复合材料学报 第20卷 第6期 12月 2003年
ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA Vol. 20 No. 6 December 2003

文章编号: 1000-3851(2003)06-0073-07

层内混杂复合材料断裂纤维附近的应力重分布

王奇山
(同济大学 固体力学教育部重点实验室,上海大学 应用数学和力学所, 上海 200072)

摘 要: 研究了层内混杂复合材料的高模量纤维断裂引起的邻近各层应力重分布问题。通过建立适当的计算模型,利用二维弹性力学精确解和付氏变换法,建立问题的奇异积分方程组,通过求解方程组,计算高、低模量层和基体层的应力集中因子,计算结果对"混杂效应"作出了理论解释,并与一般采用的Shear-Lag理论计算结果作了比较,本文结果更精确、合理,可应用于层内混杂复合材料的设计。

关键词: 层内混杂复合材料; 应力集中因子; 奇异积分方程
中图分类号: TB330.1 **文献标识码:** A

STRESS REDISTRIBUTION AROUND A BROKEN FIBER IN AN INTERMINGLED HYBRID COMPOSITE SHEET

WANG Qishan
(Key Laboratory of Solid Mechanics of MOE, Tongji University, Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai 200072, China)

Abstract: The stress redistribution of fibers immediately adjacent is examined to a broken high modulus fiber in an intermingled hybrid composite. The problem was formulated by establishing the proper analysis model, and the solutions of two-dimensional elastic mechanics in conjunction with the Fourier transform were adopted to set up the singular integral equations for this problem. From the solution of these equations, the stress concentration factors(SCF) were evaluated for the high and low modulus fibers and matrix. The numerical analysis results provide a theoretical explanation of the observed "hybrid effect". Compared with the existing Shear-Lag theory results, the present analysis results are more accurate and reasonable, and can be used in the design of intermingled hybrid composites.

Key words: intermingled hybrid composite; stress concentration factor; singular integral equations

混杂复合材料是工程应用中的一种重要的复合材料,可由两种或两种以上的纤维与基体经层内混杂或层间混杂复合而成。其中高模量(HM)纤维一般都具有低延伸率,容易发生断裂,而低模量(LM)纤维,一般具有高延伸率。经混杂的复合材料与单一纤维复合材料相比具有较高的断裂韧性和抗疲劳性能,同时价格低廉,对它们而言,复合材料的综合性能更易剪裁,因而长期来受到许多研究者的重视。

混杂复合材料强度研究中的一个关键问题是当某些高模量低延伸率的纤维断裂后,混杂复合材料中的应力如何重新分配。Hedgepeth[1]首先运用剪滞理论(Shear-Lag)分析了非混杂单向纤维增强复合

收稿日期: 2002-07-18; 收修改稿日期: 2003-02-21
基金项目: 同济大学固体力学教育部重点实验室开放课题基金资助
通讯作者: 王奇山,博士,主要从事固体力学、计算力学研究 E-mail: qishan_w@sina.com

材料中由于部分断裂纤维引起的周围其它纤维的应力集中, Hedgepeth 的计算模型基于材料力学的初等理论, 方法简单、应用方便, 因而受到广泛的关注。八十年代, Fukuda 与 Chou[2] 等人将 Hedgepeth 的方法推广到混杂复合材料, 导出了剪滞模型下由于部分纤维断裂而引起的未断裂纤维的应力集中因子, 这些工作为深入了解复合材料的混杂机理提供了有益的理论依据。

但由于 Shear-Lag 模型简化的近似性, 计算有一定误差, 本文中则给出了一个分析层内混杂复合材料应力重分配问题的二维弹性力学精确解。通过假设层内混杂复合材料在远端外载作用下某一根高模量低延伸率纤维完全断裂的计算模型, 运用弹性力学迭加原理和位错基本解建立该问题的奇异积分方程组。根据计算结果详细分析了参与混杂的两种不同纤维及基体的弹性性质、体积含量等对邻近纤维应力集中的影响, 所得结果与 Shear-Lag 理论结果作了比较, 从而可看出各种情况下初等理论的适用范围。

1　奇异积分方程组

考察一层内混杂复合材料单层板, 纤维、基体排列及计算坐标系如图 1 所示。沿纤维轴向无穷远处作用有外载 e_∞, 在板中间有一高模量纤维层完全断裂, 利用问题的对称性, 可以如图示仅考虑其中一半, 图中的第 1、3、5、7 层分别交互为高模量(HM)、低模量纤维(LM), 第 2、4、6 层为基体(m), 第 8 层则为由复合材料等效模量所表征的正交各向异性半无限等效介质层, 刚度系数为 b_{TU}、$_{xy}$。等效模量可用 Voigt 与 Reuss 近似法求得

