文章编号: 1000-3851(2004)01-0100-09

含非对称矩形分层的复合材料层合板状态分解-片条合成能量解法

王 平, 孟庆春, 张 行
(北京航空航天大学 航空科学与工程学院 固体力学研究所, 北京 100083)

摘 要: 根据叠加原理将横向载荷作用下的含有非对称矩形内部分层的层板进行状态分解, 从而将分层问题归结为分层表面上的附加剪切载荷作用下层板附加位移与附加应力的分析, 并据此建立一个仅包含分层区的简单的力学模型。进而在分层区中切取平行于边界的无限小的切片, 将切片视为含分层的层合梁, 其位移模态以相应的层合梁的附加位移模态表示。在此基础上构造层板分层区内满足位移边界条件的位移模态, 最后用最小势能原理确定位移幅值的闭合解并且分析了分层区的应力场和能量释放率。

关键词: 复合材料层板; 分层; 附加状态; 片条合成能量解法; 能量释放率
中图分类号: TB331; O343.2 **文献标识码:** A

METHOD OF STATE DECOMPOSITION AND SLICE COMPOSITION ON DISSYMMETRICAL RECTANGULAR DELAMINATION IN COMPOSITE LAMINATE

WANG Ping, MENG Qingchun, ZHANG Xing
(Institute of Solid Mechanics, School of Aeronautics Science and Technology, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: Using the principle of superposition, a laminate with a dissymmetric delamination under transverse loading is divided into symmetric and antisymmetric states, then the delamination problem comes down to analyze additional displacements and stresses under additional loading. According to it, a simple mechanical model can be established which only includes the delamination area. Then infinitesimal slices can be cut parallel to the boundary in the delamination area, the slices can be reduced to laminated beams with a delamination, and their displacements can be expressed by the analytical solutions of additional displacements of the beam. Based on the displacements of slices, one can get the additional displacement modes of the delamination area, which satisfy the boundary conditions. Finally a closed form solution of additional displacement is obtained by the principle of minimum potential energy, then the stress field and the energy release rate are analyzed.

Key words: composite laminates; delamination; additional state; method of composition; energy release rate

复合材料层板容易分层损伤主要是因为层板在横向缺乏增强及其界面连接强度较弱。因此很多外界因素都会引起分层, 例如低能量的冲击[1], 结构的自由边影响[2,3]以及制作过程中的缺陷等等。因为分层很可能发生在结构内部, 很难被探测到, 而且分层会导致结构传递载荷能力的大量损失, 因此, 分层的建模和分析对复合材料层板的安全和有效利用是至关重要的。从而, 力学工作者对分层问题非常关注。Jong C Brewerr 和 Paul A Lagace[4]从理论和实验两方面对分层起始进行了研究, 给出了一个确定分

收稿日期: 2003-01-06; 收修改稿日期: 2003-05-19
基金项目: 航空科学基金项目(98851026)
通讯作者: 孟庆春, 教授, 研究方向为复合力学和断裂力学 E-mail: qcmeng@buaa.edu.cn

层开始的二次应力准则。其提出的二次应力准则是一个平均应力准则, 是对出面层间应力与它们相关的强度参数进行比较得出的。J P Hou, N Petrinic 等[5]在既考虑层间剪切应力又考虑穿透厚度压缩应力的情况下对低能量冲击的层合复合材料的分层进行了研究, 提出了一种改进的分层准则, 在改进的分层准则中, 分层不再仅仅被出面压缩应力所控制, 对层间剪切应力引起的基体破裂和纤维失效也进行了考虑。孟庆春、胡伟平、张行[6, 7]分别应用状态分解-片条合成能量解法和三角级数能量解法分析了含对称矩形内部分层的复合材料层板, 得到了分层区的附加位移场。虽然对分层的研究已经相当深入, 但对含有非对称分层问题的研究还很欠缺。在文献[8]中, 对含非对称分层层合梁做了分析。在此基础上, 笔者将就含非对称矩形分层的情况做进一步研究。

1　分层力学模型的建立

以正交四边简支复合材料层板为例, 其铺层形式为[0°/90°/90°/0°]。该板受横向分布载荷作用。在外层与内层间只在 z 轴正向存在矩形分层区, 如图 1 所示。为了保证安全与便于分析, 假定分层区为真是分层区的外切矩形, 其边界平行于板边界, 边长为 2a, 2b, 外层与内层厚度分别为 $2t_1$ 与 t_2。

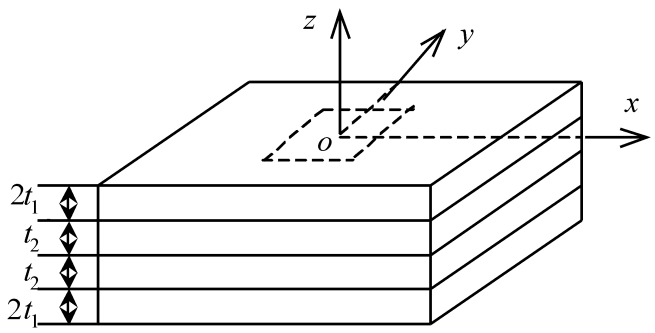


图 1　含非对称矩形分层的复合材料层板

Fig. 1　Composite laminates with an unsymmetrical rectangular delamination

层合板沿 z 方向受到横向载荷的作用。为简单起见, 仅画出 xoz 平面内板的受力状态如图 2 所示。

文中采用与文献[8]中相似的方法, 进行状态分解和建立力学模型, 得到力学模型如图 3 所示(仅画出 xoz 剖面)。

2　附加位移模态的建立

在层板分层区中任取出与坐标平面 xoz 或 yoz 平行、厚度无限小的切片, 则分层区内板的位移模态

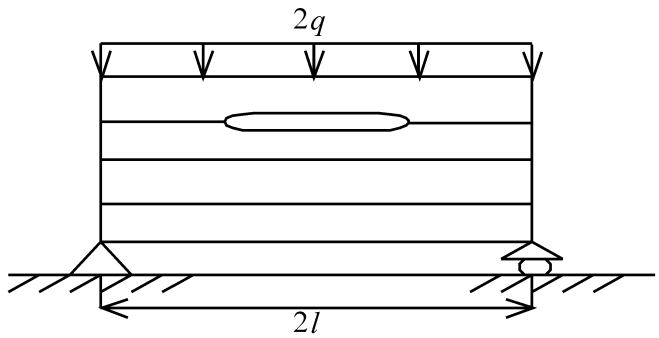


图 2　原始受力状态

Fig. 2　Original loading state

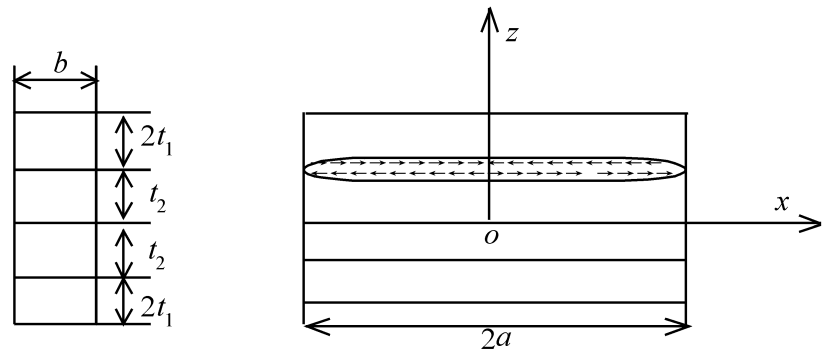


图 3　分层力学模型

Fig. 3　Mechanical model of delamination

可近似用切片的位移来模拟。切片受到两个互垂方向(纵向、横向)的剪切载荷作用。假设在分层面上下两侧切片的变形服从局部平面假设与单向受力假设, 则可将切片看成是层合梁, 按工程梁理论求解其位移。

