复合材料学报 第 20 卷 第 6 期 12 月 2003 年
ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA Vol. 20 No. 6 December 2003

文章编号: 1000-3851(2003) 06-0080-07

拉伸正交各向异性有限宽板偏心圆孔的应力集中系数表达式

王启智, 宋小林
(四川大学 土木工程及应用力学系, 成都 610065)

摘 要: 用近似解析方法推导出拉伸正交各向异性有限宽板偏心圆孔的应力集中系数的显式表达式,除了比较极端的情况外,该式的精度较好。误差估计基于与有限元分析结果的比较。当偏心度取为零,即变为有限宽板中心圆孔时,此简化情况下的应力集中系数表达式与文献值和有限元解吻合得很好。推导的方法虽然简单,但结果比较理想。利用所推导的表达式可以求解各向异性材料的应力集中系数问题。

关键词: 拉伸正交异性有限宽板; 偏心圆孔; 中心圆孔; 应力集中系数; 显式表达式
中图分类号: TB330.1 **文献标识码:** A

EXPRESSIONS OF STRESS CONCENTRATION FACTORS FOR AN ECCENTRIC CIRCULAR HOLE IN A TENSION ORTHOTROPIC FINITE-WIDTH STRIP

WANG Qizhi, SONG Xiaolin
(Department of Civil Engineering and Applied Mechanics, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

Abstract: Using an approximate analytical method, the explicit expression of stress concentration factors is derived for an eccentric circular hole in a tension orthotropic finite-width strip. The accuracy of the expression is adequate except some extreme situations. The error estimate is based on a comparison with the results from finite element analysis. When the eccentricity is taken as zero, i.e. for the simplified case of a center circular hole in a tension orthotropic finite-width strip, the deduced expression has good accuracy, as demonstrated by agreement with values from the references and finite element analysis. It is shown that the formulation method and the derived expressions can be used to solve difficult problems of stress concentration factors for anisotropic materials, although they are quite simple.

Key words: tension orthotropic finite-width strip; eccentric circular hole; center circular hole; stress concentration factor; explicit expressions

纤维增强复合材料具有很高的比强度和比刚度,因此在航空航天、土木建筑、机械化工等工程领域的应用十分广泛。对于基本的结构形式如薄板或薄壳,由于结构安装或功能方面的需求,薄板(壳)上往往开有孔洞,承载时这些孔洞引起的应力集中是造成构件破坏的主要原因之一[1]。如龚明在疲劳裂纹研究中认为[2],孔边应力集中系数较大的试样裂纹扩展速率大,疲劳裂纹的萌生位置具有强烈的择优性,裂纹全部萌生于应力集中的孔边缘。尤其是经常遇到的带有圆孔的纤维增强复合材料板的应力集中问题的研究一直受到重视[1~6]。但是,对工程中常见的有限域内的力学问题大多难于求得精确解,因此寻求简单可行又有实用精度的近似解成为力学领域长期探讨的问题。本文中给出拉伸正交异性有限宽板中的偏心圆孔的应力集中系数的显式表达式,与精细的有限元分析结果比较,当圆孔偏心度相对

收稿日期: 2002-07-26; 收修改稿日期: 2003-03-10
基金项目: 国家自然科学基金的资助(19872046)
通讯作者: 王启智, 教授, 主要从事材料(混凝土、岩石等地质材料、复合材料)和结构的损伤、断裂、失效分析研究
E-mail: qzw@scu.edu.cn

孔径较大时,此式误差较大,但在其余情况下精度较好。特别是当偏心圆孔退化成中心圆孔时,简化所得到的拉伸正交异性有限宽板中心圆孔的应力集中系数表达式具有较高的精度,与有限元解和文献值[3, 4]吻合很好。本文的工作把作者以前对各向同性材料的研究思路[7~9]成功地推广到正交各向异性材料上。