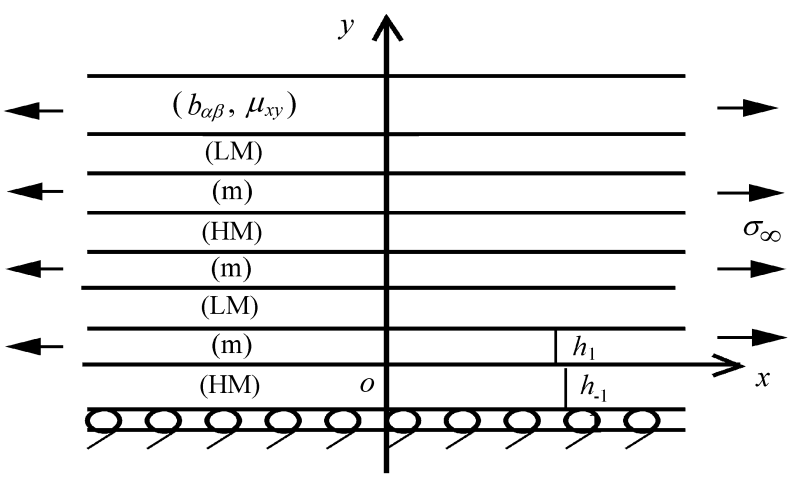

图 1　计算模型

Fig. 1　Analytical model

$$E_x = h_H E_H + h_L E_L + h_m E_m / (h_H + h_L + h_m),$$

$$E_y = h_H + h_L + h_m / \frac{h_H}{E_H} + \frac{h_L}{E_L} + \frac{h_m}{E_m},$$

$$_{xy} = h_H + h_L + h_m / \frac{h_H}{_H} + \frac{h_L}{_L} + \frac{h_m}{_m},$$

$$`_{xy} = h_H `_H + h_L `_L + h_m `_m / (h_H + h_L + h_m) \quad (1)$$

式中: h_H、h_L、h_M 分别为图 1 中高模量层、低模量层和基体层的厚度, E_i、$_i$、$`_i$ $(i = H, L, m)$ 分别代表它们的杨氏模量、剪切刚度和泊松比。由上述量不难求得正交各向异性层 8 的刚度系数 $b_{TU}$[3]。为方便, 公式中断裂的高模量层厚度和材料参数分别用 $h_{-1}$、$E_{-1}$、$_{-1}$、$`_{-1}$ 表示。

图 1 中若无纤维断裂, 纤维轴向外载 e_∞ 在高模量纤维上产生的均布应力为 $e_{H0} = (E_H / E_x) e_\infty$, E_x 为复合材料 x 方向等效模量, 该裂纹问题的边界条件可表述为

$$e_{xx}(0, y) = -e_{H0}, \quad e_{xy}(0, y) = 0$$
$$(-h_{-1} < y < 0) \quad (2)$$

$$e_{yy}(x, -h_{-1}) = 0, \quad e_{xy}(x, -h_{-1}) = 0,$$
$$e_{xy}(x, \infty) = 0, \quad e_{yy}(x, \infty) = 0 \quad (3)$$

上述边界条件可以通过裂纹面上的连续分布位错来满足。设沿裂纹界面 $x = 0, -h_{-1} < y < 0$ 上作用有张开型位错 $b_x(y)$, 该位错的基本解可按如下迭加法求解。

先考虑图 2 所示各向同性双材料半无限大体, (1)和(-1)分别表示上、下层材料, 并分别与图 1的 h_1 层和 h_{-1} 层材料相同, (-1)层的$(0, Y)$, $(-h_{-1} < Y < 0)$ 处有一刃型张开位错 $b_x(0, Y)$, x 轴沿双材料结合界面。其应力、位移场如下[4]:

上层材料 $y \geq 0$ 处:

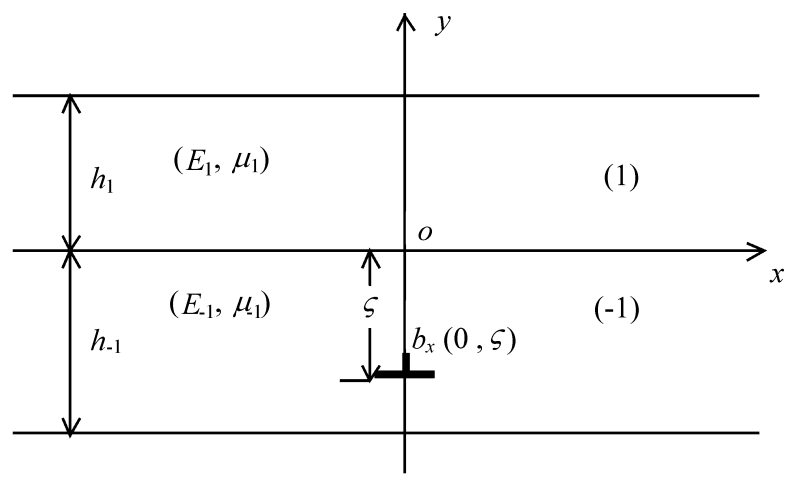

图 2　刃型位错定义

Fig. 2　The dislocation definition

$$e_{yy}^{(1)}(x,y)=\frac{Cb_x}{\pi}-\frac{y-Y}{r_1^2}+\frac{2x^2(y-Y)}{r_1^4}-\frac{2U(y-Y)^3}{r_1^4}-2UY\frac{1}{r_1^2}-\frac{2x^2}{r_1^4},$$

$$e_{xy}^{(1)}(x,y)=\frac{Cb_x}{\pi}\frac{x}{r_1^2}-\frac{2x(y-Y)^2}{r_1^4}-\frac{2Ux(y-Y)^2}{r_1^4}-4UY\frac{x(y-Y)}{r_1^4},$$

$$e_{xx}^{(1)}(0,y)=-\frac{Cb_x}{\pi}\frac{1}{y-Y}+F(y,Y) \qquad (4)$$

其中

$$F(y,Y)=-\frac{2UY}{(y-Y)^2} \qquad (5)$$

$$u(x,y)=\frac{Cb_x}{2_{}_1\pi}\frac{[_1}{2}[(]_1+1)+U(]_1-1)]+(1+U)\frac{x(y-Y)}{r_1^2}+2UY\frac{x}{r_1^2},$$

$$v(x,y)=\frac{Cb_x}{2_{}_1\pi}-\frac{1}{2}\ln r_1[(]_1-1)+U(]_1+1)]+(1+U)\frac{(y-Y)^2}{r_1^2}+2UY\frac{y-Y}{r_1^2} \qquad (6)$$