2.1　切片的附加位移

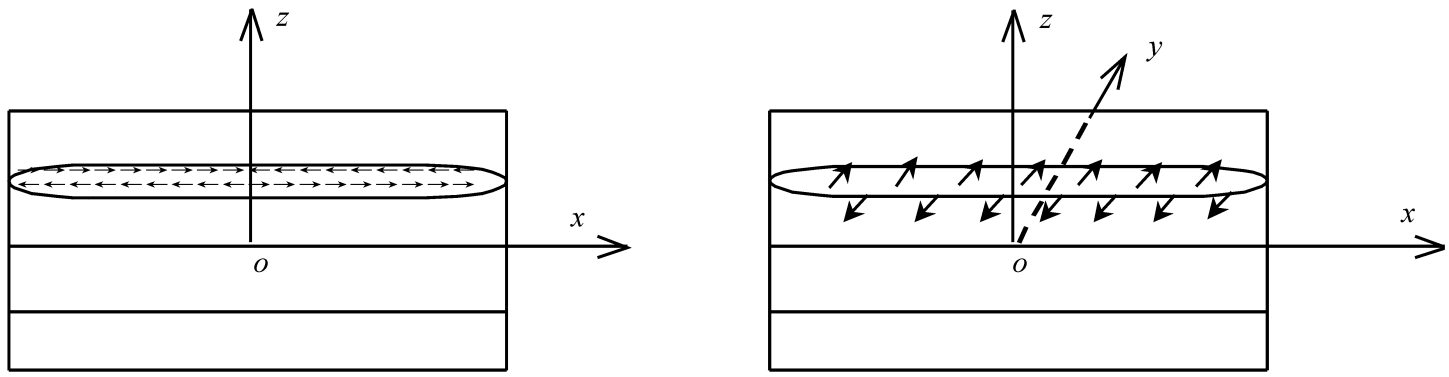
在图 3 中, 取平行于 xoz 平面的切片, 切片的受力状态如图 4 所示。首先分析在分层表面上受到该切片平面内的纵向剪切载荷 $f_x = \lambda_n(\frac{x}{a})^n$ 作用的情况, 如图 4(a) 所示。这种情况属于面内(平面)剪切变形状态。这时切片可以被看作含非对称分层的层合梁, 文献[8]已给出分层表面受纵向剪切载荷情况下的分层上下部的中面面内位移 $u_{10}(x)$、$u_{20}(x)$ 以及挠度 $w(x)$

$$u_{10} = \frac{\lambda_n a^2}{2E_1t_1(n+1)(n+2)}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{n+2} - \frac{x}{a}\right] \quad (1)$$

$$u_{20} = -\frac{\lambda_n a^2}{2(E_1t_1 + E_2t_2)(n+1)(n+2)} \times \left[\left(\frac{x}{a}\right)^{n+2} - \frac{x}{a}\right] \quad (2)$$

$$w = \frac{E_2t_2 + 2E_1t_1}{E_2t_2 + E_1t_1}\,\frac{\lambda_n a^3(t_1 + t_2)}{B(n+1)(n+2)(n+3)} \times \left[\left(\frac{x}{a}\right)^{n+3} - \frac{n+3}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{n+1}{2}\right] \quad (3)$$

其次, 分析切片受垂直切片平面的剪切载荷 $f_y = \lambda_m(\frac{x}{a})^m$ 作用的情况, 如图 4(b) 所示。这种情况



(a) Longitudinal shear loading in a slice　　(b) Transverse shear loading in a slice

图 4　切片的两种受力状态

Fig. 4　Two loading states in a slice

属于出面(反平面)剪切变形状态。在 f_y 的作用下,切片的上下部分将分别产生 y 向弯曲变形。由梁的四阶微分方程和边界条件可得到分层上部中面与下部中面的 y 向位移

$$`_{10} = \frac{__m a^4}{2E_1 I_1 (m+1)(m+3)(m+4)} \times \left[1 - \frac{m+4}{m+2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{2}{m+2}\left(\frac{x}{a}\right)^{m+4}\right] \quad (4)$$

$$`_{20} = -\frac{__m a^4}{2(E_1 I_1 + E_2 I_2)(m+1)(m+3)(m+4)} \times \left[1 - \frac{m+4}{m+2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{2}{m+2}\left(\frac{x}{a}\right)^{m+4}\right] \quad (5)$$

其中: E_1、E_2 分别为 0°,90°层的弹性模量, I_1、I_2 分别为分层上下部惯性矩。

2.2　层板分层区的附加位移模态

分层表面的附加剪切载荷 $f_{zx}(x, y)$ 和 $f_{zy}(x, y)$ 可以由无分层状态 $\langle U_1 \rangle$ 求出,这里视为已知,并将其表示为幂级数形式。为简洁,只对其通项进行分析。设其通项为

$$f_{zx}(x, y) = \wedge_{mp} x^m y^p, \quad f_{zy}(x, y) = __{nq} x^n y^q$$
$$m, n, p, q = 0, 1, 2 \cdots$$

式中: $\wedge_{mp}$、$\wedge_{nq}$ 为已知剪切载荷系数, $x = \frac{x}{a}$, $y = \frac{y}{b}$ 为无量纲坐标。

由于模型是关于 yoz 平面对称的,故只需给出 $x \geq 0$ 部分的位移。下面给出分层区的位移模态。

在图 3 所示的状态中,过原点取 x 方向的切片,该切片的挠度 w(x, 0) 可由式(3)构造,其幅值就是原点处的挠度。再过(x, 0)取 y 方向的切片,由对称性可知此切片的最大挠度为 w(x, 0),则分层区内任一点的挠度为

$$w(x, y) = w_0\left(1 - \frac{m+3}{m+1}x^2 + \frac{2}{m+1}x^{m+3}\right)\left(1 - \frac{q+3}{q+1}y^2 + \frac{2}{q+1}y^{m+3}\right) \quad (6)$$

式中: w_0 为待定参数。

下面构造层合板矩形分层区的面内位移模态。

首先过原点取 x 方向切片,根据式(1)构造此切片分层上部中面的 x 方向面内位移 $u_{10}(x, 0)$

$$u_{10}(x, 0) = u_0(x^{m+2} - x) \quad (7)$$

再过(x, 0)取 y 方向切片,该切片的 x 方向弯曲位移模态由式(4)给出,其幅值即为 $u_{10}(x, 0)$,于是分层区上部中面内任意一点的 x 方向位移为

$$u_{10}(x, y) = u_0(x - x^{m+2}) \times \left(1 - \frac{p+4}{p+2}y^2 + \frac{2}{p+2}y^{p+4}\right) \quad (8)$$

同理,可得到分层区上部中面内任意一点的 y 方向的位移

$$`_{10}(x, y) = `_0(y - y^{q+2}) \times \left(1 - \frac{n+4}{n+2}x^2 + \frac{2}{n+2}x^{n+4}\right) \quad (9)$$

按照同样的方法,构造分层下部中面内任意一点的 x 方向, y 方向的位移

$$u_{20}(x, y) = u_0'(x - x^{m+2}) \times \left(1 - \frac{p+4}{p+2}y^2 + \frac{2}{p+2}y^{p+4}\right) \quad (10)$$

$$`_{20}(x, y) = `_0'(y - y^{q+2}) \times \left(1 - \frac{n+4}{n+2}x^2 + \frac{2}{n+2}x^{n+4}\right) \quad (11)$$

