复 合 材 料 学 报　　第 18 卷　第 4 期　11 月　2001 年
ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA　　Vol. 18　No. 4　November　2001

文章编号: 1000-3851(2001) 04-0011-06

复合材料三维四向矩形编织物角柱结构研究

黄小平[1], 孙良新[1], 徐孝诚[2]
(1. 南京航空航天大学 飞行器系, 南京 210016; 2. 北京特殊机电设备研究所, 北京 100076)

摘　要: 针对有限元计算对几何数据的需要,详细研究了由四步 1∶1 法编织的复合材料三维四向矩形编织物的角柱结构,为其建立了准确的几何模型。以矢量方法导出纺纱(纤维束)角柱段轴线、以及角柱段与内部段、角柱段与角柱段的接触线等的数学表达式。据此得到角柱结构几何参数值,它们可用于该材料的图形显示和力学分析。

关键词: 复合材料; 三维编织; 角柱结构; 几何模型
中图分类号: TB332　　文献标识码: A

CORNER MICROSTRUCTURE OF 3-D RECTANGULAR BRAIDED PREFORMS FOR COMPOSITES

HUANG Xiao-ping[1], SUN Liang-xin[1], XU Xiao-cheng[2]
(1. Aircraft Department, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China;
2. Beijing Institute of Special Mechanical & Electrical Devices, Beijing 100076, China)

Abstract: To meet the need for geometric data in finite element investigation, a study on the corner microstructure of three-dimensional(3-D) 4-directional rectangular composite preforms braided by 4-step 1∶1 procedure is made, and a accurate geometry model of the structure is developed. The vector method is used to deduce some mathematic expressions of, the axis of yarn(fiber bundle) at fabric corner, the contact curves at which a yarn at fabric corner touches with one at fabric interior & one at fabric corner, and etc. These formulas supply the geometric parameters of corner microstructure, which are useful to graphic emulation and mechanical analysis of this material.

Key words: composite; 3-D braiding; corner structure; geometry model

三维编织复合材料具有众所周知的优点和重要用途。其织物(预制件)的编织构造是导致这些优点的主要原因,因而国内外已有许多文献探讨此类材料的细观几何结构与性能之间的关系。

几何结构模型是力学模型的基础。纺织结构复合材料的单胞图形、刚度或强度性能研究、有限元计算等都有赖于对材料细观几何结构的了解。复合材料三维四向矩形织物的结构由内部结构、表面结构和角柱结构组成[1, 2]。纺纱在织物内部取直线路径,情况较简单,国内外学者对此研究得较多。纺纱在织物表面和角柱处是曲线,难以精确分析,未见有资料做详细探讨,力学分析时均将其视为直线。这种粗略处理不适用于应力分析和强度性能研究。总的来说,对该材料细观结构的研究还不充分,不能为挤塞状态特别是非挤塞状态下材料的力学分析提供全部准确且充分的几何数据。在缺少几何模型充分支持的情况下,力学分析向深入细致发展就面临很大困难。几何数据准确,力学分析结果才可能准确,否则会导致结果的较大误差。力学研究越深入细致(例如损伤、强度和有限元分析),几何数据需要得越多。四向矩形编织复合材料的损伤和破坏常先出现在其表面和角柱之处。因此弄清楚它的表面和角柱的细观构造,为力学分析提供几何基础,是迫切紧要的任务,具有重要意义。

本文中详细探讨四步 1∶1 法编织的复合材料四向矩形织物的角柱结构。为其建立准确的几何模型并导出相应公式,获得有限元计算所需几何参数值,填补了角柱结构研究的一些空白,对该材料单胞

收稿日期: 2000-08-10; 收修改稿日期: 2000-11-06
基金项目: 国家教委博士点基金资助项目(98028709)
作者介绍: 黄小平(1955), 男, 在读博士, 副教授, 研究方向为编织复合材料力学性能分析和预估。

图形的准确建立及应力分析、损伤和强度性能研究等具有基础意义。

1　说　明

1.1　纺纱路径的性质

根据对预制件实物的观察可知:

(1) 纺纱的轴线(中心线)在织物的各个地方处处光滑。纺纱路径建模的最低要求是保持该光滑性。

(2) 纺纱在织物内部始终取直线路径(本文中称其为纺纱的内部段,简称内部段)。纺纱在织物角柱处含有曲线路径(本文中称其为纺纱的角柱段,简称角柱段)。从织物内部到达角柱、又返回内部时,纺纱由直变弯和由弯变直的两处即是角柱段的两端,这两处是角柱段和内部段的分界。