其中, $r_1^2=x^2+(y-Y)^2$, $[_1=\frac{\pi}{2}+\mathrm{tg}^{-1}\frac{y-Y}{x}$

下层材料 $y\le 0$ 处:

$$e_{yy}^{(-1)}(x,y)=\frac{Cb_x}{\pi(1+T)}(1-U^2)\frac{y-Y}{r_1^2}-2(1-U^2)\frac{(y-Y)^3}{r_1^4}+(T+U^2)\frac{y+Y}{r_2^2}-2(T+U^2)\frac{(y+Y)^3}{r_2^4}+2(1+T)U\frac{(y+Y)^3}{r_2^4}-2(T-U)(1-U)\frac{Y}{r_2^2}-8(T-U)(1-U)\frac{Y(y+Y)^2}{r_2^4}+16(T-U)(1-U)\frac{Y(y+Y)^4}{r_2^6}+12(T-U)(1-U)\frac{Y^2(y+Y)}{r_2^4}-16(T-U)(1-U)\frac{Y^2(y+Y)^3}{r_2^6},$$

$$e_{xy}^{(-1)}(x,y)=\frac{Cb_x}{\pi(1+T)}(1-U^2)\frac{x}{r_1^2}-2(1-U^2)\frac{x(y-Y)^2}{r_1^4}+(T+U^2)\frac{x}{r_2^2}-2(T+U^2)\frac{x(y+Y)^2}{r_2^4}+2(1+T)U\frac{x(y+Y)^2}{r_2^4}-4(T-U)(1-U)\frac{Yx(y+Y)}{r_2^4}+16(T-U)(1-U)\frac{Yx(y+Y)^3}{r_2^6}+4(T-U)(1-U)\frac{Y^2x}{r_2^4}-16(T-U)(1-U)\frac{Y^2x(y+Y)^2}{r_2^6},$$

$$e_{xx}^{(-1)}(0,y)=-\frac{Cb_x(1-U^2)}{\pi(1+T)}\frac{1}{y-Y}+F(y,Y) \qquad (7)$$

其中

$$F(y,Y)=\frac{(T+U^2)}{(1-U^2)}\frac{1}{y+Y}+\frac{2(T-U)}{1+U}\frac{Y}{(y+Y)^2}-\frac{4(T-U)}{1+U}\frac{Y^2}{(y+Y)^3} \qquad (8)$$

$$u^{-1}(x,y)=\frac{Cb_x}{2_{}_{-1}\pi(1+T)}\frac{[_1}{2}(1-U^2)(]_{-1}+1)+(1-U^2)\frac{x(y-Y)}{r_1^2}+\frac{[_2}{2}[(T+U^2)(]_{-1}+1)-(1+T)U(]_{-1}-1)]+[(T+U^2)-(1+T)U]\times\frac{x(y+Y)}{r_2^2}+(]_{-1}-1)(T-U)(1-U)\frac{Yx}{r_2^2}-4(T-U)(1-U)\frac{Yx(y+Y)^2}{r_2^4}+4(T-U)(1-U)\frac{Y^2x(y+Y)}{r_2^4},$$

$$v^{-1}(x,y)=\frac{Cb_x}{2_{}_{-1}\pi(1+T)}-\frac{1}{2}\ln r_1(1-U^2)\times(]_{-1}-1)+(1-U^2)\frac{(y-Y)^2}{r_1^2}-\frac{1}{2}\ln r_2\times[(T+U^2)(]_{-1}-1)-(1+T)U(]_{-1}+1)]+[(T+U^2)-(1+T)U]\frac{(y+Y)^2}{r_2^2}-(]_{-1}-1)(T-U)(1-U)\frac{Y(y+Y)}{r_2^2}-4(T-U)(1-U)\frac{Y(y+Y)^3}{r_2^4}-2(T-U)(1-U)\frac{Y^2}{r_2^2}+4(T-U)(1-U)\frac{Y^2(y+Y)^2}{r_2^4} \qquad (9)$$

其中: $r_2^2=x^2+(y+Y)^2$, $[_2=\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}\frac{y+Y}{x}$,

$$C=\frac{2_{}_1(1+T)}{(]_1+1)(1-U^2)}=\frac{2_{}_{-1}(1-T)}{(]_{-1}+1)(1-U^2)},$$

$$T=\frac{_{}_1(]_{-1}+1)-_{}_{-1}(]_1+1)}{_{}_1(]_{-1}+1)+_{}_{-1}(]_1+1)},$$

$$U=\frac{\mu_1(\kappa_{-1}-1)-\mu_{-1}(\kappa_1-1)}{\mu_1(\kappa_{-1}+1)+\mu_{-1}(\kappa_1+1)}$$

式中: T, U 是 Dundurs 常数[4], $\mu_i=E_i/2(1+\nu_i)$, E_i 为杨氏模量, ν_i 为泊松比, $\kappa_i=3-4\nu_i$(平面应变), $\kappa_i=\frac{3-\nu_i}{1+\nu_i}$(平面应力), i 为"1"或"-1"代表上、下层材料。