这里, u_0、$`_0$、$u_0'$、$`_0'$ 为待定位移系数。

若先取 y 方向切片再取 x 方向切片,用与上面相同的方法构造挠度模态,得到

$$w(x, y) = w_0\left(1 - \frac{q+3}{q+1}y^2 + \frac{2}{q+1}y^{m+3}\right) \times \left(1 - \frac{m+3}{m+1}x^2 + \frac{2}{m+1}x^{m+3}\right) \quad (12)$$

比较式(6)与式(12),可知无论先取哪个方向的切片,得到的结果是一致的。

在小变形的条件下,根据局部直法线假设,分层上下部分的面内位移为

$$w_0 = \frac{B_3 - A_{13}\dfrac{A_{22}B_1 - A_{12}B_2}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} - A_{23}\dfrac{A_{11}B_2 - A_{12}B_1}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} - A_{34}\dfrac{A_{55}B_4 - A_{45}B_5}{A_{44}A_{55} - A_{45}^2} - A_{35}\dfrac{A_{44}B_5 - A_{45}B_4}{A_{44}A_{55} - A_{45}^2}}{A_{33} + A_{13}\dfrac{A_{12}A_{23} - A_{22}A_{13}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} + A_{23}\dfrac{A_{12}A_{13} - A_{11}A_{23}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} + A_{34}\dfrac{A_{45}A_{35} - A_{55}A_{34}}{A_{44}A_{55} - A_{45}^2} + A_{35}\dfrac{A_{45}A_{34} - A_{44}A_{35}}{A_{44}A_{55} - A_{45}^2}} \tag{19}$$

$$u_1(x,y,z) = u_{10} - \frac{\partial w}{\partial x}(z - t_1 - t_2)$$

$$v_1(x,y,z) = v_{10} - \frac{\partial w}{\partial y}(z - t_1 - t_2)$$

$$u_2(x,y,z) = u_{20} - \frac{\partial w}{\partial x}(z - c)$$

$$v_2(x,y,z) = v_{20} - \frac{\partial w}{\partial y}(z - c) \tag{13}$$

式中: c 为分层下部中面的位置, 在文献[8]中已给出

$$c = -\frac{E_1 t_1(t_1 + t_2)}{E_1 t_1 + E_2 t_2}$$

至此, 构造出了满足分层区位移边界条件的分层区内的位移模态。

3　附加位移幅值的能量解法

在线弹性条件下, 各层的应变与应力分量可表示为:

$$X_{ij}^{(k)} = r_{ij}^{(k)}(x,y)u + s_{ij}^{(k)}(x,y)v + t_{ij}^{(k)}(x,y,z)w \tag{14}$$

$$e_{ij}^{(k)} = c_{ijpq}^{(k)} X_{pq}^{(k)} \tag{15}$$

式中: k 表示层号, $k = 1$ 时, $u = u_0$, $v = v_0$, $w = w_0$, $k \geq 2$ 时, $u = u_0'$、$v = v_0'$、$w = w_0$。将式(12)代入几何方程可确定函数 $r_{ij}^{(k)}(x,y)$、$s_{ij}^{(k)}(x,y)$、$t_{ij}^{(k)}(x,y,z)$。

分层区内层板的应变能与外力势能为(只考虑 $x \geq 0$ 部分)

$$U = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}\int_{V_k} e_{ij}^{(k)} X_{ij}^{(k)} dV_k \tag{16}$$

$$V = -\int_A \{ f_{zx}(x,y)[u_1(x,y,t_2) - u_2(x,y,t_2)] + f_{zy}(x,y)[v_1(x,y,t_2) - v_2(x,y,t_2)]\} dA \tag{17}$$

式中: V_k 为分层区上下层板在 $x \geq 0$ 部分的体积, A 为分层区在 $x \geq 0$ 部分的面积。

根据最小势能原理 $\delta(U + V) = 0$ 可得到关于待定位移参数的线性方程组。

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 & A_{25} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ u_0' \\ v_0' \\ w_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \end{bmatrix} \tag{18}$$

求解得上式(19)

$$u_0 = \frac{(B_1 - A_{13}w_0)A_{22} - (B_2 - A_{23}w_0)A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}$$

$$v_0 = \frac{(B_2 - A_{23}w_0)A_{11} - (B_1 - A_{13}w_0)A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \tag{20}$$

$$u_0' = \frac{(B_4 - A_{34}w_0)A_{55} - (B_5 - A_{35}w_0)A_{45}}{A_{44}A_{55} - A_{45}^2}$$

$$v_0' = \frac{(B_5 - A_{35}w_0)A_{44} - (B_4 - A_{34}w_0)A_{45}}{A_{44}A_{45} - A_{45}^2} \tag{21}$$

式中的系数可直接积分得到。可见, 位移参数的解是闭合的。根据上述闭合解, 由式(6)～式(11)可得到位移模态的闭合解, 并进一步确定其他的力学参量。

4　算　例

设正交复合材料四层板材料为石墨/环氧, 铺设角为[0°/90°/90°/0°], 0°层纤维沿 y 方向。材料常数如下: $E_1 = 53.74$ GPa, $E_2 = 17.95$ GPa, $\nu_{12} = 0.25$, $G_{12} = 8.626$ GPa。载荷取常数项: $f_{zx} = f_{zy} = 1$ MPa, 计算不同情况下的附加位移。

4.1　分层区在 2、3 层之间

图 5 是分层区挠度、分层区上部中面位移、分层区下部中面位移随分层区长宽比的变化, 是在保持分层区面积不变($ab = 400\ mm^2$), 两层厚度取 $2t_1 = t_2 = 1.0$ mm 的情况下得到的。

从图 5(a)中可以看出: 在分层区的面积保持不变, 层板厚度恒定的情况下, 当长宽比等于 1 时, 即当分层区为正方形时分层区的挠度幅值最大。在图 5(b)、图 5(c)中, 当 a/b 较小时, 沿 y 方向的分层区长度较大, 因此 y 方向的中面位移也比较大, 相反此时 x 方向的分层区长度比较小, 所以 x 方向的中面位移很小。当分层区形状一样, 只是方向不同时(例如 a/b = 0.5 与 a/b = 2), 位移并不相同, 这是因为分层区的位移与纤维的取向有关系。此外, 分层区在 2、3 层之间是一种对称情况, 从理论上分析位移也应该出现对称情况, 从图 5(b)、图 5(c)中可以看出计算的结果与理论分析完全一致, 位移的大小一样, 只是方向相反。这可以证明分析计算的过程是正确的。

