复合材料学报 第20卷 第6期 12月 2003年
ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA Vol. 20 No. 6 December 2003

文章编号: 1000-3851(2003)06-0092-06

基于共焦点椭球构型的复合材料有效性质预测

马寒松, 胡更开
(北京理工大学 应用力学系, 北京 100081)

摘 要: 介绍了共焦点椭球构型,给出了基于该构型对空间任意取向复合材料模量的解析计算公式,并将其同Mori-Tanaka(MT)法、Ponte-Castaneda-Willis(PCW)方法以及Hashin-Shtrikman(HS)界限进行了比较。数值结果显示,基于该构型的预测处于MT法和PCW法所预测的值之间,并且与MT法所预测的值接近。此外,还对纤维不同的角度平均方法对有效性质的影响做了讨论。

关键词: 共焦点椭球构型; 细观力学; 有效模量; 空间任意取向
中图分类号: TB330.1 **文献标识码:** A

EFFECTIVE MODULI OF COMPOSITES BASED ON CONFOCAL ELLIPSOID MODEL

MA Hansong, HU Gengkai
(Department of Applied Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

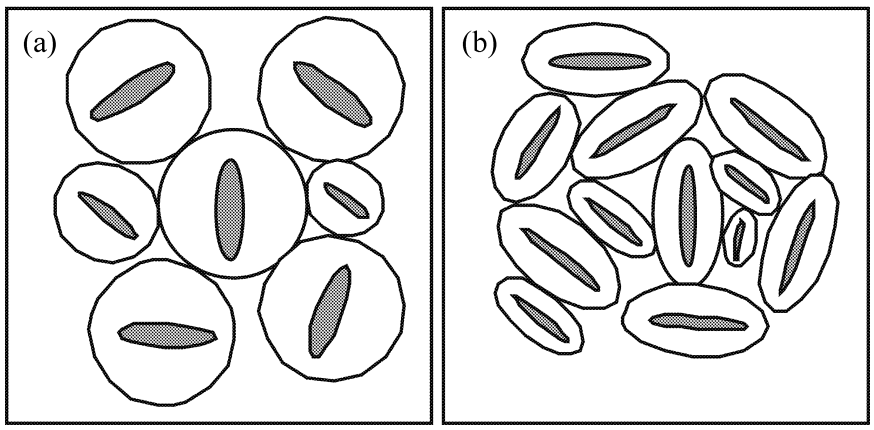
Abstract: A confocal ellipsoid model is proposed to predict the effective moduli of the composites with three-dimensional randomly oriented inclusions. The change of inclusion's distribution due to the increase of the inclusion's volume fraction is taken into account. The analytical expressions of the effective shear and bulk moduli are given, and they are compared with those predicted by Mori-Tanaka(MT) method, Ponte-Castaneda-Willis(PCW) method and Hashin-Shtrikman(HS) bounds. The results show that the prediction of the present method is between the results of the MT method and the PCW method. In addition, the influence of different orientational averaging methods on the effective moduli of composites is also discussed.

Key words: confocal ellipsoid model; micromechanics; effective moduli; random orientation

绝大多数细观力学模型,如Mori-Tanaka(MT)[1], 微分法[2], Ponte Castenada-Willis(PCW)方法[3]和与之等价的Kuster-Toksoz(KT)方法[4],双夹杂方法(DI)[5]及有效自洽方法和IDD估计[6],自洽方法[7]与广义自洽方法[8]等,都是选取一个单构型即由夹杂和围绕它的基体构成,并将该单构型放置于一参考介质中来建立局部化关系。为了求解方便,通常采用的是双椭球构型,即夹杂本身为椭球形,围绕它的基体的外边界也为椭球形。外椭球的取向和形状主要用于反映夹杂分布特征,具体有关讨论参见文献[9,10]。通过适当选取参考介质和外椭球的形状及取向可分别得到上述细观力学模型[9]。

目前上述模型中,外椭球的形状是固定的,如PCW法;或夹杂固定后它也随之固定,如MT法,这样做的好处在于能够在诸多因数中分离夹杂分布的影响。当然,带来的不便是使模型的适用范围受到限制[10,11],而且与实际情况也不相符。比如对于长椭球夹杂在空间任意取向,在夹杂体积百分比较小时,分布椭球更趋于球形即各向同性分布;而在夹杂体积百分比较大时,分布椭球更趋于夹杂自相似结构即MT结构[12],上述概念由图1表示。

收稿日期: 2002-09-23; 收修改稿日期: 2002-11-29
基金项目: 国家自然科学基金支持项目(19802003)
通讯作者: 胡更开,教授,研究方向:复合材料细观力学 E-mail: hugeng@public.bta.net.cn