1 公式推导和误差估计

1.1 拉伸正交异性有限宽板偏心圆孔的应力集中系数的初步表达式

如图 1 所示,正交各向异性平板中有一个偏心圆孔,圆孔半径为 a,板的宽度为 2b,板的材料主向沿坐标轴,在板的左右两边施加沿 x 向的均布拉应力 e。

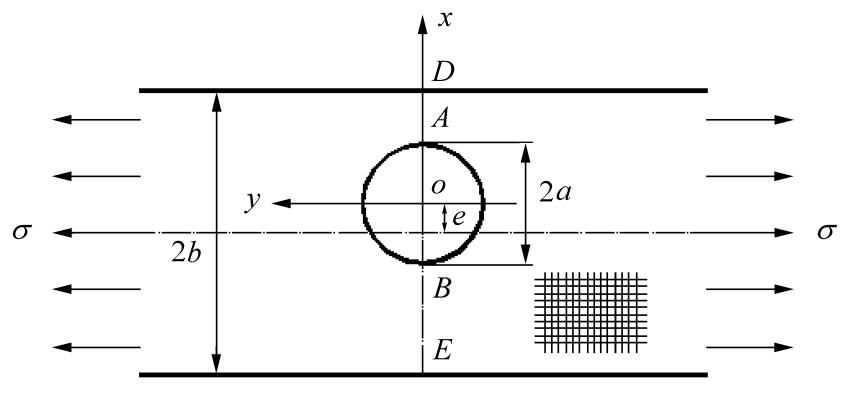

图 1 拉伸正交异性偏心圆孔板

Fig. 1 An eccentric circular hole in a tension orthotropic finite-width strip

当圆孔位于正交各向异性无限大板(在图 1 中令 b→∞)内时,孔两侧沿 x 轴上的应力分量 e_y 分布近似为[10]

$$e_y = \frac{e}{2}\left(2+\frac{a^2}{x^2}+\frac{3a^4}{x^4}\right)-(K_t^{\infty}-3)\left(\frac{5a^6}{x^6}-\frac{7a^8}{x^8}\right) \tag{1}$$

其中: e 是远场的拉伸应力, a 是圆孔半径, K_t^{∞} 为拉伸无限大板中圆孔的应力集中系数,对正交各向异性材料其求解公式[11]为

$$K_t^{\infty}=1+2\sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}-\nu_{12}+\frac{E_{22}}{G_{12}}}$$

其中: E_{11}和 E_{22}分别为材料第 1、第 2 主方向上的拉伸弹性模量, G_{12}为材料主平面内的剪切模量。

假设式(1)乘以一个修正系数即可得到有限宽度的影响,所以拉伸有限宽板中的偏心圆孔的应力分布为

$$e_y(AD)=C_A\frac{e}{2}\left(2+\frac{a^2}{x^2}+\frac{3a^4}{x^4}\right)-(K_t^{\infty}-3)\left(\frac{5a^6}{x^6}-\frac{7a^8}{x^8}\right) \tag{2a}$$

$$e_y(BE)=C_B\frac{e}{2}\left(2+\frac{a^2}{x^2}+\frac{3a^4}{x^4}\right)-(K_t^{\infty}-3)\left(\frac{5a^6}{x^6}-\frac{7a^8}{x^8}\right) \tag{2b}$$

其中 C_A、C_B 分别表示作用在线段 AD, BE 上的修正系数。

沿 x 轴将板分为两部分,由板的平衡条件,可以得到在 y 方向力的平衡方程要求

$$\int_a^{+\infty} C_A\frac{e}{2}\left(2+\frac{a^2}{x^2}+\frac{3a^4}{x^4}\right)-(K_t^{\infty}-3)\left(\frac{5a^6}{x^6}-\frac{7a^8}{x^8}\right)dx+\int_a^{+\infty} C_B\frac{e}{2}\left(2+\frac{a^2}{x^2}+\frac{3a^4}{x^4}\right)-(K_t^{\infty}-3)\left(\frac{5a^6}{x^6}-\frac{7a^8}{x^8}\right)dx=2eb \tag{3}$$

