性, 它的材料常数为

$E_0^M = 3.2$ GPa $= E_0$, $Z_0^M = 8000$ GPa ·h;

$E_0^v = 1.8$ GPa, $Z_0^v = 300$ GPa ·h, $V_0 = 0.38$

图 2 给出了不同单轴应力载荷 e_{11}^A 作用下, 材料应变与时间函数之间的蠕变曲线。图中圆点代表实验测试的数据, 而实线则是本文理论的计算值, 二者符合较好。计算中夹杂的体积分数 f = 0.54。图示表明复合材料的蠕变过程分为三个阶段, 初始阶段是弹性变形, 非常短暂; 接着发生不稳定蠕变, 最终达到稳定的蠕变状态。

图 3、图 4 分别给出了杨氏模量和剪切模量随时间函数的变化规律。如图所示材料模量在不稳定蠕变阶段随时间衰减很快, 这时基体的粘弹性能占主导地位, 而在稳定蠕变阶段复合材料的粘弹性性能变化不大, 这时夹杂相的增强作用较为明显。

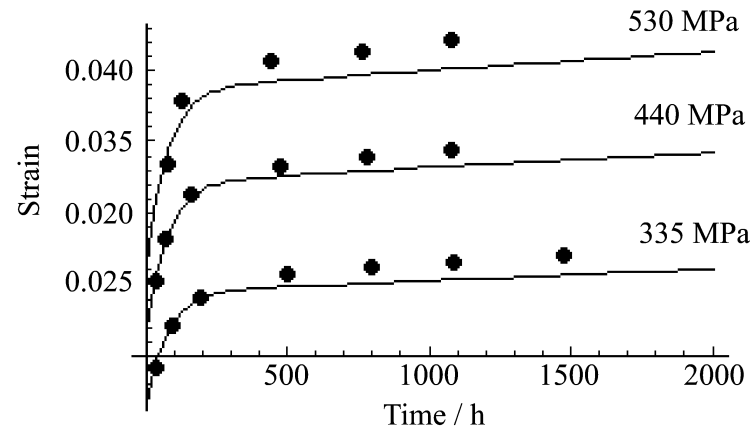

图 2　复合材料蠕变曲线的理论与实验比较

Fig. 2　Comparison between the theoretical predictions and the experimental data for the creep curves! of the composite