图 6(a)、图 6(b)、图 6(c)分别为分层区挠度、

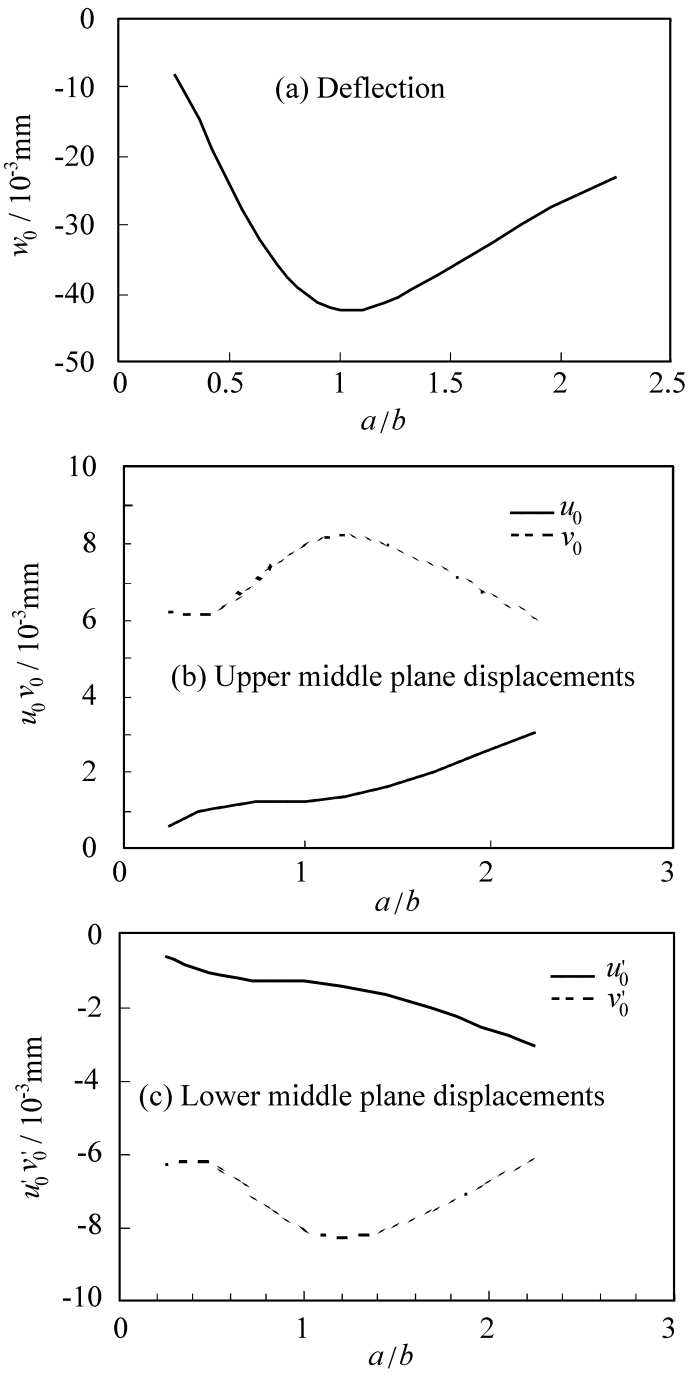


图 5　分层区挠度和分层区两侧中面位移随分层区长宽比的变化

Fig. 5　Deflection and middle plane displacements with respect to aspect ratio of delamination zone

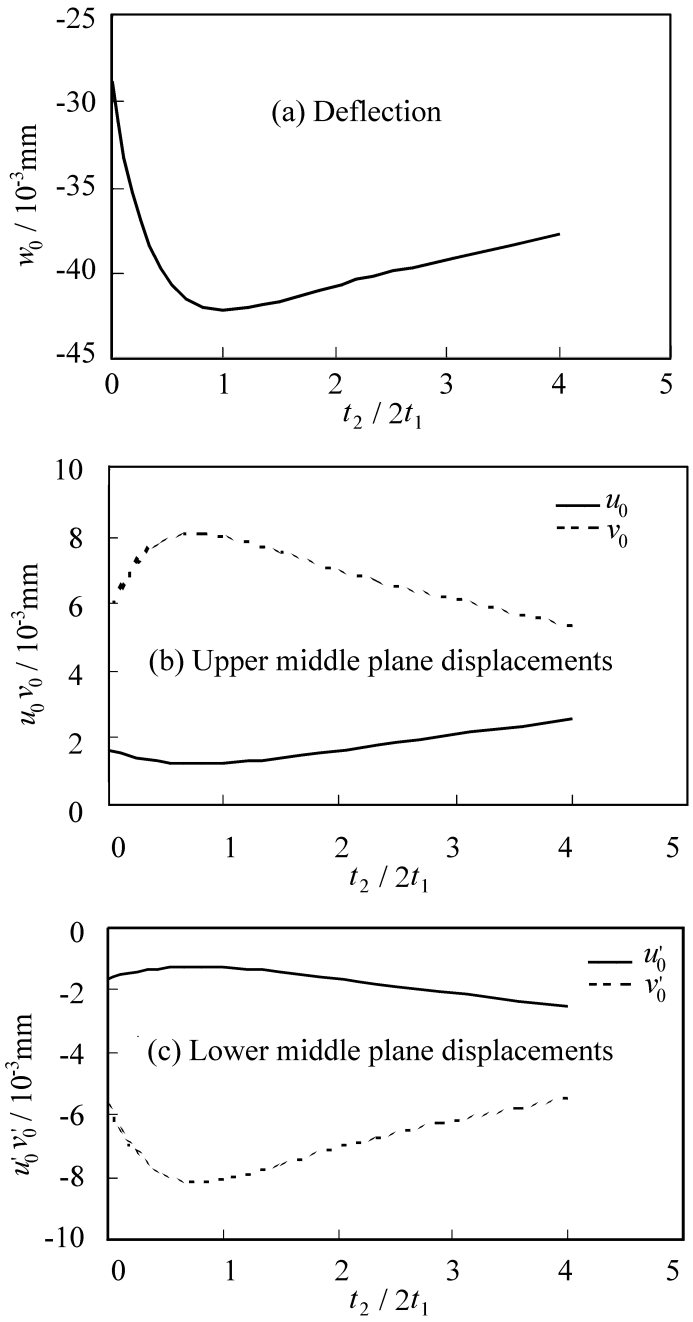


图 6　挠度和分层区两侧中面位移随着层板厚度比的变化

Fig. 6　Deflection and middle place displacements with respect to thickness ratio

分层区上部中面位移、分层区下部中面位移随层合板厚度比的变化，是在保持总厚度不变 $2t_1 + t_2 = 2.0$ mm，分层区的半长宽分别为 a= 20 mm，b= 20 mm 的情况下得到的。

从图 6(a)中可以看出：在总厚度保持不变，分层区长度和宽度保持恒定的情况下，当厚度比为 1 时，分层区的挠度幅值达到最大值。而分层区的上下部中面位移在厚度比等于 1 的地方达到最大值。在分层区处于 2、3 层之间时，从理论上分析，由于对称性，中面位移也应该对称，从图 6(b)、图 6(c)中可以看出这一点。

4.2　分层区在 1、2 层之间

图 7(a)、图 7(b)、图 7(c)分别是分层区挠度、分层区上部中面位移、分层区下部中面位移随长宽比的变化，是在保持分层区面积不变(ab= 400 mm^2)，两层厚度取为 $2t_1 = t_2 = 1.0$ mm 的情况下得到的。

从图 7(a)中也可以看出：在分层区的面积保持不变，层板厚度恒定的情况下，当长宽比等于 1 时，即当分层区为正方形时分层区的挠度幅值最大。当 a/b 较小时，x 方向位移较小，y 方向位移则较大，这是因为在这种情况下，分层区沿 y 方向柔度较大。此外，由于分层区处在非对称位置，所以分层上下部中面位移并没有出现相似性。

图 8(a)、图 8(b)、图 8(c)分别为分层区挠度、分层区上部中面位移、分层区下部中面位移随层合板厚度比的变化，是在保持总厚度不变 $2t_1 + t_2 = 2.0$ mm，分层区的半长、宽分别为 a= b= 20 mm 的情况下得到的。从图 8(a)中可以看出：当分层区处于非对称情况时，挠度不在当厚度比等于 1 时达到最大值。此外，分层区上下部的中面位移随厚度比的