引入付里叶正弦变换与余弦变换

$$U^{(i)}(a,y)=\int_0^\infty u^{(i)}(x,y)\sin ax\,dx,$$

$$V^{(i)}(a,y)=\int_0^\infty v^{(i)}(x,y)\cos ax\,dx,$$

$$\tilde{E}_{xy}^{(i)}(a,y)=\frac{1}{2\mu_i}\int_0^\infty e_{xy}^{(i)}(x,y)\sin ax\,dx,$$

$$\tilde{E}_{yy}^{(i)}(a,y)=\frac{1}{2\mu_i}\int_0^\infty e_{yy}^{(i)}(x,y)\cos ax\,dx \qquad (10)$$

采用式(10)对 $y>0$ 时式(4)、式(6)及 $y<0$ 时式(7)、式(9)进行付氏变换, 并代入 $y=h_1$ 及 $y=h_{-1}$ 可得图 2 的 $y=h_1$ 和 $y=-h_{-1}$ 和面上 b_x 产生变换后的应力、位移为

$$U(a,h_1)=\frac{Cb_x}{4\mu_1}\frac{1}{2}[(\kappa_1+1)+U(\kappa_1-1)]-\frac{1}{a}+(1+U)(h_1-Y)+2UY\,e^{-(h_1-Y)a},$$

$$V(a,h_1)=\frac{Cb_x}{4\mu_1}-\frac{1}{2}[(\kappa_1-1)+U(\kappa_1+1)]-\frac{1}{a}+(1+U)(h_1-Y)+2UY\,e^{-(h_1-Y)a},$$

$$\tilde{E}_{xy}^{(1)}(a,h_1)=\frac{Cb_x}{4\mu_1}[1-(1+U)(h_1-Y)a-2UYa]e^{-(h_1-Y)a},$$

$$\tilde{E}_{yy}^{(1)}(a,h_1)=-\frac{Cb_x}{4\mu_1}[U+(h_1-Y)a+(h_1+Y)Ua]e^{-(h_1-Y)a},$$

$$\tilde{E}_{xy}^{(-1)}(a,-h_{-1})=\frac{Cb_x(1-U^2)}{4(1+T)\mu_{-1}}\times[1-(h_{-1}+Y)a]e^{-(h_1+Y)a}+\frac{Cb_x}{4(1+T)\mu_{-1}}\times[(T+U^2)-(T-U)(1-U)(h_{-1}-Y)a-2(T-U)(1-U)h_{-1}Ya^2]e^{-(h_{-1}-Y)a},$$

$$\tilde{E}_{yy}^{(-1)}(a,-h_{-1})=\frac{Cb_x(1-U^2)}{4(1+T)\mu_{-1}}(h_{-1}+Y)ae^{-(h_{-1}+Y)a}-\frac{Cb_x}{4(1+T)\mu_{-1}}[U(1+T)-(T-U)(1-U)(h_{-1}+Y)a-2(T-U)(1-U)h_{-1}Ya^2]e^{-(h_{-1}-Y)a},$$

$$U^{-1}(a,-h_{-1})=\frac{Cb_x}{4\mu_{-1}(1+T)}\frac{1}{2}(1-U^2)(\kappa_{-1}+1)\times\frac{1}{a}e^{-(h_{-1}+Y)a}+(1-U^2)(-h_{-1}-Y)e^{-(h_{-1}+Y)a}+\frac{1}{2}[(T+U^2)(\kappa_{-1}+1)-(1+T)U(\kappa_{-1}-1)]\times\frac{1}{a}e^{-(h_{-1}-Y)a}+[(\kappa_{-1}-1)(T-U)(1-U)Y-2(T-U)(1-U)Yh_{-1}a]e^{-(h_{-1}-Y)a}+[(T+U^2)-(1+T)U](-h_{-1}+Y)e^{-(h_{-1}-Y)a},$$

$$V^{-1}(a,-h_{-1})=\frac{Cb_x}{4\mu_{-1}(1+T)}\frac{1}{2}(1-U^2)(\kappa_{-1}-1)\times\frac{1}{a}e^{-(h_{-1}+Y)a}+(1-U^2)(h_{-1}+Y)e^{-(h_{-1}+Y)a}+\frac{1}{2}[(T+U^2)(\kappa_{-1}-1)-(1+T)U(\kappa_{-1}+1)]\times\frac{1}{a}e^{-(h_{-1}-Y)a}+[(\kappa_{-1}-1)(T-U)(1-U)Y+2(T-U)(1-U)(Y+h_{-1}Ya)]e^{-(h_{-1}-Y)a}+[(T+U^2)-(1+T)U](h_{-1}-Y)e^{-(h_{-1}-Y)a} \qquad (11)$$

以下令各层位移、应力为 $u_i^{(k)}$、$e_{ij}^{(k)}$, 由叠加原理, 图 1 问题的位错基本解可表示成

$$u_i^{(k)}(x,y)=\bar{u}_i^{(k)}(x,y)+\tilde{u}_i^{(k)}(x,y),$$

$$e_{ij}^{(k)}(x,y)=\bar{e}_{ij}^{(k)}(x,y)+\tilde{e}_{ij}^{(k)}(x,y) \qquad (12)$$