(3) 编织过程中纺纱始终在一定的拉紧力作用下被编织和打紧,纺纱在织物中总是取最短路径。可据此来确定纺纱轨迹。

1.2　研究内容和方法

角柱结构研究的主要内容是了解角柱及附近处的纺纱如何相互交织,并确定:(1)角柱段轴线的路径;(2)角柱段与内部段之间、与其它角柱段之间的接触线路径;(3)这些段的圆柱面接触处的公法线方向(若不计两纱之间摩擦,该方向是两纱之间相互作用力方向)。

纺纱在织物中取最短路径且纺纱间存在点或线的接触约束,故其路径的确定属于有附加条件的泛函极值问题(求路径最短的变分问题)。简单情况下,最短路径可直接判断出来。本文中对角柱处的这种最短路径加以研究,用矢量来描述,由矢量运算导出其数学表达式。因变分问题的求解相当复杂困难,故对角柱处的需要通过变分方法才能精确求出的最短路径,则用函数插值方法来足够精确地近似确定。

织物角柱构造如图 1 所示,其中 h 是织物在一个编织四步中沿其纵向所延伸的距离即一个花节的高度。可见沿织物纵向,相同的细观构造以 h 为周期重复出现。整体看,一条角柱段轴线(例如图 1 中的 do′D)由对称的两段(例如 do′和 o′D)组成,故本文中只研究其中一段(例如 o′D)。角柱段 o′D 由顺序光滑连接的 o′A、AB、BC 和 CD 段组成(分四段的理由见稍后分析),段 o′D 的两端分别与段 ao′和内部段 DE(图 5)光滑连接。下面对角柱段 o′D 作逐段研究。

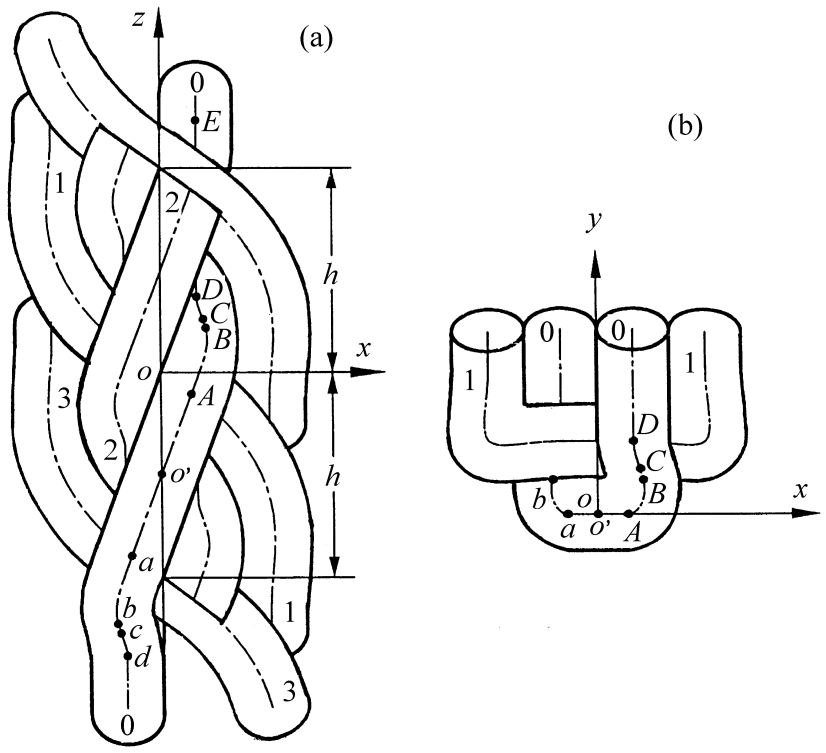

图 1　角柱细观结构

Fig. 1　Corner microstructure

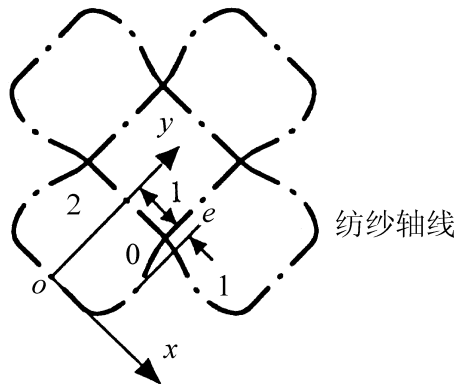

图 2　坐标系方位

Fig. 2　Position of coordinate system

1.3　约定、假设及坐标系

研究中发现,织物所有的几何长度均与纺纱半径成正比。为简单起见,取纺纱半径取为 1,各长度值为它们的实际值与纺纱实际半径的比值,进行长度的标准化。用本文的长度值乘以纺纱实际半径得长度的实际值。