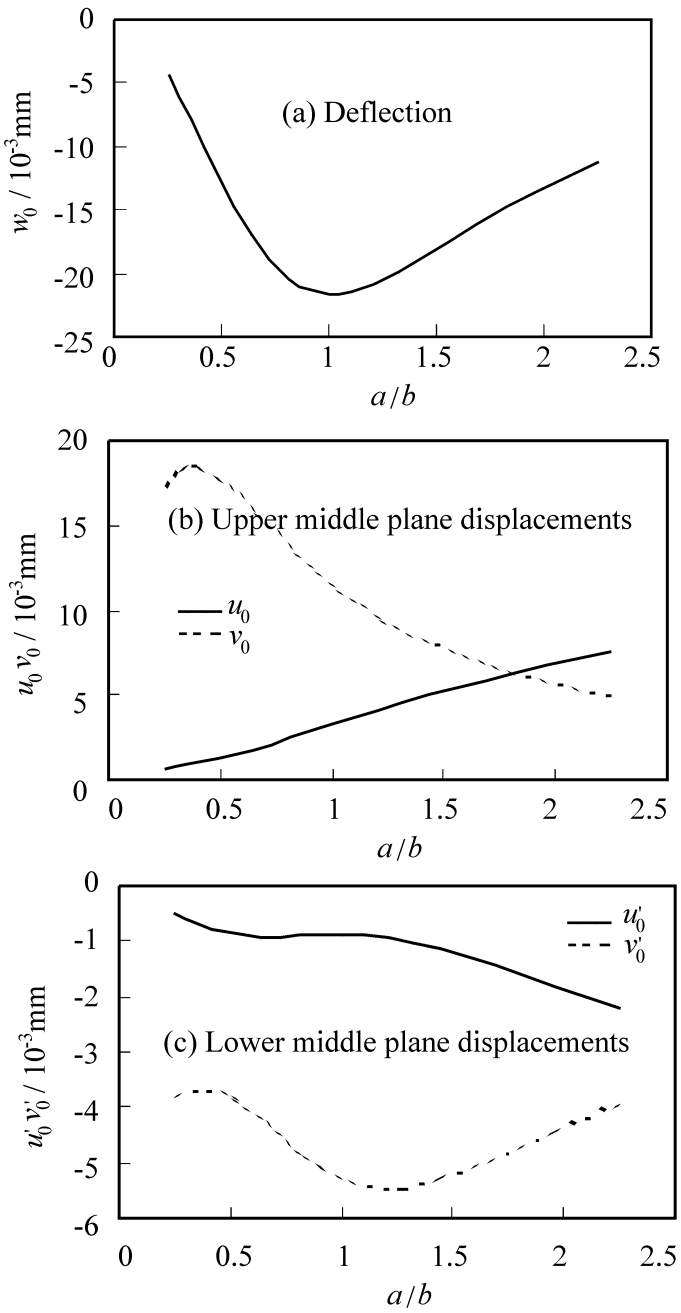


图 7　分层区挠度和分层区两侧中面位移随分层区长宽比的变化

Fig. 7　Deflection and middle plane displacements with respect to aspect ratio of delamination zone

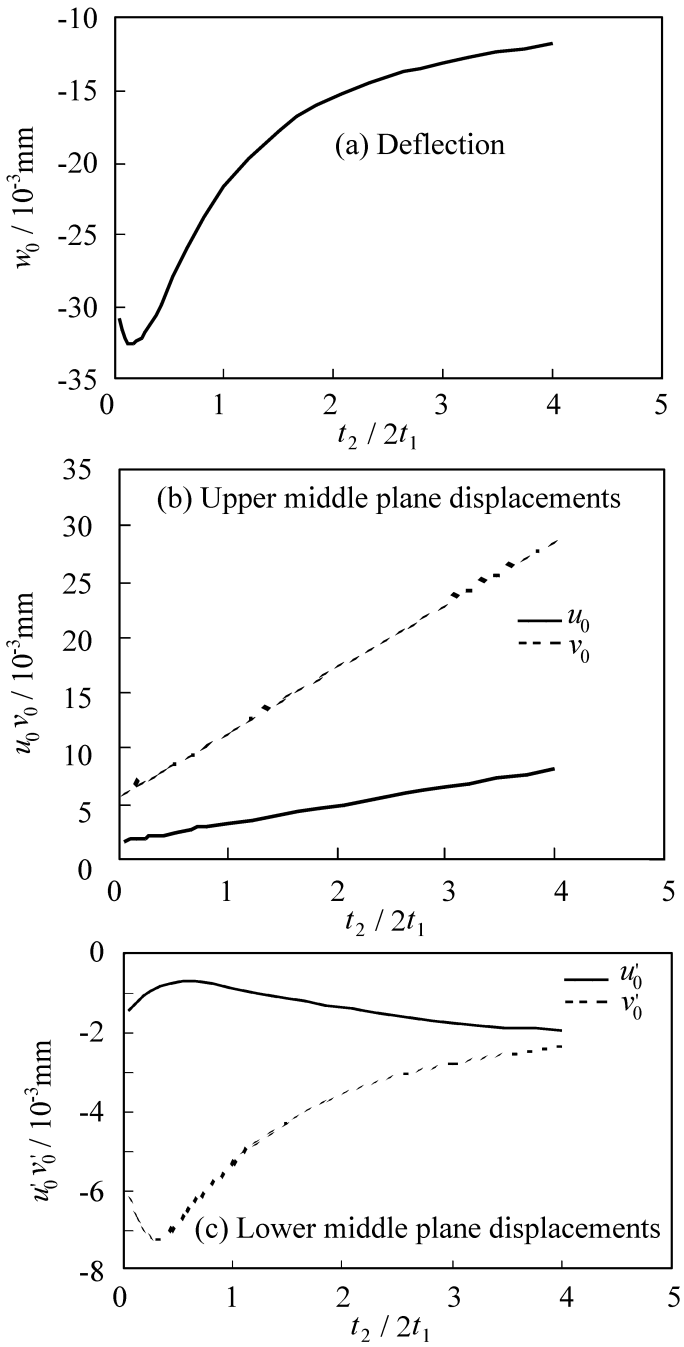


图 8　挠度和分层区两侧中面位移随着层板厚度比的变化

Fig. 8　Deflection and middle place displacements with respect to thickness ratio

变化趋势完全不一样。但当 $t_2/2t_1=0$ 这种极限情况时，又是一对称情况，分层区上下部位移也应该对称，从图 8(b)、图 8(c) 看，计算结果完全符合理论分析。

5　应力分析

得到位移闭合解后，可以进行应力分析。

仍然采用位移分析时的层板铺层形式和载荷状态，取 $a=b=20$ mm，$2t_1=t_2=1$ mm 分析分层区上、下部的应力场。先分析分层区上部层板的应力场。

图 9 为分层区上部 $z=t_2$ 面内 e_{11} 的分布。可以看出，e_{11} 在 $(x=0, y=0)$ 处达到最大值。图 10 给出了分层区上部 $(x=0, y=0)$ 处应力 e_{11} 随着 z 的变化。从图 9、图 10 可知：在分层区上部 e_{11} 在 $(x=0, y=0, z=t_2)$ 处的值最大。同理，可以知道 e_{22} 在 $(x=0, y=0, z=t_2)$ 处的值最大，f_{12} 在 $(x=10$ mm, $y=10$ mm, $z=t_2)$ 处的值最大。下面分析这些位置的应力随着分层区长宽比和层板厚度比的变化。