(a) Isotropic distribution for dilution volume fraction

(b) Microstructure of MT model for high volume fraction

图 1 夹杂形状及含量对夹杂分布的影响

Fig. 1 Distribution of inclusions vs. their shapes and contents

图 1 表明夹杂分布本身应随夹杂的形状和含量而发生变化, 因此在对实际复合材料有效性能预测时应考虑上述分布的变化。最简单的能反映上述变化的就是, 外椭球形状是与夹杂共焦点的椭球。这个概念是由 Jiang 等[13] 预测二维有效性质时提出来的, 对于二维问题对应的是共焦点的椭圆构型。本文目的是将共焦点的椭圆构型推广到共焦点椭球, 分析对夹杂空间任意分布的三维复合材料有效性质的预测, 并对角度平均的方法对性能预测的影响进行讨论。在以下讨论中, 参考介质取为基体, 至于基于共焦点椭球构型的广义自洽方法, 由于比较复杂, 我们将在后续中给予报道。

1 理论分析

1.1 共焦点椭球构型

所谓共焦点椭球构型是指表示分布的外椭球和夹杂椭球(这里的椭球指的是由椭圆旋转而成的椭球)是共焦点的, 它们的体积比等于复合材料含夹杂的体积百分比, 即: $f = \frac{a_1 b_1^2}{a_0 b_0^2}$, 其中: a_1、b_1、a_0、b_0 分别表示夹杂和外椭球的长、短半轴。由于两椭球是共焦点的, 即: $\sqrt{a_0^2 - b_0^2} = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} =$ 半焦距, 可得外椭球的长细比 T_0 和夹杂的长细比 T_1 与夹杂体积百分比 f 的关系为

$$f = \frac{T_1}{T_0}\left(\frac{T_0^2 - 1}{T_1^2 - 1}\right)^{\frac{3}{2}} \qquad (1)$$

图 2 给出了不同 T_1 时 T_0 与体积百分比 f 的关系曲线。可以看出, 对于稀疏情况 $f \to 0$, 这时分布椭球趋于球形; 而对于高体积百分比 $f \to 1$, $T_0 \to T_1$, 即分布趋于夹杂自相似结构。正如文献[13]的共焦点