其中: $k\neq-1,+1$ 时, $\tilde{u}_i^{(k)}(x,y)=0$, $\tilde{e}_{ij}^{(k)}(x,y)=0$。

类似式(10)可相应定义 $\tilde{u}_i^{(k)}(x,y)$、$\tilde{e}_{ij}^{(k)}(x,y)$ 的付里叶变换。从各向同性及正交各向异性弹性力学的基本方程出发易推得, 当第 k 层为各向同性层($k=-1$ 层, 1～6 层)时

$$\bar{U}^{(k)}(a,y)=(A_1^{(k)}h_{-1}+A_2^{(k)}y)e^{-ay}+(A_3^{(k)}h_{-1}+A_4^{(k)}y)e^{ay},$$

$$\bar{V}^{(k)}(a,y)=\left(A_1^{(k)}h_{-1}+A_2^{(k)}\frac{\lambda_k}{a}+y\right)e^{-ay}+\left(-A_3^{(k)}h_{-1}+A_4^{(k)}\frac{\lambda_k}{a}-y\right)e^{ay},$$

$$\bar{E}_{xy}^{(k)}(a,y)=-[a(A_1^{(k)}h_{-1}+A_2^{(k)}y)+(1-2\nu_k)A_2^{(k)}]e^{-ay}+[a(A_3^{(k)}h_{-1}+A_4^{(k)}y)-(1-2\nu_k)A_4^{(k)}]e^{ay},$$

$$\bar{E}_{yy}^{(k)}(a,y)=-[a(A_1^{(k)}h_{-1}+A_2^{(k)}y)+2(1-\nu_k)A_2^{(k)}]e^{-ay}+[-a(A_3^{(k)}h_{-1}+A_4^{(k)}y)+2(1-\nu_k)A_4^{(k)}]e^{ay},$$

$$\bar{E}_{xx}^{(k)}(a,y)=[a(A_1^{(k)}h_{-1}+A_2^{(k)}y)-2\nu_kA_2^{(k)}]e^{-ay}+[a(A_3^{(k)}h_{-1}+A_4^{(k)}y)+2\nu_kA_4^{(k)}]e^{ay} \qquad (13)$$

当第 k 层为材料主轴与坐标轴平行的正交各向异性层($k=7$ 层)时

$$\bar{U}^{(k)}(a,y)=\sum_{j=1}^{4}A_j^{(k)}e^{s_jay},$$

$$\bar{V}^{(k)}(a,y)=\sum_{j=1}^{4}A_j^{(k)}d_je^{s_jay},$$

$$\bar{E}_{xy}^{(k)}(a,y)=\mu_{xy}\left(a\sum_{j=1}^{4}A_j^{(k)}s_je^{s_jay}-a\sum_{j=1}^{4}A_j^{(k)}d_je^{s_jay}\right),$$

$$\bar{E}_{yy}^{(k)}(a,y)=\mu_{12}a\sum_{j=1}^{4}A_j^{(k)}e^{s_jay}+$$

$$_^{22} a \sum_{j=1}^{4} A_j^{(k)} d_j s_j e^{s_j ay} \tag{14}$$

其中 $A_j^{(k)}(j=1,2,3,4)$ 均为 a 的待定函数,

$$d_j = [U_2 s_j^3 - (U_1 U_2 - U_3^2) s_j] / U_3 \tag{15}$$

$s_j(j=1,2,3,4)$ 为方程

$$s^4 + \frac{U_3^2 - U_1 U_2 - 1}{U_2} s^2 + \frac{U_1}{U_2} = 0 \tag{16}$$

的四个根, 且满足 $Re(s_1) > Re(s_2) > 0$, $s_3 = -s_1$, $s_4 = -s_2$。在上两式中

$$U_1 = b_{11}/__{xy},\ U_2 = b_{22}/__{xy},$$
$$U_3 = 1 + b_{12}/__{xy} \tag{17}$$

其中 b_{11}、b_{12}、b_{22} 为 b_{TU} 的分量。

式(13)和式(14)的未知系数 $A_1^{(k)}$、$A_2^{(k)}$、$A_3^{(k)}$、$A_4^{(k)}$ 可由界面连续条件及边界条件确定。对于图 1 的问题, k= - 1, 1～7, 弹性场(12)应满足界面连续条件和边界条件, 在 a 域内即得如下方程组:

$$U^{(1)}(a,0) - U^{(-1)}(a,0) = 0,$$
$$V^{(1)}(a,0) - V^{(-1)}(a,0) = 0,$$
$$\bar{E}_{yy}^{(1)}(a,0) - \frac{\bar{_}_{-1}}{__1} \bar{E}_{yy}^{(-1)}(a,0) = 0,$$
$$\bar{E}_{xy}^{(1)}(a,0) - \frac{\bar{_}_{-1}}{__1} \bar{E}_{xy}^{(-1)}(a,0) = 0 (\text{界面 } y=0 \text{ 处}),$$
$$U^{(k+1)}(a,y) - U^{(k)}(a,y) = U^{(k)}(a,y) - U^{(k+1)}(a,y),$$
$$V^{(k+1)}(a,y) - V^{(k)}(a,y) = V^{(k)}(a,y) - V^{(k+1)}(a,y),$$
$$\bar{E}_{yy}^{(k+1)}(a,y) - \frac{\bar{_}_k}{__{k+1}} \bar{E}_{yy}^{(k)}(a,y) = \frac{\bar{_}_k}{__{k+1}} \tilde{E}_{yy}^{(k)}(a,y) - \tilde{E}_{yy}^{(k+1)}(a,y),$$
$$\bar{E}_{xy}^{(k+1)}(a,y) - \frac{\bar{_}_k}{__{k+1}} \bar{E}_{xy}^{(k)}(a,y) = \frac{\bar{_}_k}{__{k+1}} \tilde{E}_{xy}^{(k)}(a,y) - \tilde{E}_{xy}^{(k+1)}(a,y)$$
$$(k=1,\cdots,6;\ y=y_k),$$
$$\bar{E}_{yy}^{(k)}(a,\infty) = -\tilde{E}_{yy}^{(k)}(a,\infty),$$
$$\bar{E}_{xy}^{(k)}(a,\infty) = -\tilde{E}_{xy}^{(k)}(a,\infty)$$
$$(k=-1,\ y=y_{-1}=h_{-1},\ k=7,\ y=y_7=\infty) \tag{18}$$