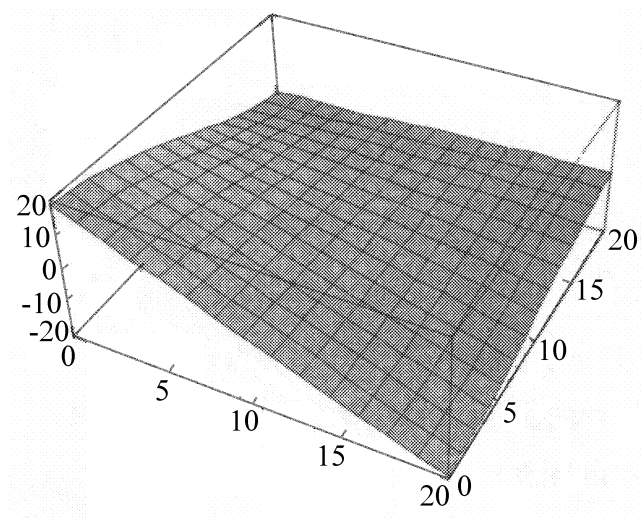


图 9　分层区上部 $z=t_2$ 面内 e_{11} 的分布

Fig. 9　Stress e_{11} distribution in $z=t_2$ area

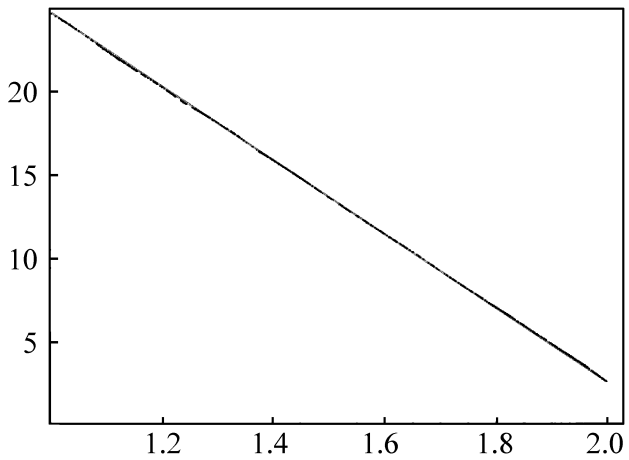


图 10　分层区上部(x= 0, y= 0)处应力 e_{11}随着 z 的变化

Fig. 10　Stress e_{11} at (x= 0, y= 0) with respect to z (above delamination area)

从图 11(a)中可以看出: 应力随着分层区长宽比变化的变化趋势完全一致, 均随着 a/b 的增大先增大后减小, 在 a/b= 1 处达到最大值, 只是大小不等, 在任意一点 e_{11}大于 e_{22}; 而 e_{11}、e_{22}随着层板厚度比 $2t_1/t_2$ 的增大先减小后增大, 在 $2t_1/t_2$= 1 处达到最小值(图 11(b)), 而且当 $2t_1/t_2$ 趋向比较大的值时, e_{11}、e_{22}基本保持不变。图 12 是分层区上部(x= 10 mm, y= 10 mm, z= t_2)处的应力随着分层区长宽

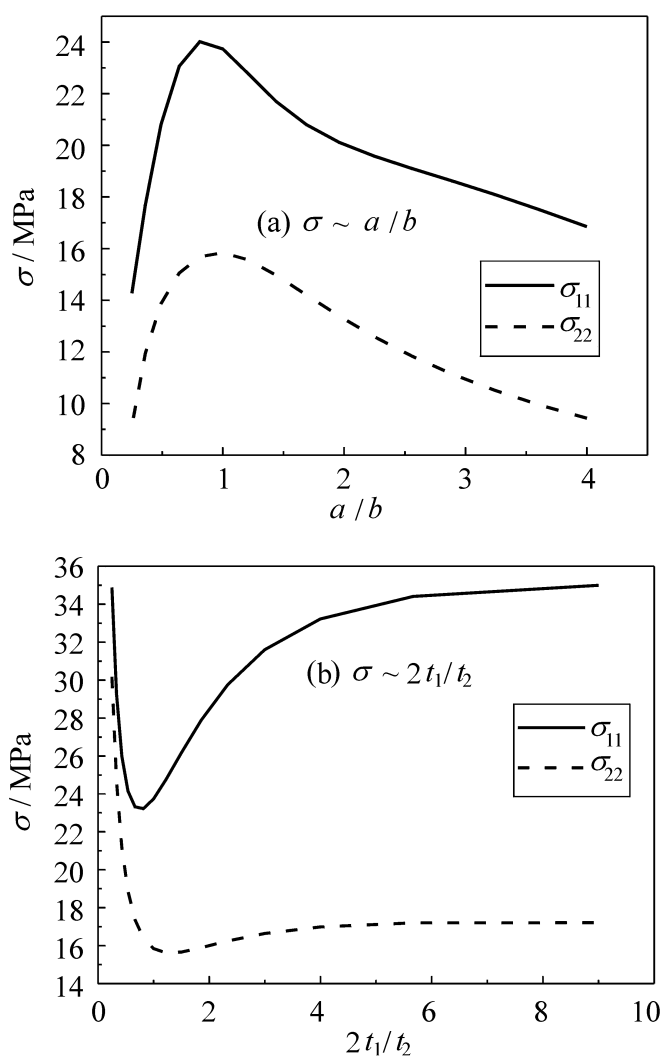


图 11　分层区上部(x= 0, y= 0, z= t_2)处的应力 e_{11}、e_{22}随着分层区长宽比和厚度比的变化

Fig. 11　Stress at (x= 0, y= 0, z= t_2) with respect to aspect ratio of delamination zone and thickness ratio (above delamination area)

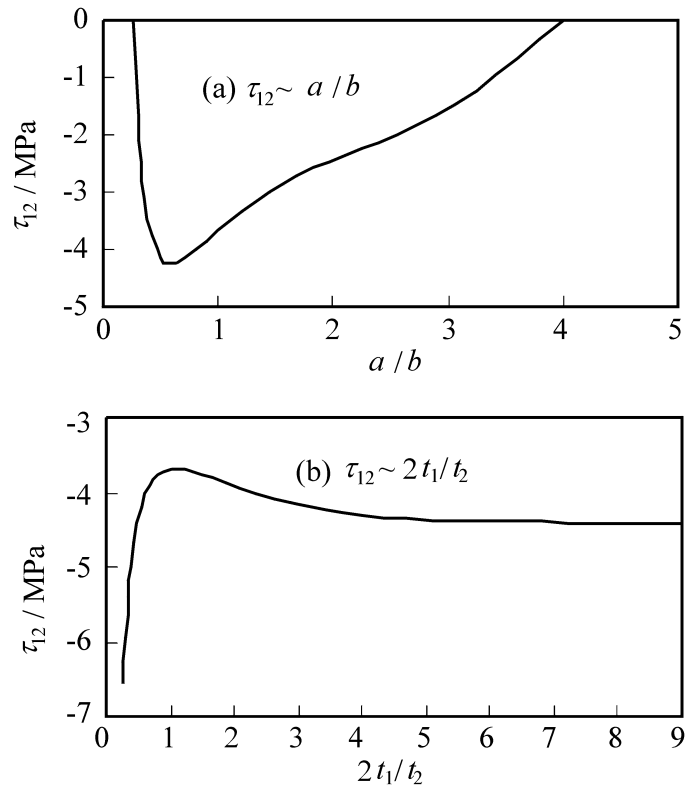
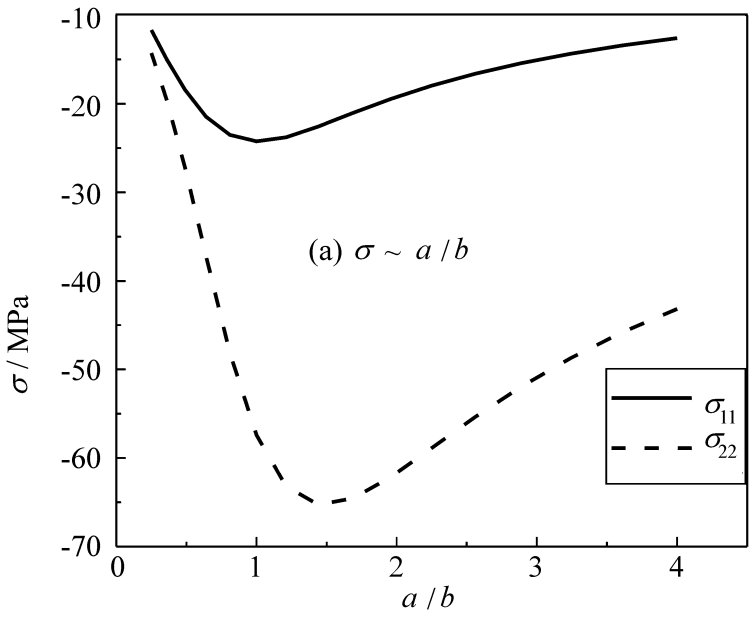