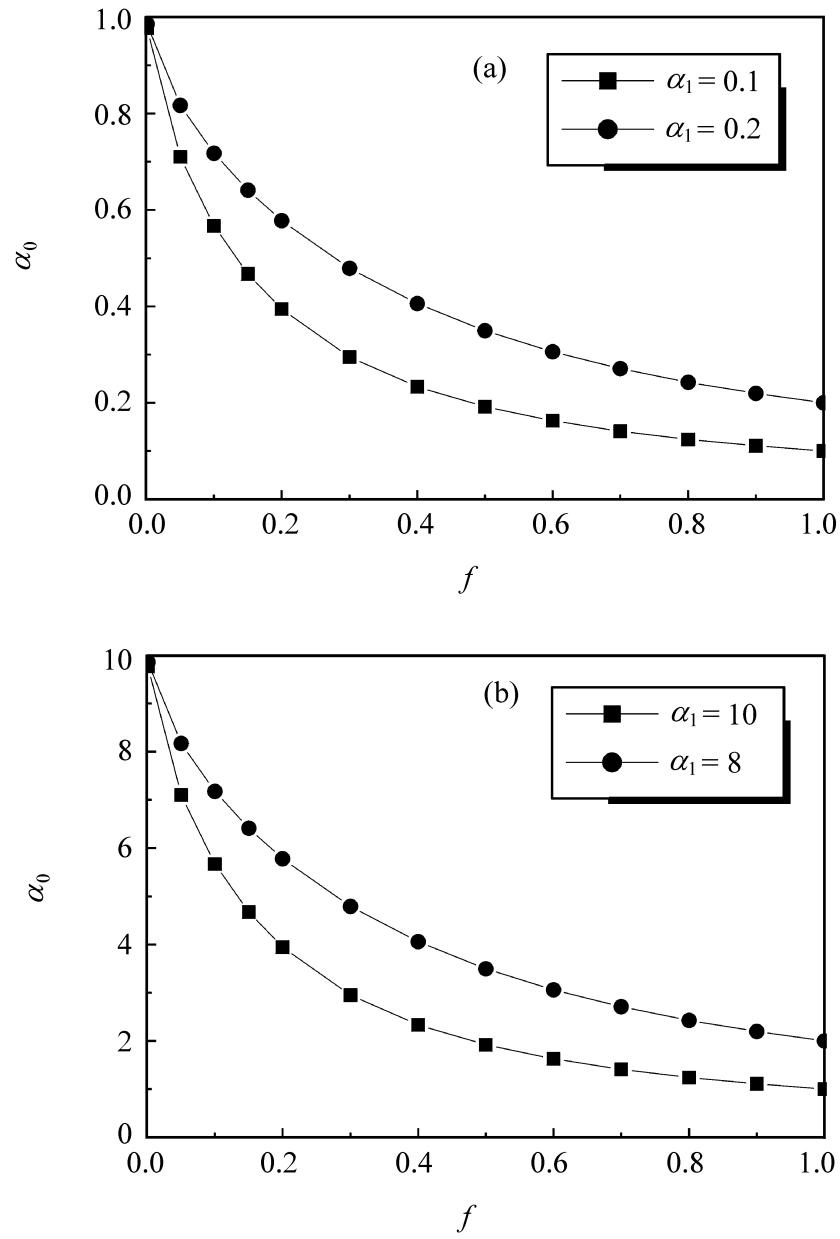


图 2 不同夹杂长细比 T_1 时 T_0 与夹杂含量 f 的变化关系

Fig. 2 Relation of the aspect ratios T_1 and T_0 as function of inclusion volume fraction f

椭圆一样, 共焦点椭球构型能够反映图 1 所表示的由于体积百分含量变化所引起的分布变化。下面基于共焦点椭球构型来估计复合材料有效性质, 并与其他方法比较。

1.2 基于共焦点椭球构型的复合材料有效模量

这里在建立局部化关系时, 参考介质取为基体, 按照文献[11]给出的方法, 并注意到分布椭球与所包含的夹杂取向一致但形状不同, 最终复合材料有效模量的解析表达式为

$$9_c = 9_0\{6 - f[\langle \ldots_1 \rangle^{-1} + f\,@^{\Omega} \ldots_1 \langle \ldots_1 \rangle^{-1}]^{-1}\} \qquad (2)$$

其中: $\ldots_1 = -[@^{\Omega} - (9_0 - 9_1)^{-1} 9_0]^{-1}$, $@^{\Omega}$、$@^{V}$ 分别为夹杂和外椭球的 Eshelby 张量, 9_1、9_0 分别为夹杂和基体的弹性模量张量。$\langle \cdot \rangle$ 表示角度平均, $\langle \cdot \rangle^{-1}$ 指求逆。

本文中只研究夹杂在空间任意取向的情况, 这样整体复合材料的性质也为各向同性。令 $__0$、$]_0$、$__1$、$]_1$、$__c$、$]_c$ 分别表示基体、夹杂和复合材料的剪切和体积模量, 这样式(2)最终可表示为

$$\frac{\mu_c}{\mu_0} = 1 - \frac{f}{(1 + f B_T) A_T}$$
$$\frac{\kappa_c}{\kappa_0} = 1 - \frac{f}{(1 + f B_U) A_U} \tag{3}$$

其中

$$A_T = -a - 3\frac{d_2}{d_1},\quad A_U = -\frac{1}{p}$$

$$B_T = [(-2S^V_{1133} - S^V_{3333})(b + 2S_{1111} - 2S_{1212} - 2S_{3311}) - 2(b - S_{1133} + S_{3333})(2S^V_{1111} + S^V_{3311} - 2S^V_{1212})]/(ad_1 + 3d_2)$$

$$B_U = \frac{2}{5}[(S^V_{1133} - S^V_{3333})(a + b + 2S_{1111} - 2S_{1212} + S_{3311}) - (S^V_{1111} - S^V_{3311})(a + b + 2S_{1133} + S_{3333})]/(ad_1 + 3d_2) - \frac{4S^V_{2323}}{5(b + 2S_{2323})} - \frac{2S^V_{1212}}{5(ad_1 + 3d_2)(b + 2S_{1212})} \times \{-a(b + 2S_{1212}) - 2[2S_{1133}S_{1212} + b(-S_{1111} + S_{1133} + 2S_{1212}) + S_{1133}S_{3311} - S_{1111}S_{3333} + 2S_{1212}S_{3333}] + 2ad_1 + 5d_2\}$$

$$a = \frac{\mu_0}{\mu_1 - \mu_0} - b,\quad b = \frac{\kappa_0}{\kappa_1 - \kappa_0},$$

$$d_1 = 3b + 2(S_{1111} - S_{1133} - S_{1212} - S_{3311} + S_{3333}),$$

$$d_2 = b^2 + b(2S_{1111} - 2S_{1212} + S_{3333}) - 2(S_{1133}S_{3311} - S_{1111}S_{3333} + S_{1212}S_{3333}),$$

$$p = \frac{1}{5}\frac{4(b + S_{1212} + S_{2323})}{(b + 2S_{1212})(b + 2S_{2323})} + \frac{3(a + b) + 4S_{1111} + 2S_{1133} - 4S_{1212} + 2S_{3311} + S_{3333}}{ad_1 + 3d_2}$$