方程组(18)共有 4×6+ 4+ 2+ 2= 32 个方程, 未知系数 $A_1^{(k)}$、$A_2^{(k)}$、$A_3^{(k)}$、$A_4^{(k)}$ 共有 4k= 32 个, 故由线性方程组(18)可解得未知系数。代入式(13)和式(14)并求付氏逆变换, 可得解 $u_i^{(k)}$、$e_{ij}^{(k)}$。其中

$$e_{xx}^{(k)}(x,y) = \frac{2b_x}{\pi}\int_0^\infty \{[a(A_1^{(k)} h_{-1} + A_2^{(k)} y) - 2__k A_2^{(k)}] e^{-ay} + [a(A_3^{(k)}) h_{-1} + A_4^{(k)} y) + 2__k A_4^{(k)}] e^{ay}\} \cos ax\, da$$
$$\equiv H_3^{(k)}(x,y) b_x \quad (k=1,6) \tag{19}$$

将求出的 $u_i^{(k)}(x,y)$、$e_{ij}^{(k)}(x,y)$ 及式(4)～式(9)给出的位移、应力值 $u_i^{(k)}(x,y)$、$e_{ij}^{(k)}(x,y)$(这里 k= - 1、1) 代入式(12)即可求出图 1 问题的各层位移、应力 $u_i^{(k)}(x,y)$、$e_{ij}^{(k)}(x,y)$。

从以上求解过程知, 所求位错解已满足边界条件式(3)。对于裂纹边界条件式(2), 代入上面的位错基本解, 利用问题的对称性, 可建立如下奇异积分方程组:

$$\int_{-h_{-1}}^{0} \frac{B_x^{nch}}{y-Y} dY + \int_{-h_{-1}}^{0} K_{1,xx}(y,Y) B_x^{nch}(Y) dY = \frac{\pi(1+T)}{C(1-U^2)} e_{H0}, \quad (-h_{-1} < y < 0) \tag{20}$$

上式中 $B_x^{nch}(y)$ 为基体裂纹面 x= 0 上沿 x 方向的位错密度, 其中正则的积分核 $K_{1,xx}$ 为

$$K_{1,xx}(y,Y) = \frac{T+U^2}{1-U^2}\frac{1}{y+Y} + \frac{T-U}{1+U^2}\frac{2Y}{(y+Y)^2} - \frac{T-U}{1+U}\frac{4Y^2}{(y+Y)^3} - \frac{\pi(1+T)}{C(1-U^2)} H_3^{(1)}(y,Y) \tag{21}$$

这里函数 $H_3^{(1)}$ 由式(19)给出。

2 计算结果与讨论

通过求解离散后的方程组(20)可求出断裂纤维附近的应力场。

高模量断裂纤维邻近的未断裂低模量纤维中的应力集中因子为

$$SCF_L = \frac{e_L}{e_{L0}} = 1 + \frac{(e_{xx})_L}{e_{H0}} \frac{e_{H0}}{e_{L0}} = 1 + \frac{(e_{xx})_L}{e_{H0}} \frac{E_H}{E_L} \tag{22}$$

其中 e_{L0} 与 $(e_{xx})_L$ 分别为无断裂纤维存在时低模量纤维上的轴向应力及存在断裂纤维的情况下由上述模型计算得到的裂纹面前沿低模量纤维中心位置的 e_{xx} 值。同样, 与断裂纤维最邻近的高模量纤维上的应力集中因子为

$$SCF_H = \frac{e_H}{e_{H0}} = 1 + \frac{(e_{xx})_H}{e_{H0}} \tag{23}$$

其中 $(e_{xx})_H$ 为该高模量纤维中心位置的 e_{xx} 值。

首先将计算结果与 Shear-Lag 理论结果作一比

较。根据 Fukuda 与 Chou[2,5]，对于只有单一纤维的非混杂复合材料，断裂纤维最邻近的两层纤维应力集中因子分别为 4/3 和 1.08。作为本文分析的计算特例，不计基体层，即令各层为相同厚度、弹性性质的同一纤维层，最邻近两层纤维的应力集中因子计算值为 1.494 和 1.07。对于混杂复合材料，在文献[2,5]中，引进了一个表征混杂复合材料不同混杂纤维的轴向刚度比的无量纲量 $R = E_L h_L / E_H h_H$，并计算了 $R = 1/3$ 时，近似相应于碳/玻璃混杂复合材料，断裂的高模量纤维邻近低模量、高模量纤维的应力集中因子 $SCF_L = 1.80$、$SCF_H = 1.12$，相应地按本文分析的计算值分别为 $SCF_L = 2.23$、$SCF_H = 1.11$。两种方法计算的最邻近纤维的应力集中值有一定误差，以下计算表明，考虑基体作用时，最邻近纤维应力集中值远小于按 Shear-Lag 理论的计算值。显然，由于 Shear-Lag 理论忽略了基体作用，使得其最邻近纤维的应力集中因子计算值偏大，本文方法则更为精确。