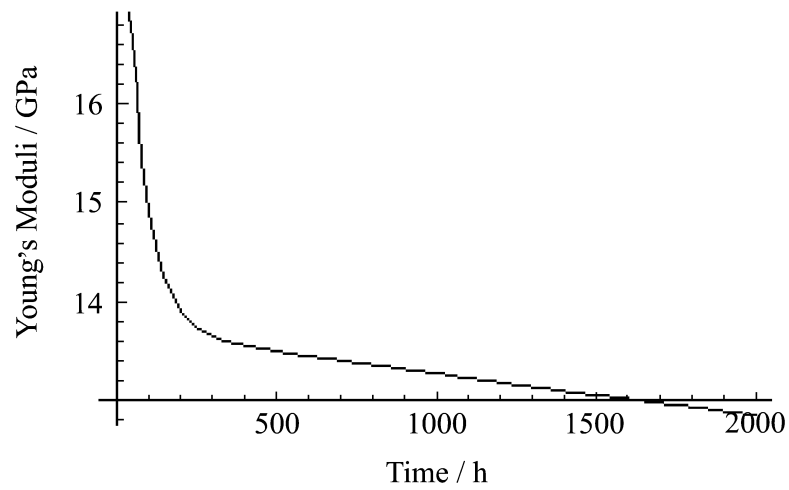

图 3　杨氏模量随时间函数的变化规律

Fig. 3　The relation between Young's modulus and time

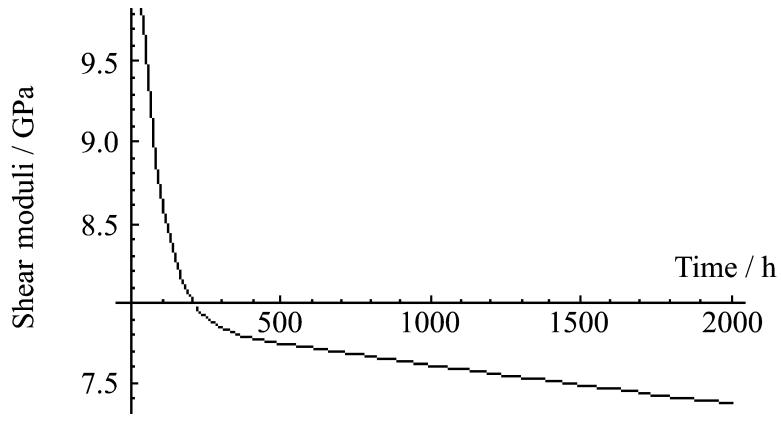

图 4　剪切模量随时间函数的变化规律

Fig. 4　The relation between shear modulus and time

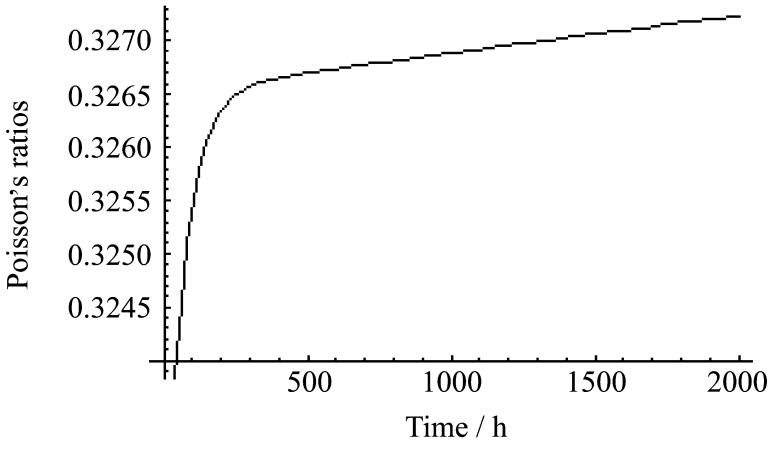

图 5　泊松比随时间函数的变化规律

Fig. 5　The relation between Poisson's ratios and time

图 5 给出了材料泊松比随时间函数的变化规律。复合材料泊松比与弹性模量不同，为保持材料变形协调性，在不稳定蠕变阶段随时间增加很快，并且逐渐接近基体的粘弹性能。

参考文献:

[1] 张　恒，王震鸣，李　江. 复合材料及其结构的粘弹性力学[A]. 见：王震鸣，等主编. 复合材料及其结构的力学进展：第三册[C]，武汉：武汉工业大学出版社，1992. 45- 60.

[2] Findley W N, Lai J S, Onaran K. Creep and relaxation of non-linear viscoelastic materials[M]. North-Holland, New York: 1976.

[3] Christensen R M. Theory of viscoelasticity: An Introduction, 2nd edn[M]. New York: Academic Press, 1982.

[4] Skudra A M, Auzukains Y V. Creep and long-term strength of unidirectional reinforced plastics in compression[J]. Polymer Mech, 1983, 6: 718- 722.

[5] 蔡四维. 短纤维复合材料理论与应用[M]. 北京：人民交通出版社，1994.

[6] Li J, Weng G J. Effective creep behavior and complex moduli of fiber-and ribbon-reinforced polymer-matrix composites [J]. Composite Science and Technology, 1994, 52: 615- 629.

[7] Mura T. Micromechanics of defects in solids[M]. Netherlands: Martinus Nijhoff, 1987.

附　录

球形颗粒夹杂($a_1 = a_2 = a_3$)的四阶 Eshelby 张量形式为[7]

$$S_{1111} = S_{2222} = S_{3333} = \frac{7 - 5V_0}{15(1 - V_0)}$$

$$S_{1122} = S_{2233} = S_{1133} = S_{2211} = S_{3322} = \frac{5V_0 - 1}{15(1 - V_0)}$$

$$S_{1212} = S_{2323} = S_{3131} = \frac{4 - 5V_0}{15(1 - V_0)} \tag{1}$$

其余分量为零。与组分材料性能相关的参量 b_i, d_i 形式如下:

$$b_1 = (1 - f)[(\wedge_0 + 2__0)(1 - S_{1111}) + 2(\wedge_1 - \wedge_0)S_{1122}] + (\wedge_1 + 2__1)[f + (1 - f)S_{1111}]$$

$$b_2 = \wedge_0 + f(\wedge_1 - \wedge_0) + (1 - f)\{S_{1122}[(\wedge_1 + 2__1) - (\wedge_0 + 2__0)] + (\wedge_1 - \wedge_0)(S_{1111} + S_{1122})\}$$

$$b_3 = __0 + f(__1 - __0) + (1 - f)(__1 - __0)S_{1212}$$

$$d_1 = (\wedge_1 + 2__1) - (\wedge_0 + 2__0)$$

$$d_2 = __1 - __0 \tag{2}$$