式中，S^V_{ijkl}、S_{ijkl}分别表示在主轴下分布椭球和夹杂的 Eshelby 张量分量。

式(3)并结合式(1)给出了基于共焦点椭球构型对空间任意取向复合材料有效剪切和体积模量的估计。

为了比较，对于空间任意取向复合材料，MT 方法和 PCW 方法的估计为[11]

$$\frac{\mu_{MT}}{\mu_0} = 1 - \frac{f}{(1 - f)A_T + f\dfrac{\mu_0}{\mu_0 - \mu_1}}$$
$$\frac{\kappa_{MT}}{\kappa_0} = 1 - \frac{f}{(1 - f)A_U + f\dfrac{\kappa_0}{\kappa_0 - \kappa_1}}$$
$$\frac{\mu_{PCW}}{\mu_0} = 1 + \frac{f}{-A_T - f\dfrac{1 + \nu_0}{3(1 - \nu_0)}} \tag{4}$$
$$\frac{\kappa_{PCW}}{\kappa_0} = 1 + \frac{f}{-A_U - f\dfrac{2(4 - 5\nu_0)}{15(1 - \nu_0)}}$$

对于 PCW 方法，为了得到各向同性材料，分布椭球取为球形。下面将结合一些算例来分析上述几种细观力学方法间的差别，并与 Hashin-Shtrikman 界限[14]进行了比较。

2　数值结果分析

计算中基体 $E_0 = 2.76$ GPa，$\nu_0 = 0.35$，夹杂 $E_1 = 72.4$ GPa，$\nu_1 = 0.2$。夹杂体积百分比和长细比将在用到时给出。

图 3 给出了共焦点椭球法与 MT 法对有效剪切模量预测差值随体积百分比和剪切模量比 μ_1/μ_0 的变化关系。显然，在 $T_1 > 1$ 时二者的差值很小，在 $T_1 < 1$ 时二者的差别比较明显，并且对于硬夹杂和一定的高体积百分比时差别最为明显。对于软基体和硬夹杂情况，共焦点椭球法的预测结果始终高于 MT 法。计算结果还表明，硬基体和软夹杂情况，结果正好相反。图 4 给出 $T_1 = 0.1$ 时共焦点椭球法与 MT、PCW 和 HS 界限的比较。从图 4 可以看出，共焦点椭球法所预测的值在 MT 和 PCW 方法所预测的值之间。