图 3(a)考察了基体的杨氏模量 E_m 对混杂复合材料高低模量层应力集中 SCF 的影响，如上所述，剪滞模型忽略了这种影响。在分析中设 $E_L/E_H = 1$(相应非混杂单一复合材料)和 $E_L/E_H = 1/3$(相应碳/玻璃混杂复合材料)，$h_L/h_H = 1$，$h_m/h_H = 1$，然后分别取 $E_m/E_H = 0.01$、0.02、0.05、0.08、0.1、0.2 计算了邻近断裂纤维的低、高模量纤维上的应力集中因子 SCF_L、SCF_H。结果表明，无论单一或混杂复合材料，邻近断裂纤维的低、高模量纤维上的应力集中计算值都小于按 Shear-Lag 理论的相应值。由图可知，对于非混杂单一复合材料，基体模量变化的影响不大；对于混杂复合材料，当基体模量与纤维模量相差不很大时，对邻近低模量纤维应力集中因子 SCF_L 有一定的影响，只有当 E_m/E_H 比值较小时，邻近低模量纤维应力集中因子 SCF_L 才明显减少，基体模量对纤维应力集中的影响才可以忽略。

图 3(b)考察了基体层厚度 h_m 对应力集中的影响。取 $E_L/E_H = 1$ 和 1/3，$h_L/h_H = 1$，$E_m/E_H = 0.01$，对 $h_m/h_H = 0.01$、0.1、0.05、1、2 分别进行计算。由图知，基体层的厚度或纤维的体积百分比含量对应力集中有不可忽略的影响，随着基体层厚度的增加，低、高模量纤维的应力集中值都大大减小，且远小于 Shear-Lag 理论计算值。

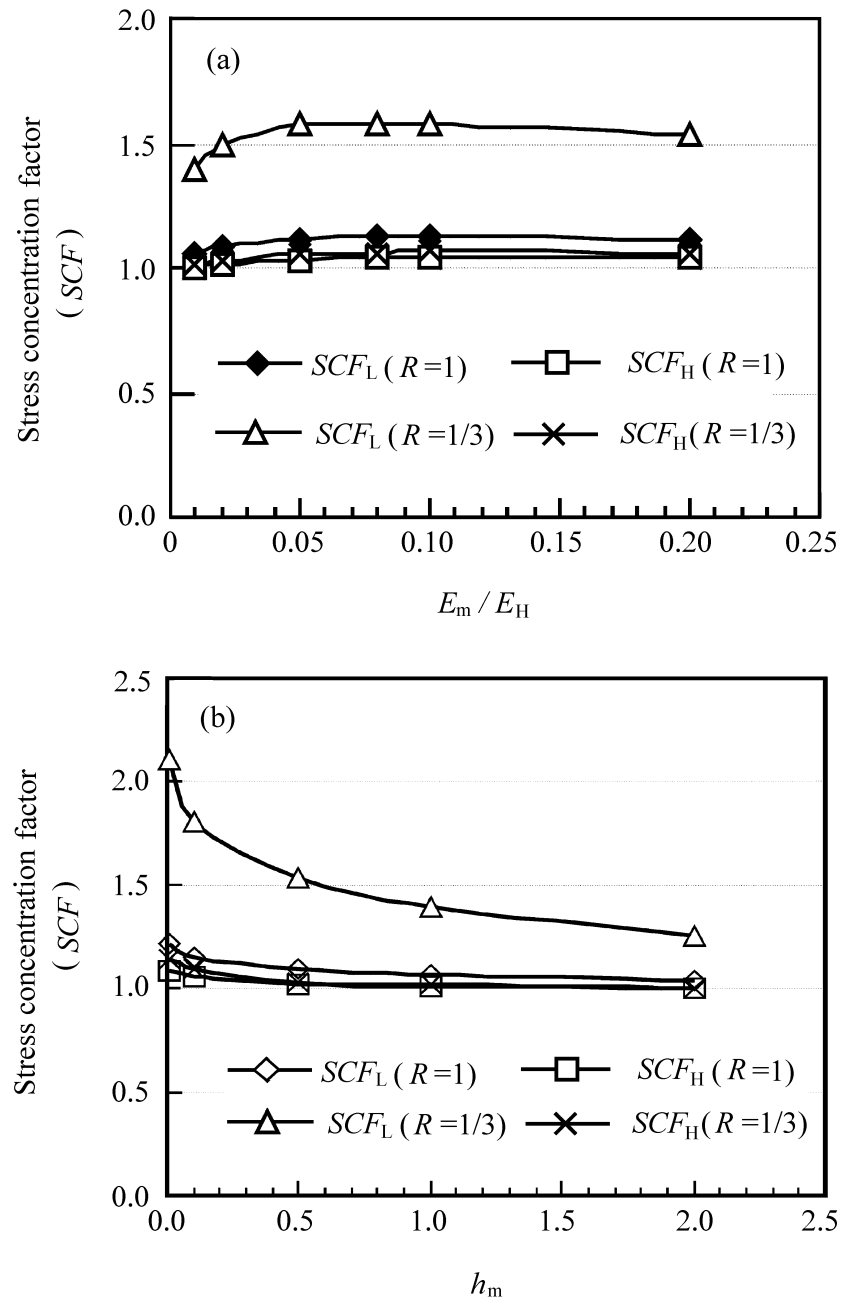

图 3　基体模量和基体厚度对纤维应力集中因子 SCF 的影响

Fig. 3　Effects of matrix modulus E_m and thickness h_m on the stress concentration factor (SCF)