设纺纱充分柔软易弯曲。设在织物各处,纺纱横截面为圆形,半径为常数,且织物处于挤塞状态,则其内部编织角 T= 54.7°[3], sinT= $\sqrt{2/3}$, cosT= $1/\sqrt{3}$, tgT= $\sqrt{2}$;注意到纺纱半径为 1 的约定,则 h= $4\sqrt{2}$[3]。

建立右手直角坐标系 oxyz(图 1 和图 2。图 2 是沿织物纵向视图)。z 轴平行于织物纵向,朝上为正;x 轴和 y 轴沿织物横向,且与织物表面成 45°,分别以指向织物外部和内部为正向;为使轴线 AB 段表达式简单,原点 o 取在图 1 和图 2 所示位置。

2 角柱结构几何模型的建立

2.1 角柱段轴线 V′

纺纱 0-0 的 ao′A 段的两端分别搭在纺纱 1-1、3-3 内部段直圆柱面上，中间为悬空(图 1 和图 3)。因纺纱充分柔软且取最短路径，故轴线 ao′A 应为直线。设轴线 o′A 与 z 轴的夹角(编织角)为 V，则由直角三角形 oO_2F_2(图 3)有 $\sin V = 1/(2\sqrt{2})$，于是 $\cos V = \sqrt{7}/(2\sqrt{2})$，$\mathrm{tg}V = 1/\sqrt{7}$，$V = 20.7^\circ$。在轴线 o′A 上