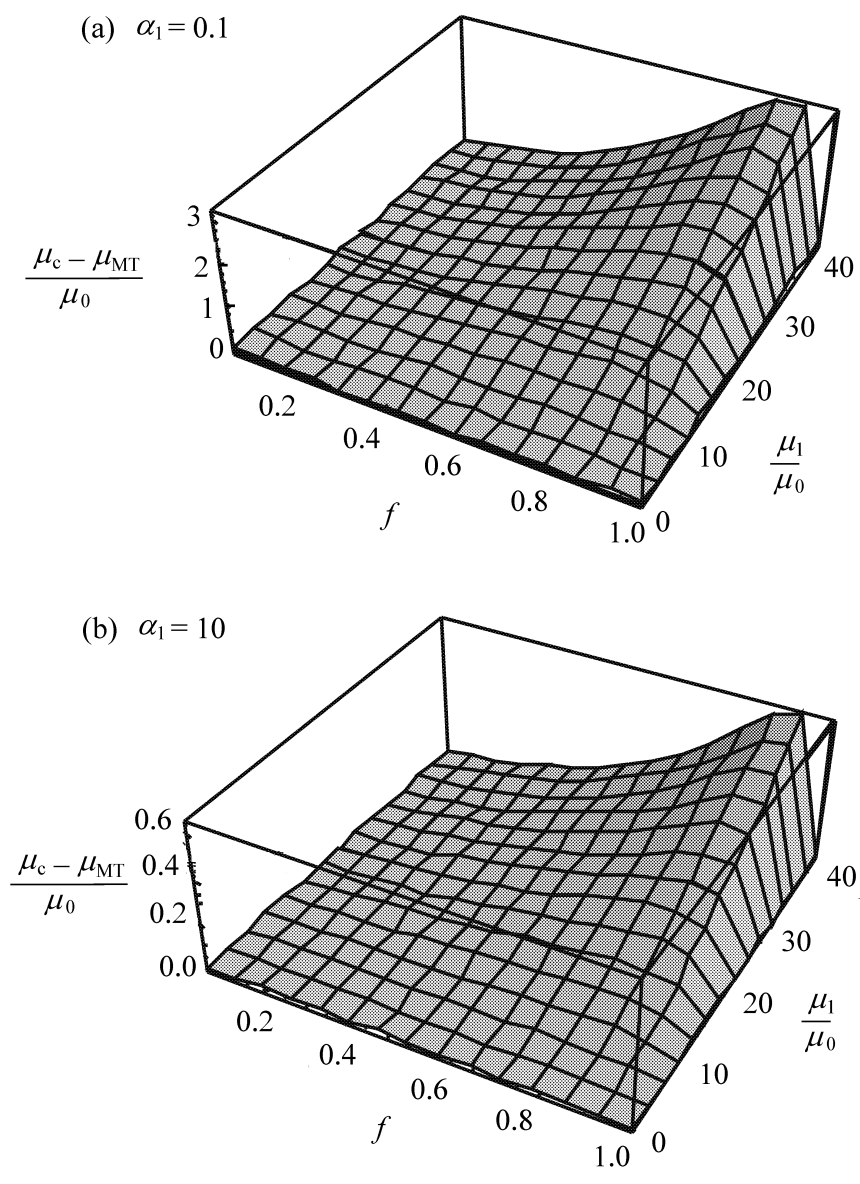


图 3　同焦点椭球方法与 MT 法的差值随体积百分比和剪切模量比 μ_1/μ_0 的变化

Fig. 3　Difference between the present model and MT method as a function of volume fraction and shear modulus radio μ_1/μ_0