显然，比较图 3(a)、3(b)与 Shear-Lag 理论计算结果易知，由于剪滞模型忽略基体材料抗拉作用，其解仅适用于高纤维体积含量或低 h_m/h_H、E_m/E_H 值的复合材料。

分别取 $E_L/E_H = 1$(相应单一全高模量复合材料)和 1/3(相应混杂复合材料)，$h_L/h_H = 1$，$E_m/E_H = 0.01$，$h_m/h_H = 0.1$，按本文的计算，全高模量的单一纤维复合材料邻近断裂纤维的高模量纤维应力集中因子为 $SCF_H = 1.151$，混杂复合材料最邻近断裂纤维的低、高模量纤维应力集中值为 $SCF_L = 1.811$，$SCF_H = 1.091$。显然混杂复合材料高模量纤维应力集中值比单一高模量复合材料纤维应力集中值减少，而低模量纤维应力集中值相应增加。由于低模量纤维一般都具有高延伸率，不易发生断裂，如果高模量纤维应力集中的减少对复合材料整体强度的影响大于低模量纤维应力集中增加对复合材料强度的影

响,即实现“混杂效应”。

由于一般低模量纤维同时又是高韧性纤维,这种混杂效应有利于提高复合材料的强度。按经典剪滞理论计算的结果[2, 5]也能解释混杂效应,但数值与按本文的二维弹性力学精确解相比有一定的误差,这是由于剪滞模型未能考虑基体作用的影响。

按剪滞理论的分析,由断裂纤维引起的应力集中仅与无量纲量 $R = E_L h_L / E_H h_H$ 值有关。图 4 考察了具有相同 R 值但分别具有不同的 E_L / E_H 与 h_L / h_H 值的混杂复合材料。由图知,虽然 R= 1/3 相同,随着低、高纤维模量比的减小(相应层厚度比增大),邻近低模量纤维应力集中值 SCF_L 增大而高模量纤维应力集中值 SCF_H 逐渐减少,即混杂纤维的模量比和厚度比相差越大,产生的混杂效应越大。

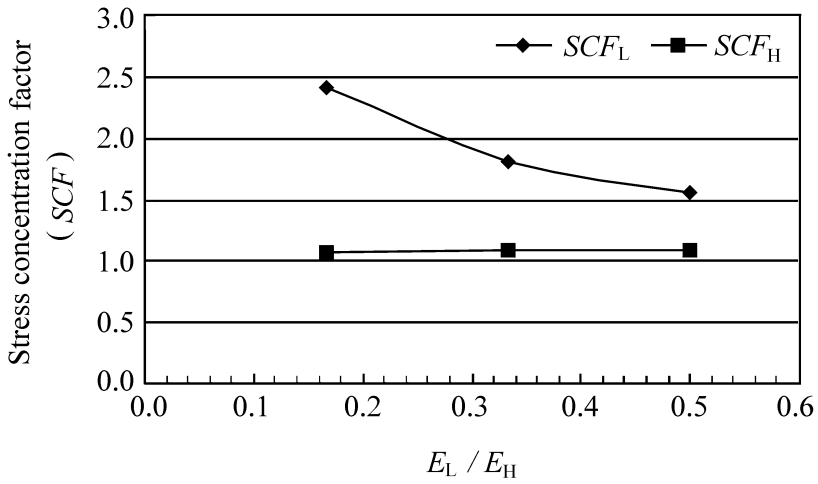

图 4 混杂纤维模量和厚度比对混杂效应的影响

Fig. 4 Effects of hybrid fiber modulus and thickness ratio to the “hybrid effect”

3 结 论

混杂复合材料由于纤维的“混杂效应”而提高了整体强度性能。混杂复合材料基体模量和体积比的增加及高低模量纤维体积比和模量比相差的增大将增加混杂复合材料的“混杂效应”。对于纤维与基体的弹性模量相差不大及低纤维体积含量的复合材料, Shear-Lag 理论不再适用,本文的计算结果可结合混杂复合材料强度的统计分析用于构造混杂复合材料的更一般的纤维失效准则。

参考文献:

[1] Hedgepeth J M. Stress Concentrations in Filamentary Structures [R]. NASA TN D-882, 1961.

[2] Fukuda H, Chou T W. Stress concentrations around a discontinuous fiber in a hybrid composite sheet [J]. Trans Japan Soc Comp Mater, 1981, 7: 37- 42.

[3] Christensen R M. Mechanics of composite materials [M]. John Wiley & Sons Inc, 1979.

[4] Dundurs J. Elastic Interaction of Dislocations with Inhomogeneities [A]. In: Mura T, ed. Mathematical Theory of Dislocations [M]. New York: Am Soc Mech Engng, 1969. 70-115.

[5] Fukuda H, Chou T W. Stress concentrations in a hybrid composite sheet [J]. J Appl Mech, 1983, 50(12): 845- 848.