算出积分后,上式可以简化为

$$C_AH_1+C_BH_2=1 \tag{4}$$

其中

$$H_1=\frac{b-e}{2b}-\frac{a^2}{4b(b-e)}-\frac{a^4}{4b(b-e)^3}+\frac{(K_t^{\infty}-3)a^6}{4b(b-e)^5}-\frac{(K_t^{\infty}-3)a^8}{4b(b-e)^7} \tag{5a}$$

$$H_2=\frac{b+e}{2b}-\frac{a^2}{4b(b+e)}-\frac{a^4}{4b(b+e)^3}+\frac{(K_t^{\infty}-3)a^6}{4b(b+e)^5}-\frac{(K_t^{\infty}-3)a^8}{4b(b+e)^7} \tag{5b}$$

然后,对板的中点取力矩的平衡条件要求

$$\int_a^{+\infty} C_A\frac{e}{2}\left(2+\frac{a^2}{x^2}+\frac{3a^4}{x^4}\right)-(K_t^{\infty}-3)\left(\frac{5a^6}{x^6}-\frac{7a^8}{x^8}\right)(x+e)dx-\int_a^{+\infty} C_B\frac{e}{2}\left(2+\frac{a^2}{x^2}+\frac{3a^4}{x^4}\right)-(K_t^{\infty}-3)\left(\frac{5a^6}{x^6}-\frac{7a^8}{x^8}\right)(x-e)dx=0 \tag{6}$$

同样上式可以简化为

$$C_AH_3-C_BH_4=0 \tag{7}$$

其中

$$H_3=b^2-e^2+a^2\left(\frac{1}{2}-\frac{K_t^{\infty}-3}{12}+\ln\frac{b-e}{a}\right)-\frac{a^2e}{b-e}-\frac{3a^4}{2(b-e)^2}-\frac{a^4e}{(b-e)^3}+\frac{5(K_t^{\infty}-3)a^6}{4(b-e)^4}+\frac{(K_t^{\infty}-3)a^6e}{(b-e)^5}-$$

$$\frac{7(K_t^{\infty}-3)a^8}{6(b-e)^6}-\frac{(K_t^{\infty}-3)a^8e}{(b-e)^7} \tag{8a}$$

$$H_4=b^2-e^2+a^2\frac{1}{2}-\frac{K_t^{\infty}-3}{12}+\ln\frac{b+e}{a}+\frac{a^2e}{b-e}-\frac{3a^4}{2(b+e)^2}+\frac{a^4e}{(b+e)^3}+\frac{5(K_t^{\infty}-3)a^6}{4(b+e)^4}-\frac{(K_t^{\infty}-3)a^6e}{(b+e)^5}-\frac{7(K_t^{\infty}-3)a^8}{6(b+e)^6}+\frac{(K_t^{\infty}-3)a^8e}{(b+e)^7} \tag{8b}$$

联立式(4)和式(7)可以解出

$$C_A=\frac{H_4}{H_1H_4+H_2H_3} \tag{9a}$$

$$C_B=\frac{H_3}{H_1H_4+H_2H_3} \tag{9b}$$

其中 H_1、H_2、H_3 和 H_4 已分别在式(5a)、(5b)、(8a)和(8b)中给出。

应力集中系数通常有两种定义,一种定义是用应力集中处的应力峰值比上远端平均应力;第二种定义是用应力集中处的应力峰值比上最小截面或称有效截面上的平均应力。本文中采用的应力集中系数定义取前一种,也就是

$$K_t=\frac{e_{max}}{e} \tag{10}$$

其中:e 是远场的拉伸应力,e_{max} 是所关注点的最大应力。如果 e 取有效截面上的平均应力,则为另一种应力集中系数的定义,但是两者之间很容易换算。所以拉伸偏心圆孔板在孔边 A 处、B 处的应力集中系数分别为

$$K_{tA}=K_t^{\infty}C_A,\quad K_{tB}=K_t^{\infty}C_B \tag{11}$$

显然研究的情况($e\geq 0$)中 $K_{tA}\geq K_{tB}$,所以 K_{tA} 也就是我们最关心的,故而以后不再考虑 K_{tB},只研究应力集中系数的最大值 K_{tA}。