图 12　分层区上部(x= 10 mm, y= 10 mm, y= t_2)处的应力 f_{12}随着分层区长宽比和厚度比的变化

Fig. 12　Stress f_{12} at (x= 10 mm, y= 10 mm, y= t_2) with respect to aspect ratio of delamination zone and thickness ratio(above delamination area)

比和层板厚度比的变化。从图 12(a)可以看出: f_{12}的值随着 a/b 的增大先增大后减小, 当 a/b= 0.25 和 a/b= 4 时 f_{12}= 0, f_{12}在 a/b= 1 时达到最大值。而从图 12(b)中可以看出: f_{12}随着 $2t_1/t_2$ 的增大先减小后增大, 在 $2t_1/t_2$= 1 处达到最小值, 而且当 $2t_1/t_2$ 趋向比较大的值时, f_{12}基本保持不变。

利用同样的分析方法, 可以知道分层区下部的应力 e_{11}、e_{22}在(x= 0, y= 0, z= t_2)处达到最大值, f_{12}在(x= 10 mm, y= 10 mm, z= t_2)处达到最大值。图 13(a)给出了分层区下部(x= 0, y= 0, z= t_2)处的应力 e_{11}、e_{22}随着分层区长宽比的变化。e_{11}随着分层区长宽比 a/b 的增大先增大后减小, 在 a/b= 1 处达到最大值, e_{22}随着分层区长宽比 a/b 的增大也是先增大后减小, 但是其值不在 a/b= 1 处达到最大值, 而是在 a/b≈1.5 处达到最大值。此外 e_{22}远大于 e_{11}。图 13(b)给出了分层区下部(x= 0, y= 0, z= t_2)处的应力 e_{11}、e_{22}随着层板厚度比的变化。e_{11}随着层板厚度比 $2t/t_2$ 的增大先增大后减小, 在 $2t/t_2$≈2.5 处达到最大值, e_{22}随着层板厚度比 $2t/t_2$ 的增大也是先增大后减小并且在 $2t/t_2$≈2.5 处达到最大值。随着 $2t/t_2$ 趋向于无穷大, e_{11}和 e_{22}趋向于定值。图 14(a)、图 14(b)分别给出了分层区下部(x= 10 mm, y= 10 mm)处的应力 f_{12}随着分层区长宽比和层板厚度比的变化。f_{12}随着分层区长宽比 a/b 的增大先增大后减小,



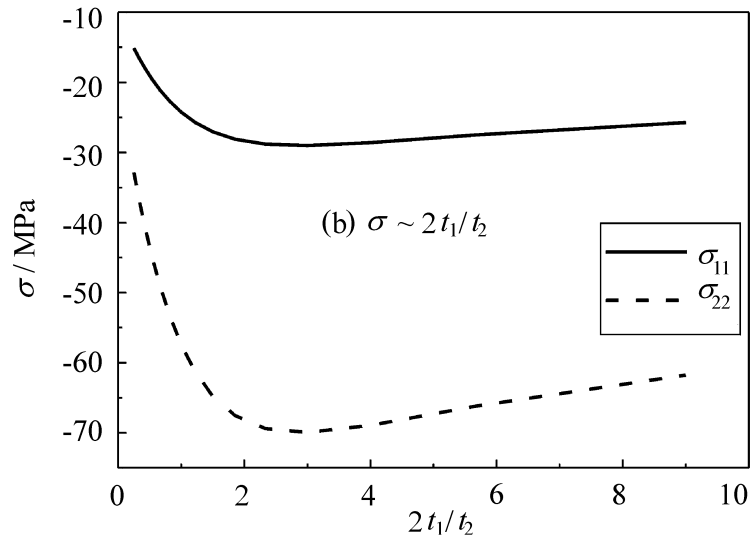


图 13　分层区下部($x=0, y=0, z=t_2$)处的应力 e_{11}、e_{22}随着分层区长宽比和厚度比的变化

Fig. 13　Stress at ($x=0, y=0, z=t_2$) with respect to aspect ratio of delamination zone and thick ness ratio (below delamination area)

在 $a/b=1$ 处达到最大值, 并且当 $a/b=0.25$ 和 $a/b=4$ 时其值等于 0。f_{12}随着层板厚度比 $2t/t_2$ 的增大先增大后减小, 在 $2t/t_2=2$ 处达到最大值。

6　分层区按比例扩展时的能量释放率

根据式(16)分层区的应变能表达式为

$$U(a,b)=4\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5}A_{ii}w_{0i}^2+\sum_{i=2}^{5}A_{1i}w_{0i}w_{01}+\sum_{i=3}^{5}A_{2i}w_{0i}w_{02}+\sum_{i=4}^{5}A_{3i}w_{0i}w_{03}+A_{45}w_{05}w_{04}\right] \quad (22)$$

而外力势能可以表示为

$$V(a,b)=-4\sum_{i=1}^{5}B_iw_{0i} \quad (23)$$

分层区的总势能为

$$C=U+V \quad (24)$$

分层区的能量释放率为

$$G=-\frac{dC}{dA}=-\frac{1}{4}\frac{\frac{5C}{5a}da+\frac{5C}{5b}db}{adb+bda} \quad (25)$$