$$y = 0$$
$$z = x/\mathrm{tg}V - 2\sqrt{2} = \sqrt{7}x - 2\sqrt{2} \quad (1)$$

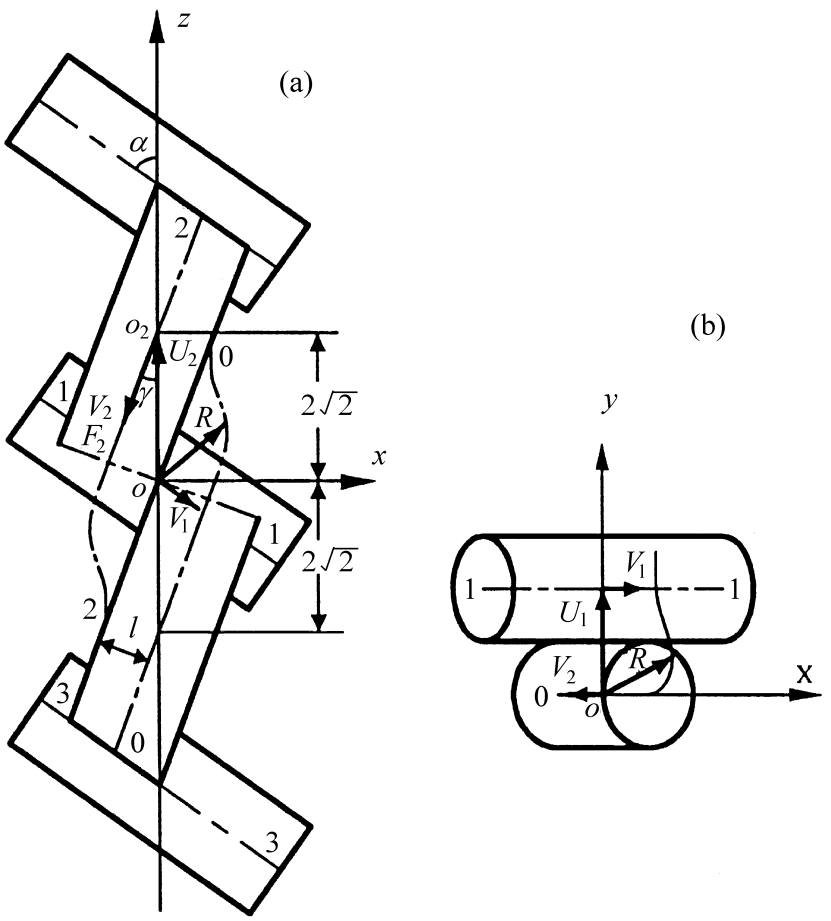

图 3 最外边的角柱段

Fig. 3 The most exterior segments of yarns at the corner

2.2 角柱段轴线 . /

据实物观察，和 AB 段接触的纺纱 1-1 的一段是直圆柱，即属内部段。为表达清楚，将图 3 的三个内部段直圆柱画得比实际长度稍长。

纺纱 0-0 的 AB 段既在纺纱 1-1 的内部段直圆柱面上相接触地绕过(为线接触)，又在纺纱 2-2 的角柱段直圆柱面上相接触地绕过(也为线接触)，故轴线 AB 是较复杂曲线(图 1 和图 3)。它上面的动点和该动点在纺纱 1-1、2-2 直轴线上的垂足(亦为动点)之间都始终保持 2 倍纺纱半径的距离，由此可建立轴线 AB 的数学表达式。

为表达简洁、推导容易和获得较多几何量，用矢量来描述三维空间中的点和方向，推导方程。

见图 3 和图 4，记 ? 为轴线 AB 上的动点的矢径，$?_1$ 和 $?_2$ 为该动点分别在纺纱 1-1 和 2-2 直轴线上的垂足(投影点)的矢径，$@_1$、$@_2$ 为这两动点垂足到上述动点的矢量，A_1 和 A_2 为 AB 段曲圆柱分别与纺纱 1 的内部段直圆柱和纺纱 2 的角柱段直圆柱之间的接触线上的动点(与上述动点对应)的矢径，?、$?_1$、$?_2$、A_1、A_2 均是从原点 o 出发的矢量。则 $? = ?_1 + @_1 = ?_2 + @_2$，其中：$?_1 = B_1 + C_1$，$?_2 = B_2 + C_2$，$B_1$、$C_1$、$B_2$、$C_2$ 如图 3 所示。由上面的定义知 $@_1 \perp C_1$，$@_2 \perp C_2$。

以上各矢量之间关系可用三维空间中的矢量多边形来表示。考虑到在角柱结构图中再绘制许多矢量将使图中线条过多而不清楚，故图 3 只示出 ?、B_1、C_1、B_2、C_2。而将矢量多边形单独画在图 4 中，以帮助理解各矢量相互关系。

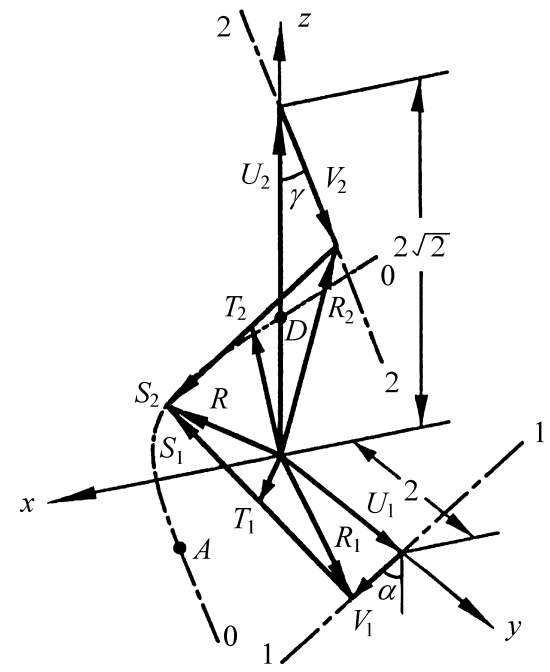

图 4 矢量多边形

Fig. 4 Vector polygon

记 $@_1^0$、$@_2^0$、C_1^0、C_2^0 分别是 $@_1$、$@_2$、C_1、C_2 方向上的单位矢，S_1、S_2、V_1、V_2 分别是 $@_1$、$@_2$、C_1、C_2 的模，则 $@_1 = S_1@_1^0$、$@_2 = S_2@_2^0$、$C_1 = V_1C_1^0$、$C_2 = V_2C_2^0$。由纺纱半径为 1 的约定有 $S_1 = S_2 = 2$，$@_1^0$、$@_2^0$ 表示 AB 段分别和纺纱 1-1 的内部段、2-2 的角柱段在它们圆柱面接触处的公法线方向。若不计纺纱之间摩擦，$@_1^0$、$@_2^0$ 也表示纺纱之间相互作用力方向。易知

$$@_1^0 = (? - ?_1)/2; \quad @_2^0 = (? - ?_2)/2$$
$$A_1 = (? + ?_1)/2; \quad A_2 = (? + ?_2)/2 \quad (a)$$