初步验算式(11)和式(9)确定的应力集中系数,精度不是很理想,下面是我们的修正过程。

1.2　拉伸正交异性有限宽板中心圆孔的应力集中系数的表达式

首先考虑公式的两种特殊情况:如图 1,当 e= 0 时,退化为中心孔;进一步再退化为各向同性,则有 $K_t^{\infty}=3$,在文献[7～9]中对各向同性材料有比较系统的研究。因此,结果可以分为两部分:(1) 各向同性部分(即不含 K_t^{∞} 的项);(2) 各向异性部分(即含 K_t^{∞} 的项),并且这两部分是独立的,因此,可以借用各向同性板应力集中系数表达式[7～9]的结论来修正第(1)部分,然后再修正各向异性部分的系数。

当孔为中心孔时,即 e= 0 时,从上面有关公式简化有

$$H_1=H_2=\frac{1}{2}-\frac{a^2}{4b^2}-\frac{a^4}{4b^4}+\frac{(K_t^{\infty}-3)}{4}\frac{a^6}{b^6}-\frac{a^8}{b^8} \tag{12a}$$

$$H_3=H_4=b^2+a^2\frac{1}{2}+\ln\frac{b}{a}-\frac{3a^4}{2b^2}+(K_t^{\infty}-3)\frac{5a^6}{4b^4}-\frac{7a^8}{b^6}-\frac{a^2}{12} \tag{12b}$$

$$C_A=C_B=\frac{1}{1-0.5\frac{a^2}{b^2}-0.5\frac{a^4}{b^4}+0.5(K_t^{\infty}-3)\frac{a^6}{b^6}-\frac{a^8}{b^8}} \tag{13}$$

在文献[7～9]中曾对各向同性结果进行过修正,并且得到了很好的精度。直接运用其结果,修正式(13)的各向同性部分的系数,这样拉伸有限宽正交各向异性中心圆孔板的应力集中系数表达式就修正为

$$K=K_{tA}=K_{tB}=\frac{K_t^{\infty}}{1-1.25\frac{a^2}{b^2}+0.25\frac{a^4}{b^4}+0.5(K_t^{\infty}-3)\frac{a^6}{b^6}-\frac{a^8}{b^8}} \tag{14}$$

但是式(14)的精度对正交各向异性材料仍不很理想,现在来修正影响正交各向异性部分的系数 0.5,修正后的结果如下:

$$K=\frac{K_t^{\infty}}{1-1.25\frac{a^2}{b^2}+0.25\frac{a^4}{b^4}+m(K_t^{\infty}-3)\frac{a^6}{b^6}-\frac{a^8}{b^8}} \tag{15}$$

其中

$$m=18\frac{b}{a}+9\,e^{-\frac{(b/a-6)^2}{5}} \tag{16}$$

修正因子 m 如上面的形式并非偶然,为了找到合适的 m 使式(15)的结果和 ANSYS 有限元分析结果符合较好,先求出 a/b 取各种值时对应的 m 值,发现 m 值的变化规律与正态分布的密度函数非常相象,而且 b/a= 6 时的板可以认为是无限大板,然后再逐步调整系数,得到 m 的最后形式。

为验证所得结果的精度,选取材料的工程弹性模量见表 1。

表 1 正交各向异性材料的工程弹性模量

Table 1 Engineering elastic constants for orthotropic materials

material	E_{11}/ MPa	E_{22}/ MPa	G_{12}/ MPa	μ_{12}
mater1[11]	167.4	7.993	3.032	0.252
mater2[11]	204	18.5	5.59	0.23
mater3[3]	207.326	20.65	10.04	0.318
mater4[3]	11.43	11.43	1.00	0.058

表 1 中材料 3 和 4 的工程弹性模量是根据文献中给出的 E_{11}/E_{22} 和 E_{11}/G_{12} 改写的。由上面无限大板应力集中系数 K_t^{∞} 的求解公式可以看出, K_t^{∞} 只与 E_{11}/E_{22} 和 E_{11}/G_{12} 有关, 而与 E_{11}、E_{22} 和 G_{12} 的具体值无关。