对于 PCW 方法，由于假定分布椭球为球形(只有这样才能得到宏观各向同性的复合材料)，当夹杂

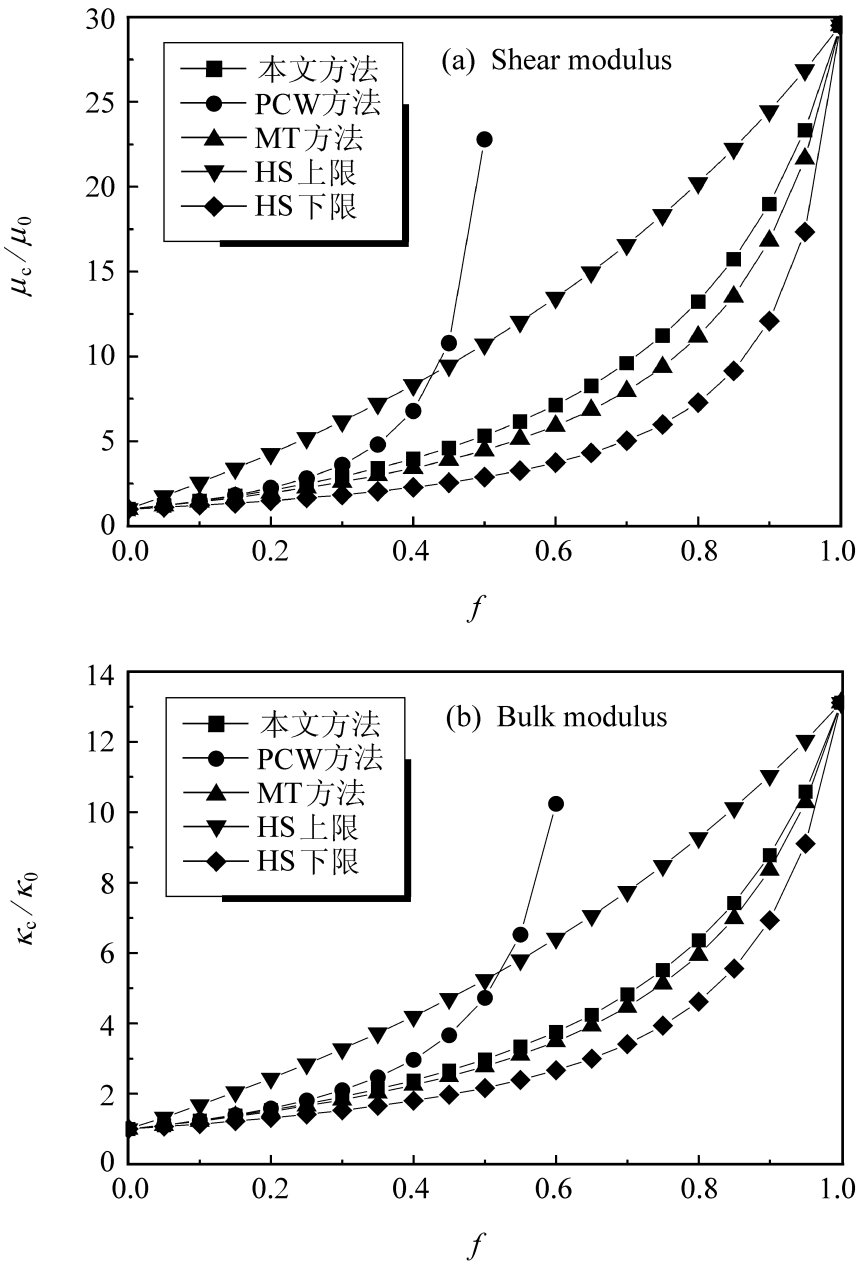


图 4 共焦点构型与 MT、PCW 和 HS 界限的比较(T_1= 0.1)

Fig. 4 Comparisons of the present model with MT method, PCW method and HS bounds

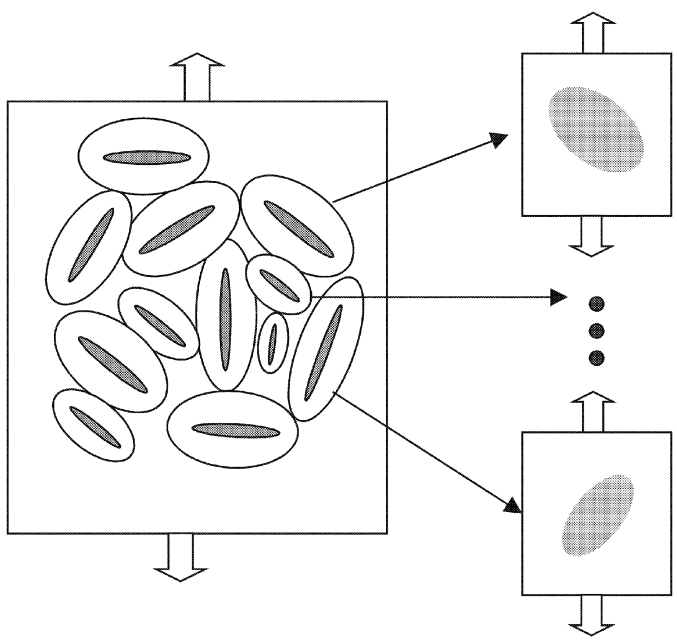


图 5 Kuster-Toksoz 模型的概念推广到夹杂任意取向示意图

Fig. 5 Conception of Kuster-Toksoz model extending to randomly oriented inclusions

的体积百分比高于一定值时, 这种分布是无法实现的, 因此会超出 HS 界限。

3 关于角度平均方法的讨论

对于夹杂在基体取向任意分布时, 通常的做法是对任意一夹杂取向, 建立局部坐标系计算出该取向夹杂在局部坐标系下的应力, 然后在宏观坐标系下对所有取向进行平均得到复合材料的等效模量[15], 第三节的计算中也是按照该方法进行的。但如果推广 Kuster-Toksoz 的概念到夹杂任意空间取向复合材料, 由图 5 所示(有关 KT 模型参见文献[10]), 这意味着在计算具有夹杂取向分布的复合材料时, 应首先计算对应单向夹杂的有效模量, 然后再对这单向的复合材料模量进行角度平均。最近 Schjodt-Thomsen 和 Pryz[16] 的工作也建议用该方法计算具有角度分布的复合材料有效性质, 这种方法正如文献[16]所述, 可以克服 Mori-Tanaka 方法带来的有效刚度不对称的缺陷。下面将共焦点椭球模型按照上面的方法计算角度平均, 并与其他方法进行比较。