在 oxyz 系中，$B_1 = (0\ \ 2\ \ 0)$，

$C_1^0 = (\sin T\ \ 0\ \ -\cos T) = (\sqrt{2}\ \ 0\ \ -1)/\sqrt{3}$，

$B_2 = (0\ \ 0\ \ 2\sqrt{2})$，$C_2^0 = (-\sin V\ \ 0\ \ -\cos V) = (-1\ \ 0\ \ -\sqrt{7})/(2\sqrt{2})$，则

$$\begin{aligned}
?_1 &= U_1 + V_1 C_1^0 \\
&= (\sqrt{2}V_1\ 2\sqrt{3} - V_1)/\sqrt{3} \\
?_2 &= U_2 + V_2 C_2^0 \\
&= (-V_2\ 0\ 8 - \sqrt{7}V_2)/(2\sqrt{2})
\end{aligned} \tag{b}$$

记 $? = (x\ y\ z)$ (2)

将 $@_1 = ? - ?_1 = (x - 2/3V_1\ y - 2\ z + V_1/\sqrt{3})$、$@_2 = ? - ?_2 = [x + V_2/(2\sqrt{2})\ y\ z + \sqrt{7}V_2 - 8)/(2\sqrt{2})]$ 以及 C_1^0、C_2^0 的表达式代入

$(S_1)^2 = 4$ 和 $(S_2)^2 = 4$ 后有

$C_1^0 \cdot @_1 = 0$　　$C_2^0 \cdot @_2 = 0$

和

$$(x - 2/3V_1)^2 + (y - 2)^2 + (z + V_1/\sqrt{3})^2 = 4$$

$$\sqrt{2}(x - 2/3V_1) - (z + V_1/\sqrt{3}) = 0$$

$$[x + V_2/(2\sqrt{2})]^2 + y^2 + [z + (\sqrt{7}V_2 - 8)/(2\sqrt{2})]^2 = 4$$

$$x + V_2/(2\sqrt{2}) + \sqrt{7}[z + (\sqrt{7}V_2 - 8)/(2\sqrt{2})] = 0$$

从中解得

$$\begin{aligned}
V_1 &= (2x - z)/\sqrt{3} \\
V_2 &= \sqrt{7} - (x + \sqrt{7}z)/(2\sqrt{2})
\end{aligned} \tag{3}$$

以及轴线 AB 的方程

$$\begin{aligned}
(x + \sqrt{2}z)^2 + 3(2 - y)^2 &= 12 \\
(\sqrt{14}x - \sqrt{2}z + 4)^2 + 16y^2 &= 64
\end{aligned} \tag{4}$$

由图 1 和图 3 可见, 对轴线 AB, $x + \sqrt{2}z > 0$, $\sqrt{14}x - \sqrt{2}z + 4 > 0$, 代入式(4)解出

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\sqrt{3y(4 - y)} + 4(\sqrt{4 - y^2} - 1)}{1 + \sqrt{14}}, \\
z &= \frac{\sqrt{21y(4 - y)} - 2\sqrt{2}(\sqrt{4 - y^2} - 1)}{1 + \sqrt{14}}
\end{aligned} \tag{5}$$

式(3)代入式(b)得

$$\begin{aligned}
?_1 &= (2x - \sqrt{2}z\ 6\ z - \sqrt{2}x)/3 \\
?_2 &= (x + \sqrt{7}z - 2\sqrt{14}\ 0 \\
&\quad \sqrt{7}x + 7z + 2\sqrt{2})/8
\end{aligned} \tag{6}$$

式(2)和式(6)代入式(a)得

$$\begin{aligned}
@_1^0 &= [x + \sqrt{2}z\ 3(y - 2)\ \sqrt{2}x + 2z]/6 \\
@_2^0 &= (7x - \sqrt{7}z + 2\sqrt{14}\ 8y \\
&\quad z - \sqrt{7}x - 2\sqrt{2})/16 \\
A_1 &= [5x - \sqrt{2}z\ 3(y + 2)\ 4z - \sqrt{2}x]/6 \\
A_2 &= (9x + \sqrt{7}z - 2\sqrt{14}\ 8y \\
&\quad \sqrt{7}x + 15z + 2\sqrt{2})/16
\end{aligned} \tag{7}$$

计算时先给出或求出 y 值, 代入式(5)求出 x、z 值, 再代入式(2)、(3)、(6)、(7)求出 ?、V_1、V_2、$?_1$、$?_2$、$@_1^0$、$@_2^0$、A_1、A_2 值。