式(15) 就是拉伸有限宽正交各向异性中心圆孔板的应力集中系数表达式。选取两组有限元结果与式(15) 比较, 发现两者误差相当小, 具体结果见表 2。

从表 2 可以看出文献[3]、ANSYS 有限元分析和公式吻合相当好, 而且文献[3] 较 ANSYS 解和公式解小, 但是 ANSYS 解和公式解则更为接近。同时由于文献[3] 中的数据是从曲线中测量得到的, 也不可避免地存在误差, 特别是在得到(*) 结果时由于曲线与 y 轴交点的准确位置不好辨认, 所以误差较大。同时在得到 ANSYS 解答时收敛效果非常好, 所以认为 ANSYS 解是比较精确的。故在以后的偏心圆孔问题中, 由于没有关于该问题的解析、数值或实验方面的结果的任何文献, 都是以 ANSYS 解作为参考值。

为了此比较在 a/b 较大时, 即板比较窄或者孔径比较大时表达式(15) 结果与 ANSYS 有限元分析结果, 研究了材料 1 和材料 2 在 a/b 取更多种值时的 ANSYS 解和式(15) 解, 另外 Tan 在文献[12] 中给出了一个求解公式, 在此也一并比较几种方法的误差, 具体结果见表 3。

表 2 有限宽正交各向异性板中心圆孔孔边应力集中系数比较

Table 2 A comparison of stress concentration factors for a center circular hole in a tension orthotropic finite-width strip

a/b	Mater3					Marter4				
	ANSYS	ref[3]	eq(15)	err1/%	err2/%	ANSYS	ref[3]	eq(15)	err1/%	err2/%
0.2	6.27	6.18	6.34	1.4563	2.5889	4.80	4.77	4.85	0.6289	1.6771
0.25	6.38	6.26	6.46	1.9169	3.1949	4.90	4.85	4.96	1.0309	2.2680
0.33	6.65	6.58	6.78	1.0638	3.0395	5.16	5.16	5.25	0.0	1.7442
0.4	6.95	6.94	7.16	0.1441	3.1700	5.45	5.53	5.58	-1.6647	0.9042
0.5	7.64	7.58*	7.96	0.7916	5.0132	6.08	6.17	6.30	-1.4587	2.1070

Note: $err1=(ANSYS-ref^{[3]})/ref^{[3]}\times100\%$, $err2=(eq(15)-ref^{[3]})/ref^{[3]}\times100\%$

表 3 正交各向异性有限宽板中心圆孔的应力集中系数表达式(15) 结果与 ANSYS 结果的比较

Table 3 A comparison of stress concentration factors for a center circular hole in a tension orthotropic finite-width strip, eq. (15)]Z ANSYS

a/b	Mater1					Marter2				
	ANSYS	ref[12]	eq(15)	err1/%	err2/%	ANSYS	ref[3]	eq(15)	err1/%	err2/%
0.1	8.99	9.09	9.10	1.1123	1.2236	7.53	7.61	7.63	1.0624	1.3280
0.2	9.11	9.40	9.17	3.1833	0.6586	7.67	7.88	7.74	2.7379	0.9126
0.25	9.24	9.62	9.24	4.1126	0.0000	7.79	8.07	7.84	3.5944	0.6418
0.33	9.55	10.06	9.56	5.3403	0.1047	8.08	8.48	8.17	4.9505	1.1139
0.5	10.71	10.81	10.81	0.9337	0.9337	9.15	9.41	9.41	2.8415	2.8415
0.67	13.34	11.74	13.68	-11.9940	-0.4498	11.60	10.78	11.91	-7.0690	2.6724
0.71	14.68	12.37	14.48	-15.7357	-1.3624	12.85	11.54	13.13	-10.1946	2.1790
0.77	16.93	13.62	16.47	-19.5511	-2.7171	14.94	12.92	15.14	-13.5207	1.3378
0.83	21.30	16.50	20.45	-22.5352	-3.9906	19.01	15.93	19.21	-16.2020	0.5786
0.91	33.72	26.03	32.51	-22.8055	-3.5884	30.81	25.58	31.03	-16.9750	0.7141
0.95	56.80	45.79	56.83	-19.3838	0.0528	53.01	45.39	54.91	-14.3746	3.5842