对于单向复合材料, Mori-Tanaka 方法和共焦点椭球模型对有效刚度的预测结果分别为

$$9_{cA} = 9_0\{6 - f[A_1^{-1} + f@^{\Omega}]^{-1}\}$$

$$9_{cA} = 9_0\{6 - f[A_1^{-1} + f@^{V}]^{-1}\}$$

因此, 按照新的方法对于夹杂空间任意取向复合材料有效刚度的预测为

对于 MT 模型

$$9_c = \langle 9_0\{6 - f[A_1^{-1} + f@^{\Omega}]^{-1}\}\rangle \qquad (5)$$

共焦点椭球模型

$$9_c = \langle 9_0\{6 - f[A_1^{-1} + f@^{V}]^{-1}\}\rangle \qquad (6)$$

按照文献[17]给出的角度平均计算方法, 可以得到该复合材料的体积模量 $]_c$ 和剪切模量 $_c$ 的表达式。传统的 MT 方法的计算公式为式(4)。

仍然采用上述的复合材料参数进行数值计算, 三者的比较如图 6 所示。显然, 对于 MT 模型, 新的角度平均后的结果小于传统的方法。但它仍然在 Hashin-Shtrikman 界限以内。而对于共焦点椭球模型, 在 $T_1 < 1$ 时, 新的角度平均后的结果大于传统的 MT 方法所预测的值; 而对于 $T_1 > 1$ 的情况, 其结果小于传统的 MT 方法所预测的值, 并且同新的 MT 方法之间的差别很小。