在角柱段的图形显示和有限元计算中常需采用轴线 AB 上的三个特殊点 A、P、Q 和它们在纺纱 1-1、2-2 轴线上的垂足 A_1、A_2、P_1、P_2、Q_1、Q_2(图 5)的坐标及相应的 V_1、V_2 值, 下面专门进行确定。

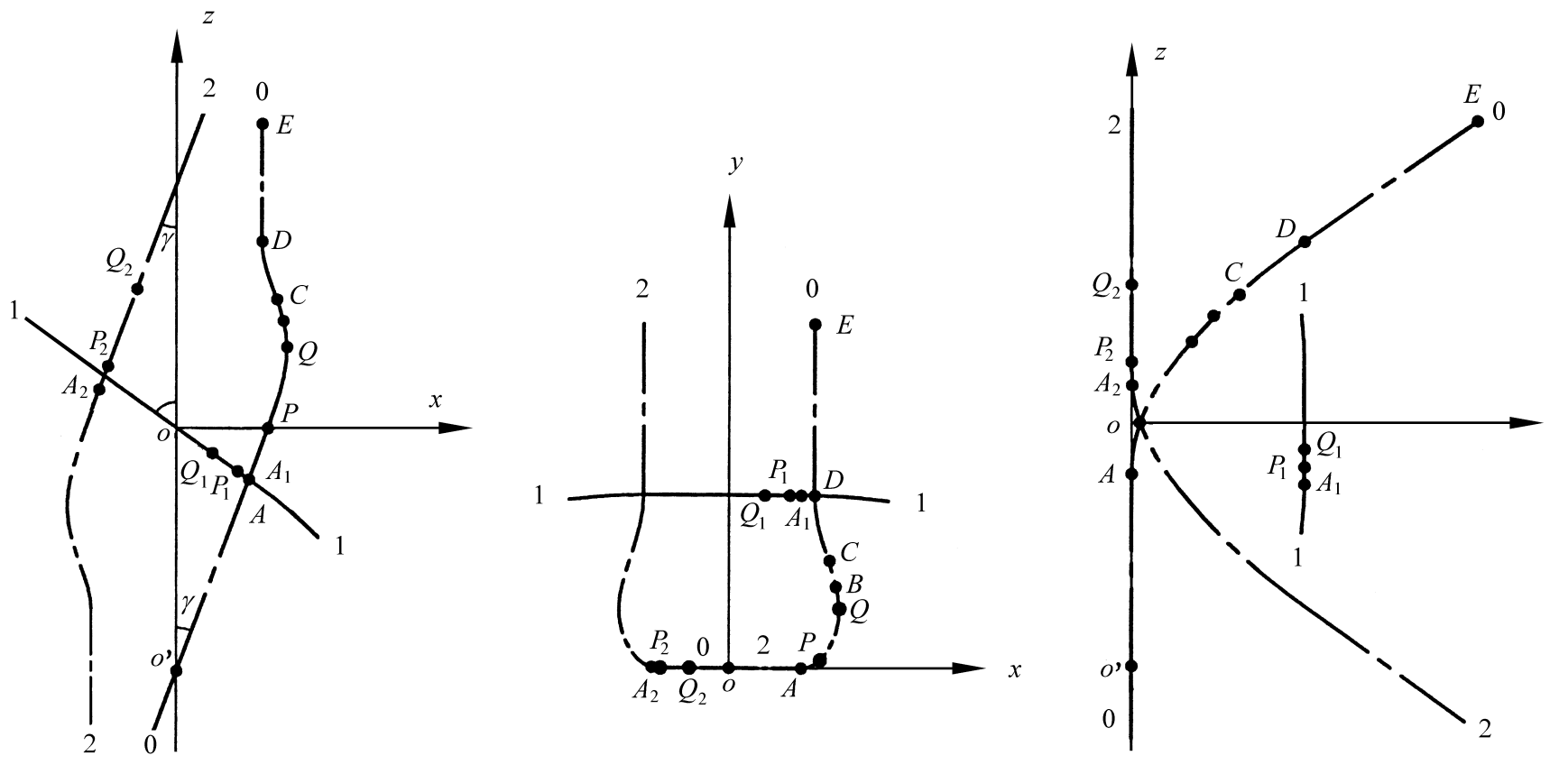

图 5　角柱段和内部段轴线上的特殊点

Fig. 5　Special points located in axes of yarns at the corner and interior

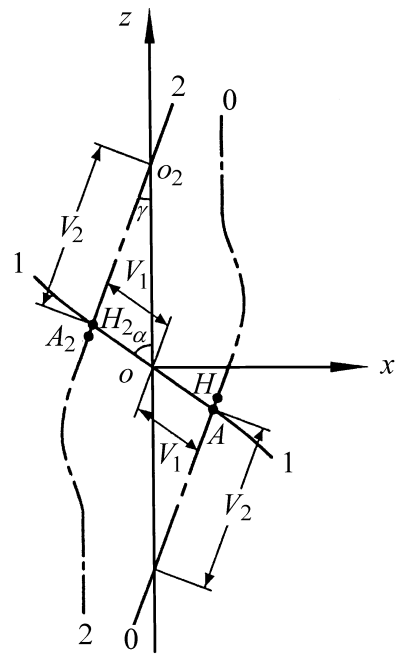

图 6 A_2 点坐标的求解

Fig. 6 Evaluating coordinates of point A_2

2.2.1 点 A、A_1、A_2 的坐标及相应的 V_1、V_2 值

点 A 的坐标 y= 0, 代入式(5)有 x= 4/(1+ $\sqrt{14}$) = 0.843587, z= - 2 $\sqrt{2}$/(1+ $\sqrt{14}$) = - 0.596506, 即 ?= (0.843587 0 - 0.596506)。显然, $?_1$= (0.843587 2 - 0.596506)。x、z 值再代入式(3)的第一式有 V_1= 2 $\sqrt{6}$/(1+ $\sqrt{14}$) = 1.033179。在图 6 的 ΔoH_2O_2 中, 由正弦定理得点 H_2 的

$$V_2 = (\sin T/\sin V)V_1 = 8/(1+\sqrt{14}) = 2.386024 \quad (c)$$

图 6 中, A_2 是点 A 在纺纱 2-2 的轴线上的垂足, H_2 是点 A 关于 y 轴的对称点(H_2 在纺纱 2-2 的轴线上), H 是点 H_2 在轴线 AB 上的垂足。可见, 只要求出点 H 的坐标(x_H y_H z_H), 即得点 A_2 的坐标(x_{A_2} y_{A_2} z_{A_2}) = (- x_H y_H - z_H)。

由式(3)的第二式得 x+ $\sqrt{7}$z= 2 $\sqrt{2}$($\sqrt{7}$ - V_2), 将式(c)代入就有 x+ $\sqrt{7}$z= 2 $\sqrt{2}$($\sqrt{7}$ - $\sqrt{2}$)/(1+ $\sqrt{14}$); 由式(5)有 x+ $\sqrt{7}$z= [8 $\sqrt{3y(4-y)}$ + 2(2- $\sqrt{2}$)($\sqrt{4-y^2}$ - 1)]/(1+ $\sqrt{14}$)。