Note: $err1=(ref[12]-ANSYS)/ANSYS\times100\%$, $err2=(eq(15)-ANSYS)/ANSYS\times100\%$

从表 3 数据可以看出, 公式(15) 具有很好的精度, 而且适用范围也很广, 只要满足条件 a/ b≤0. 95 即可满足工程要求, 所以利用公式(15) 求解拉伸有限宽正交各向异性板中心圆孔的应力集中系数, 具有简便、准确的特点, 可以避免 ANSYS 计算时需要重复改变几何参数和材料参数的繁琐步骤, 便于在工程中应用, 但文献[12] 给出的公式解的误差就比较大了。

此外, 我们还参阅了苏虹等撰写的“有限宽度正交异性薄板应力集中的试验研究”一文[5], 发现其中的有关数据存在不少问题。现列举出来: 他们选取的材料为纤维增强的环氧树脂板, 其工程常数为: E_L = 16. 7 GPa, E_T = 4. 1 GPa, G_{LT} = 3. 1 GPa, ν_{TL} = 0. 332; 又根据 $E_T/E_L = \nu_{LT}/\nu_{TL}$, 可以得出 ν_{LT} = 0. 08。

表 4 记录了文献[5] 沿纤维方向拉伸和沿垂直纤维方向拉伸时的结果与 ANSYS 和公式(15) 结果的比较。

在工程中当 b/ a> 6 时, 就认为该板为无限大板。当 a/ b= 1/ 8 时显然可以作为无限大板来处理, 沿纤维方向拉伸时, 由无限大板应力集中系数理论求解公式[11] 可以求出 K_t^{∞} = 4. 04, 用 ANSYS 求得为 4. 02, 用公式(15) 求得为 4. 11, 与文献[5] 的计算结果偏差相当大, 误差见表 4, 所以我们认为文献[5] 计算结果有误, 接着又验证 a/ b= 1/ 4 和 a/ b= 1/ 2 两种情况, 误差也相当大, 进而又研究了沿垂直纤维方向拉伸时的结果, 也存在同样的问题, 见表 4。

文献[5] 的计算结果随 a/ b 变化的变化梯度比较大, 与“当 a/ b< 0. 5(即孔较小或者板较大) 时, 应力集中系数增加较为缓慢”的结论明显不符, 而这个结论在文献[3] 和我们的计算结果中有近 20 种材料与之吻合, 文献[3] 中的数据也被很多论文(如文献[4] 等) 作为校验数据, 并且吻合得很好。另外, 利用 ANSYS 计算此例结果的收敛性非常好, 有足够的信心认为我们的结果是正确的, 至少可以满足工程要求的精度。

沿垂直纤维方向拉伸时, 忽视了复合材料的特性, 不能很好发挥材料的作用, 因而这种情况在工程中不常用, 没有太多研究者研究此类问题, 故找不到更多的可以验证的数据。

1. 3　修正后的拉伸正交异性有限宽板偏心圆孔的应力集中系数的表达式

基于公式(15) 的良好精度, 拉伸正交各向异性偏心圆孔孔边 A 点的应力集中系数(最大应力集中系数) 可由式(9) 和式(11) 修正为

$$K_{tA} = \frac{K_t^{\infty} H_4}{H_1 H_4 + H_2 H_3} \times \frac{1 - 0.5\frac{a^2}{b^2} - 0.5\frac{a^4}{b^4} + 0.5(K_t^{\infty} - 3)\frac{a^6}{b^6} - \frac{a^8}{b^8}}{1 - 1.25\frac{a^2}{b^2} + 0.25\frac{a^4}{b^4} + m(K_t^{\infty} - 3)\frac{a^6}{b^6} - \frac{a^8}{b^8}} \quad (17)$$

修正的依据是在 e= 0 时式(17) 可以退化为式(15), 其中 H_1、H_2、H_3 和 H_4 分别由式(2)、式(8) 和式(16) 确定。

关于拉伸有限宽正交各向异性偏心圆孔板的应力集中系数的文献, 至今还没有发现合适的数据, 所以为了比较公式(17) 的精度, 只能和 ANSYS 结果进行比较。由于利用 ANSYS 计算时计算量非常大,