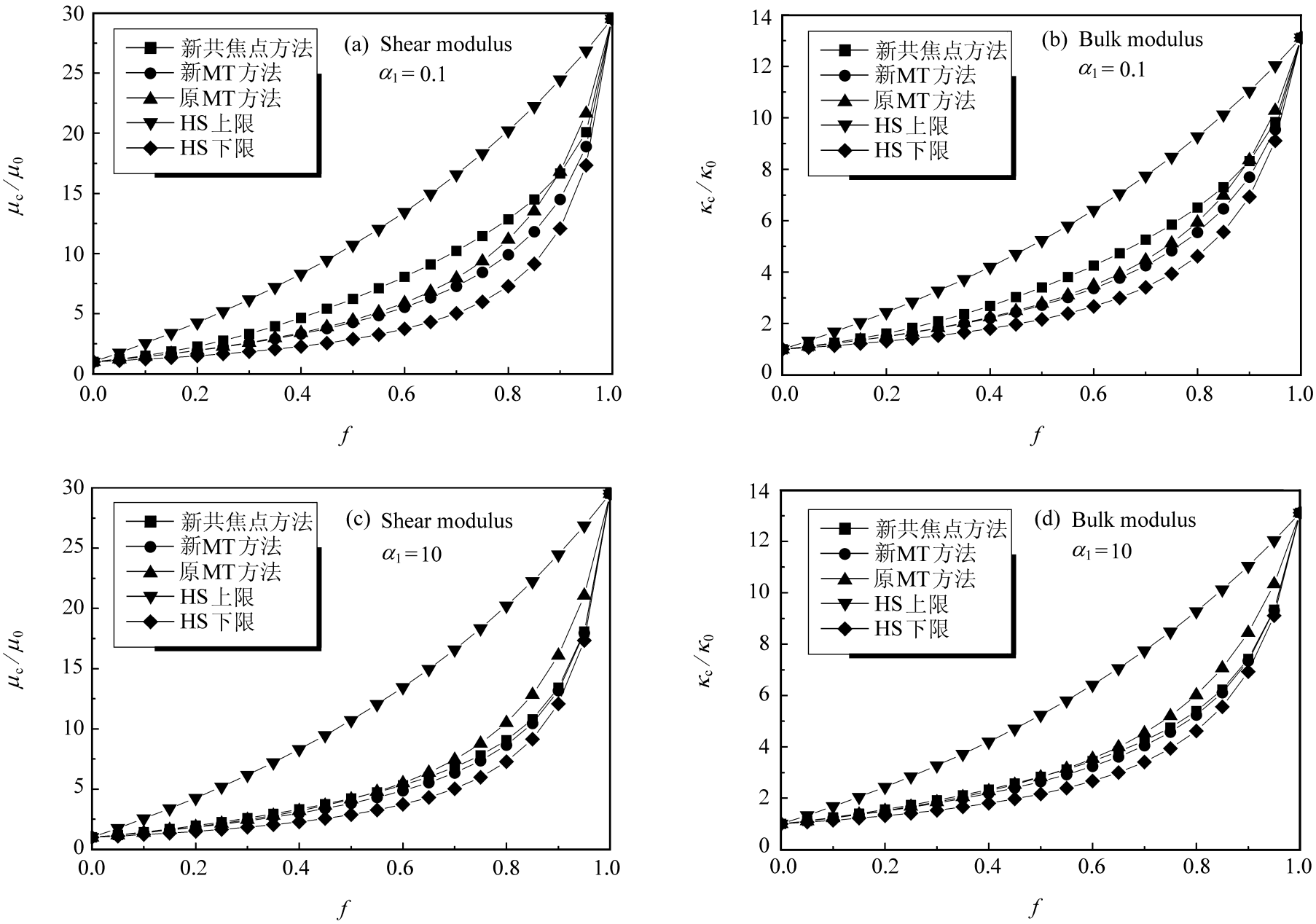


图 6　不同角度平均方法和 HS 界限的比较

Fig. 6　Comparisons of different orientional average methods and HS bounds

4　结　论

对于软基体硬夹杂,共焦点椭球构型所预测的值小于 PCW 模型所预测的值,大于 MT 模型所预测的值。对于硬基体软夹杂的情况,结果正好相反。当夹杂的长细比大于 1 时,共焦点椭球构型所预测的结果稍大于 MT 模型的预测结果,二者相差较小;而当夹杂的长细比小于 1 时,共焦点椭球构型的值明显大于 MT 方法的值。差别随夹杂硬度增加而增大,随体积百分比增加而增大,但增到一定体积百分比后会下降。

对于 MT 模型,新的角度平均方法对模量的预测值小于通常的方法,但其仍然在 Hashin-Shtrikman 界限以内。对于共焦点椭球构型,当夹杂的长细比小于 1 时,用本文中角度平均的方法所预测的数值大于通常的 MT 方法所预测的值,而当夹杂的长细比大于 1 时,用本文中角度平均的方法所预测的数值小于通常的 MT 方法所预测的值,并且同新的 MT 模型的差别很小。

致　谢　　共焦点椭球构型的概念来源于本文第二作者与蒋持平教授的一次讨论,有关夹杂分布随体积含量变化来源于本文第二作者与郑泉水教授的多次讨论,这里一并感谢。

参考文献:

[1] Mori T, Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions [J]. Acta Metall, 1973, 21: 571- 574.

[2] Norris A N. A differential scheme for the effective moduli composites [J]. Mechanics of Materials, 1985, 4: 1- 16.

[3] Ponte Castaneda P, Willis J R. The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media [J]. J Mech Phys Solids, 1995, 43: 1919- 1951.

[4] Kuster G T, Toksoz M N. Velocity and attenuation of seismic waves in two-phase media I: Theoretical formulation [J]. Geophysics, 1974, 39: 587- 606.

[5] Hori M, Nemat-Nasser S. Double-inclusion model and overall moduli of multiphase composites [J]. Mech Mater, 1993, 14: 189- 206.

[6] Zheng Q S, Du D X. An explicit and universally applicable estimate for the effective properties of multiphase composites which accounts for the inclusion distribution [J]. J Mech Phys Solids, 2001, 49: 2765- 2788.

[7] Hill R. A self-consistent mechanics of composite material [J]. J Mech Phys Solids, 1965, 13: 213- 222.

[8] Christensen R M, Lo K H. Solution for effective shear properties in three phases sphere and cylinder model [J]. J Mech Phys Solids, 1979, 11: 127- 140.

[9] 胡更开, 郑泉水, 黄筑平. 复合材料有效弹性性质分析方法 [J]. 力学进展, 2001, 31: 361- 392.

[10] Hu G K, Weng G J. The connections between the double-inclusion model and the Ponte Castaneda-Wills, Mori-Tanaka, and Kuster-Toksoz models [J]. Mechanics of Materials, 2000, 32: 495- 503.

[11] Hu G K, Weng G J. Some reflections on the Mori-Tanaka and Ponte Castaneda-Willis methods with randomly oriented ellipsoidal inclusions [J]. Acta Mechanica, 2000, 140: 31- 40.

[12] 杜丹旭. 多相材料有效性质的理论研究 [D]. 北京: 清华大学, 2000.

[13] Jiang C P, Tong Z H, Cheung Y K. A generalized self-consistent method accounting for fiber section shape [J]. Int Journal of Solids and Structures, 2003, 40: 2589- 2609.

[14] Hashin Z, Shtrikman S. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity [J]. J Mech Phys Solids, 1962, 10: 355- 342.

[15] Tandon G P, Weng G J. Average stress in the matrix and effective moduli of randomly oriented composites [J]. Composite Science and Technology, 1986, 27: 111- 132.

[16] Schjodt-Thomsen J, Pryz R. The Mori-Tanaka stiffness tensor: diagonal symmetry, complex fiber orientations and non-dilute volume fractions [J]. Mechanics of Materials, 2001, 33: 531- 544.

[17] 胡更开. 复合材料细观塑性的二阶矩理论及其应用 [A]. 见: 杜善义, 等. 复合材料及其结构的力学、设计、应用和评价 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2000. 201- 216.