从这两式得 2 $\sqrt{6y(4-y)}$ + ($\sqrt{2}$ - 1) $\sqrt{4-y^2}$ = $\sqrt{7}$ - 1, 其解为 y= 0.006971, 代入式(5)得 x= 0.904519, z= - 0.435259, 于是点 A_2 的坐标为(- 0.904519 0.006971 0.435259)。

2.2.2 点 P、P_1、P_2 的坐标及相应的 V_1、V_2 值

点 P 的坐标 z= 0, 此时由式(5)第二式有 $\sqrt{21y(4-y)}$ = 2 $\sqrt{2}$($\sqrt{4-y^2}$ - 1), 其解为 y= 0.097148, 代入式(5)第一式得 x= 1.066521, 即 R= (1.066521 0.097148 0)。x、z 值再代入式(3)和式(6)有 V_1= 0.870811, V_2= 2.268679 和 $?_1$= (0.711014 2 - 0.502763)、$?_2$= (- 0.802099 0 0.706272)。

2.2.3 点 Q、Q_1、Q_2 的坐标及相应的 V_1、V_2 值

点 Q 是轴线 AB 上的最右端的点, 即轴线 AB 上具有最大 x 值的点。由式(5)有

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1+\sqrt{14}}\left[\frac{\sqrt{3}(2-y)}{\sqrt{y(4-y)}} - \frac{4y}{\sqrt{4-y^2}}\right]。$$

在点 Q 处, 轴线 AB 的 $\frac{dx}{dy}$ 等于 0, 即 $4y\sqrt{y(4-y)} = \sqrt{3}(2-y)\sqrt{4-y^2}$, 其解为 y= 0.697042, 代入式(5)得 x= 1.292060, z= 0.944722, 即 ?= (1.292060 0.697042 0.944722)。x、z 值再代入式(3)和式(6)有 V_1= 0.509527, V_2= 1.305233 和 $?_1$= (0.416027 2 - 0.294176), $?_2$= (- 0.461469 0 1.607494)。从而如图 2 所示, 角柱段轴曲线 AB 与内部段轴直线 DE 在 x 方向上的最大偏距为 e= 1.292060- 1= 0.292060。