表 4　文献[5] 结果与 ANSYS 结果比较

Table 4　A comparison between ref [5] and ANSYS

	a/ b	appro[5]	strain gages[5]	photo-elastic[5]	ANSYS	eq(15)	err1/ %	err2/ %
Tension along the fiber	1/ 8	4. 92	4. 65	4. 71	4. 02	4. 11	15. 67	13. 14
	1/ 4	5. 28	5. 47	5. 02	4. 21	4. 33	19. 24	15. 94
	1/ 2	7. 31	7. 20	7. 00	5. 41	5. 57	29. 39	25. 67
Tension vertical to the fiber	1/ 8	2. 51	2. 64	2. 52	2. 28	2. 33	10. 09	7. 725
	1/ 4	3. 08	3. 23	2. 89	2. 48	2. 49	16. 06	16. 06
	1/ 2	4. 50	4. 22	4. 00	3. 26	3. 32	22. 70	20. 48

Note: err1= minimum of {(ref[5]-ANSYS)/ANSYS× 100%}, err2= minimum of {(ref[5]-eq(15))/ eq(15) × 100% }

我们只研究了材料 1, 公式中也同样只计算了材料 1 的几种情况, 其比较结果见表 5。

表 5 拉伸正交各向异性有限宽板偏心圆孔应力集中系数表达式和 ANSYS 结果的比较

Table 5 A comparison of stress concentration factors for an eccentric circular hole in a tension orthotropic finite-width strip, eq. (17)]Z ANSYS

a/b	e/b	ANSYS	eq(11)	eq(17)	err1/%	err2/%
0.2	0.1	9.14	9.26	9.26	1.3129	1.3129
	0.2	9.20	9.38	9.37	1.9565	1.8478
	0.3	9.31	9.54	9.53	2.4705	2.3630
	0.4	9.49	9.78	9.78	3.0558	3.0558
	0.5	9.79	10.17	10.16	3.8815	3.7794
	0.6	10.41	10.81	10.80	3.8425	3.7464
	0.7	12.20	11.76	11.75	-3.6066	-3.6885
0.25	0.1	9.30	9.42	9.37	1.2903	0.7527
	0.2	9.41	9.60	9.55	2.0191	1.4878
	0.3	9.61	9.86	9.80	2.6015	1.9771
	0.4	9.93	10.23	10.17	3.0211	2.4169
	0.5	10.53	10.77	10.71	2.2792	1.7094
	0.6	11.89	11.52	11.46	-3.1112	-3.6165
	0.7	17.40	13.40	13.33	-22.989	-23.391
0.33	0.1	9.69	9.77	9.79	0.8256	1.0320
	0.2	9.95	10.07	10.09	1.2060	1.4070
	0.3	10.41	10.47	10.49	0.5764	0.7685
	0.4	11.23	10.99	11.01	-2.1371	-1.9590
	0.5	12.95	11.59	11.61	-10.502	-10.347
	0.6	8.73	3.16	13.18	-29.738	-29.632
0.4	0.1	10.16	10.10	10.27	-0.5905	1.0827
	0.2	10.64	10.47	10.65	-1.5977	0.0940
	0.3	11.49	10.93	11.11	-4.8738	-3.3072
	0.4	13.18	11.42	11.61	-13.354	-11.912
	0.5	17.68	12.34	12.55	-30.204	-29.016
0.5	0.1	11.28	10.56	11.16	-6.3830	-1.0638
	0.2	12.38	10.93	11.55	-11.712	-6.7044
	0.3	14.64	11.33	11.97	-22.609	-18.238
	0.4	20.75	12.47	13.17	-39.904	-36.530