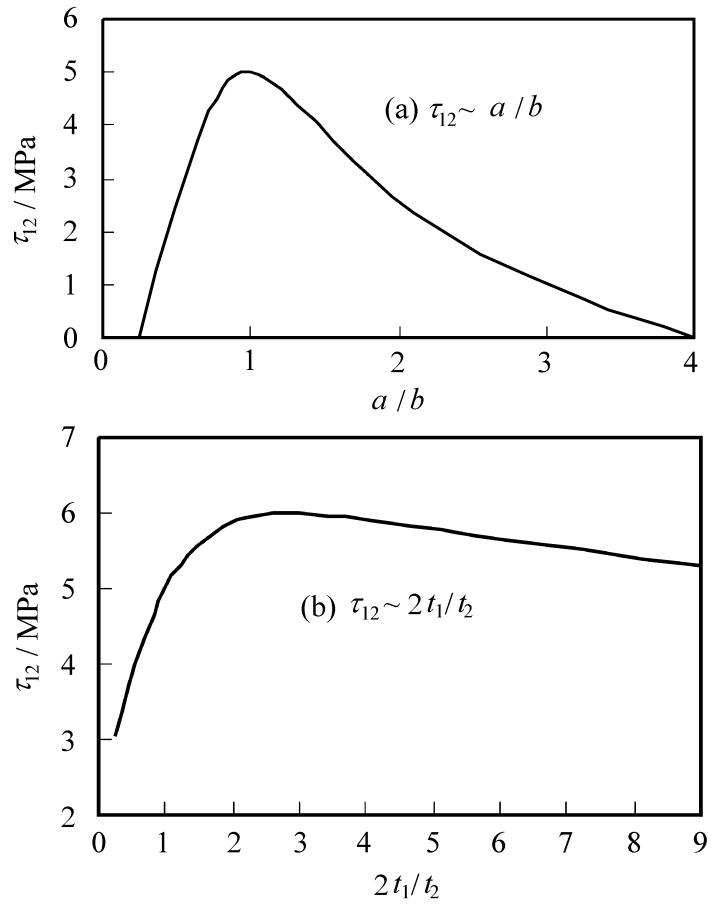


图 14　分层区下部($x=0, y=0, z=t_2$)处的应力 f_{12}随着分层区长宽比和厚度比的变化

Fig. 14　Stress f_{12} at ($x=0, y=0, z=t_2$) with respect to aspect ratio of delamination zone and thickness ratio (below delamination area)

假设分层区按比例扩展, 则有

$$da=adf,\ db=bdf \quad (26)$$

由以上两式则得到分层区按比例扩展时的能量释放率

$$G=-\frac{1}{4}\frac{\frac{5C}{5a}a+\frac{5C}{5b}b}{2ab} \quad (27)$$

仍然采用位移分析时的层板铺层形式和载荷状态, 下面给出当 $2t_1=t_2=1.0$ mm, $ab=400$ mm^2 时能量释放率 G 随分层区长宽比 a/b 的变化(如图 15(a)所示)和当 $a=b=20$ mm, $2t_1/t_2$ 时能量释放率 G 随层板厚度比 $2t_1/t_2$ 的变化(如图 15(b))

从图 15(a)中可以看出: 能量释放率 G 随分层区长宽比 a/b 的增大先增大后减小。在 $a/b=0.25\sim1$ 之间时, 能量释放率 G 随 a/b 的变化比较剧烈, 而在 $a/b=1\sim2$ 之间时, 能量释放率 G 随 a/b 的变化则比较平缓。当 $a/b=0.8$ 时, 能量释放率 G 达到最大值。从图 15(b)中可以看出: 能量释放率 G 随着层板厚变化随 $2t_1/t_2$ 的变化, 即 着 $2t_1/t_2$ 的增大, 能量释放率 G 先减小后增大, 在 $2t_1/t_2=0.8$ 时达到最小值。当 $2t_1/t_2$ 趋向于比较大的值时, 能量释放率 G 随着 $2t_1/t_2$ 的变化基本上没有变化。

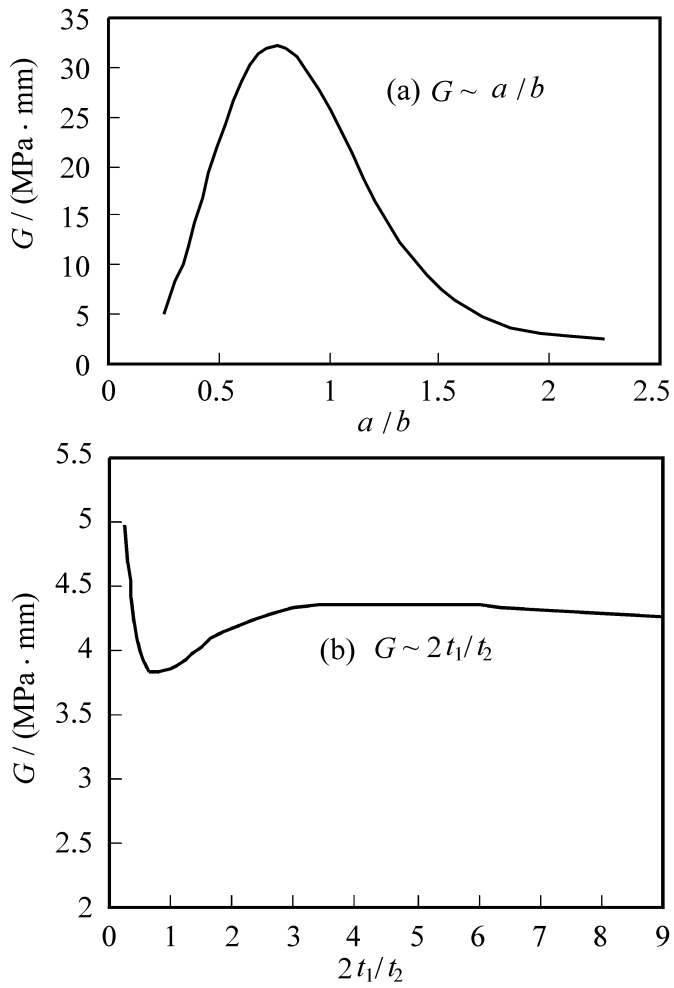


图 15　能量释放率 G 随分层区长宽比以及层板厚度比的变化

Fig. 15　Energy release rate G with respect to aspect ratio and thickness ratio

7　结　论

(1) 采用了状态分解将复合材料层合板的分层问题归结为分层区表面只受附加剪切载荷时的受力状态的分析,从而简化了对问题的求解。

(2) 采用片条合成方法构造了形式简单的附加位移,并用能量法得到了闭合解;并对分层区的应力场进行了分析,最后得到了能量释放率。

参考文献:

[1] Greszezuk L B. Damage in composite materials due to low-velocity impact [A]. In: Impact Dynamics [C]. Wiley, New York, 1982. 55.

[2] Spilker R L. Edge effect in symmetric composite laminates: importance of satisfying the traction-free-edge condition [J]. Journal of Composite Materials, 1980.

[3] 夏　火昆,张　行. 复合材料层板层间应力分析的能量解法,复合材料学报, 1986, 3(1): 45- 53.

[4] Brewer J C, Lagace P A. Quadratic Stress Criterion for Initiation of Delamination [J]. Journal of Composite Materials, 1988, 22:

[5] Hou J P, Petrinic N. A delamination criterion for laminated composites under low-velocity impact [J]. Composites Science and Technology, 2001(61): 2069- 2074.

[6] 孟庆春,胡伟平,张　行. 含矩形内部分层的复合材料层板的状态分解-片条合成能量解法. 复合材料学报, 1999, 16(3): 118 - 123.

[7] 孟庆春,胡伟平,张　行. 含内部分层复合材料层板的三角级数能量解法。复合材料学报, 1998, 15(3): 113- 118.

[8] 王　平,孟庆春,张　行. 复合材料层合梁非对称分层问题的解析解法,复合材料学报, 2004, 21(1): 95- 99.

[9] 白　静,孟庆春,张　行. 复合材料层合板三维分层问题的断裂力学分析,复合材料学报, 2002, 19(3): 75- 82.