以上三组点坐标及相应 V_1 和 V_2 值集中列于下表以便使用和比较。

表 1 常用的点坐标及对应的 C_1、C_2 值

Table 1 The most used coordinates of points as well as relevant values of C_1 and C_2

	x	y	z	V_1	V_2
A	0.843587	0	- 0.596506		
A_1	0.843587	2	- 0.596506	1.033179	
A_2	- 0.904519	0.006971	0.435259		
P	1.066521	0.097148	0		
P_1	0.711014	2	- 0.502763	0.870811	
P_2	- 0.802099	0	0.706272		2.268679
Q	1.292060	0.697042	0.944722		
Q_1	0.416027	2	- 0.294176	0.509527	
Q_2	- 0.461469	0	1.607494		1.305233

2.3 角柱段轴线 / 0 和 01

纺纱 0-0 的 CD 段与纺纱 1-1 的对应段相互缠绕, 轴线均为曲线且均取最短路径, 需通过变分方法才能求出它们精确的数学表达式。

连接轴线 AB 段和 CD 段的 BC 段, 根据纺纱取最短路径的分析, 应为直线。

因变分问题求解的复杂性, 目前尚不能确定轴线段 CD 的精确解析式以及点 B、C、D 的精确位置。

可用函数插值方法较简单地近似确定轴线 BD

段,从而得所需的几何数据。可取上表里的点为插值点。为保证插值曲线在各插值点处的光滑,应采用埃尔米特(Hermite) 插值(它在各插值点有连续一阶导数)。最好采用其中的样条(Spline)插值(它在各插值点还有连续的二阶导数,符合纺纱内的弯矩值为连续的实际情况)。图 5 是利用表 1 和 AutoCAD 作出的角柱段轴线的样条插值曲线,它以 A、P、Q、D 为插值点,以直线 oA、DE 为样条曲线两端的切线方向。其中点 A、P、Q 的坐标如上表所示,点 D 取在图 5 所示位置,其坐标为(1　2　3/　2)。图 5 中各插值点位置的良好连续渐变和曲线的光滑流畅,表明本文中导出公式和数据是准确的,有实用价值,样条曲线是模拟角柱段弯曲轴线的良好实用方法。

3　结束语

针对四步 1∶1 法编织的三维四向矩形编织物复合材料强度分析和有限元计算的需要,详细研究了这种预制编织物的角柱结构,为其建立了准确的几何模型。示出纺纱的角柱段与内部段、与角柱段交织接触的细观结构(图 1 和图 3)。根据纺纱在交织中取最短路径,分析出角柱段轴线由若干段直线和曲线交替光滑连接而成,推导了其中一些直线段和曲线段以及纺纱圆柱表面的接触线和法线的精确表达式(1)～式(7)。确定出在角柱段的图形显示和有限元计算中常被采用的角柱段曲轴线上三组特殊点的坐标(列于表 1 中)。用 AutoCAD 作出角柱段曲轴线的样条插值曲线(图 5)。得所结果还有:位于织物最外边的直角柱段的编织角是 20.7°(图 3)。沿织物横向且与织物表面成 45°方向上,角柱段曲轴线和内部段直轴线之间最大偏距为 0.29206(图 2)。

作者曾用圆截面绳按四步 1∶1 法制作了挤塞状态的四向矩形织物。将本文工作和这些实物对比,发现符合得好(例如编织角 20.7°)或较好(受纺纱间相互挤压产生变形及纺纱不可能是理想中的充分柔软等因素影响,纺纱路径与本文在纺纱是圆截面和充分柔软的假定下得出的路径略有不同。必要时对以上模型作适当修改即可),因而本文结果可在该材料的力学分析中应用和作为进一步有关研究的基础。

参考文献:

[1] 吴德隆, 郝兆平. 五向编织复合材料的分析模型[J]. 宇航学报, 1993(3): 40- 51.

[2] Wang Y Q, Wang A S D. Microstructure/property relationships in three-dimensionally braided fiber composites[J]. Composites Science and Technology, 1995, 53: 213- 222.

[3] Li W, Hammad M, El-Shiekh A. Structural analysis of 3-D braided preforms for composites, part I: The four-step preforms [J]. Journal of Textile Institute, 1990, 81(4): 491- 514.