Note: err1= (eq(11)-ANSYS)/ANSYS× 100%,
err2= (eq(17)-ANSYS)/ANSYS× 100%

从表 5 可以看出, 式(11)修正为式(17)后, 误差整体上有所减小, 但修正效果仍然不是十分明显, 有些情况甚至略有增大, 只有 a/b 变大(即孔径变大或者板变窄)时, 修正效果才比较明显; 但是在孔边距离板边比较近时的误差仍相当大, 均超过 15%, 甚至达 30% 多。

但是我们仍然选用式(17)作为拉伸正交各向异性偏心圆孔有限板的应力集中系数的表达式, 这是因为它在 e= 0 时式(17)可以退化为拉伸正交各向异性中心圆孔有限板的应力集中系数表达式, 即公式(15), 它具有很好的精度。显然公式(17)在今后的研究中非常有必要进一步修正。

只要满足条件 a/b+ e/b≤0.7, 公式(17)的精度都小于 7%, 是可以接受的, 特别当 a/b≤0.25 时, 公式的适用范围可以扩大到 a/b+ e/b≤0.85; 当 e/b= 0, 即为中心孔时公式的适用范围可以扩大到 a/b+ e/b≤0.95。

2 结论和讨论

(1) 用半解析半经验的方法推导了拉伸正交各向异性有限宽度板中心圆孔和偏心圆孔的应力集中系数的显式表达式。目前没有关于此问题的相关文献值, 因此利用 ANSYS 有限元分析求解了正交各向异性有限宽度板偏心圆孔的应力集中系数, 并与显式表达式结果比较。其中, 偏心圆孔公式(17)在极端情况, 也就是在 a/b 较大和 e/b 较大即孔边距板边较小时, 误差较大, 公式有待进一步修正, 但其它情况误差较小。

(2) 中心圆孔公式(15)与 ANSYS 有限元分析吻合得非常好, 最大误差不超过 4%。与文献[3]研究结果也吻合得非常好, 最大误差 5%。公式(15)完全可以满足工程需要。

(3) 文献[5]研究结果的数据有问题, 文献[12]推导的公式和 ANSYS 的相对误差较大。

(4) 本文的推导方法有可能应用于求解对应的正交各向异性 3 维孔洞、夹杂的应力集中系数。

参考文献:

[1] Huh J S, Hwang W. Fatigue life prediction of circular notched CFRP laminates [J]. Composite Structures, 1999, 44: 163-168.

[2] 龚　明. 含孔薄板孔边裂纹的萌生和扩展 [J]. 航空学报, 2002, 23(3): 202-　205.

[3] 谢鸣九, 焦坤芳, 张　瑜, 等. 碳纤维环氧复合材料层板的应力集中系数研究 [J]. 航空学报, 1988, 9(6): 233-　239.

[4] 王林江, 盛振娟, 林佳锂, 等. 用计算复变函数法处理多个椭圆孔有限大小复合材料板的应力场 [J]. 东南大学学报, 1999, 29(6): 113-　118.

[5] 苏　虹, 孙锁泰, 赵国旗. 有限宽正交异性薄板应力集中的试验研究 [J]. 复合材料学报, 1995, 12(4): 94-　98.

[6] 苟文选, 卫　丰, 王程宽, 等. 复合材料双孔板应变集中系数的实验研究 [J]. 机械科学与技术, 1999, 18 (1): 130-　132.

[7] 王启智, 吴大鹏. 拉伸偏心圆孔板的应力集中系数表达式 [J]. 力学与实践, 1999, 21(3): 18-　20.

[8] 王启智, 戴　峰. 拉伸半无限圆孔板应力集中系数表达式 [J]. 力学与实践, 2001, 23(6): 33-　35.

[9] Wang Q Z. Simple formulae for the stress concentration factor for two- and three-dimensional holes in finite domains [J]. Journal of Strain Analysis, 2002, 37(3): 259-　264.

[10] Konish H J, Whitney J M. Approximate stresses in an orthotropic plate containing a circular hole [J]. Journal of Composite Materials, 1975, 9: 157-　166.

[11] 罗祖道, 李思简. 各向异性材料力学 [M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1994.

[12] Tan S C. Finite-width correction factors for anisotropic plate containing a central opening [J]. Journal of Composite Materials, 1988, 22(11): 1080-　1097.