复 合 材 料 学 报　　第22 卷　第5 期　10 月　2005 年
Acta Materiae Compositae Sinica　　Vol. 22　No. 5　October　2005

文章编号: 1000-3851(2005) 05-0184-06

双周期电磁弹性纤维增强复合材料的纵向剪切问题

谢新亮，肖俊华，蒋持平*

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院 固体力学研究所，北京100083)

摘　要:　利用等效夹杂法并结合双(准)周期解析函数理论，为双周期电磁弹性圆截面纤维复合材料的纵向剪切问题发展了实用有效的解析方法，获得了全场的级数解，给出了应力、电位移和磁感应强度的显式结果。利用数值算例讨论了该类非均匀材料微结构对其电磁弹性性能的影响。本文方法为电磁弹性复合材料的性能分析和微结构设计提供了一个实用有效的计算工具。

关键词:　电磁弹性复合材料; 等效夹杂法; 双周期; 细观力学

中图分类号:　TB 330. 1; O 343. 7　　**文献标识码:** A

PROBLEMS OF MAGNETOELECTROELASTIC COMPOSITES WITH DOUBLY PERIODIC FIBERS UNDER LONGITUDINAL SHEAR

XIE Xinliang, XIAO Junhua, JIANG Chiping*

(Institute of Solid Mechanics, School of Aeronautics Science and Engineering,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract:　An analytical method for the longitudinal shear problem of magnetoelectroelastic composites with double periodically distributed cylindrical fibers is presented by means of the Eshelby's effective inclusion method, combining the theory of doubly periodic and quasi-periodic analytical functions. The solution in series is obtained. And explicit expressions for the stress, electric displacement and magnetic induction are derived. The influences of microstructure of such heterogeneous materials on its magnetoelectroelastic properties were discussed by the numerical examples. The present method provides an efficient tool for analyzing the magnetoelectroelastic properties and designing microstructure of composite materials.

Keywords:　magnetoelectroelastic composites; effective inclusion method; double period; micromechanics

随着信息工业发展与智能材料和结构高新技术的进步，电磁弹性复合材料成为工程和力学界的一个热点研究问题。电磁弹性复合材料具有优越的电磁系数和电磁耦合效应，且能很好地适应内部和周围的环境变化。自从1974 年 Van Run[1] 提出了压电和压磁材料结合将导致出新的材料特性—电磁耦合效应以来，许多的学者开始进行这方面的研究。近几年这类问题进一步从理论上得到深入研究，如 Harshe[2]、Avellaneda 和 Harshe[3]、Wu 和 Huang[4] 等人作了许多的工作，其中 Wu 和 Huang 给出了电磁耦合效应封闭解的方法。张敬周等[5] 研究了电磁弹性复合材料双圆柱夹杂问题。刘金喜等[6] 得到了横观各向同性电磁弹性固体耦合方程的一般解。关群等[7] 研究了压电、压磁及电磁耦合弹性介质材料弹性常数与工程材料常数之间的关系。张晓宁等[8] 提出具有复合介质夹层屏蔽结构模型的设想，设计了单层屏蔽结构与复合夹层屏蔽结构的对比实验，测试了复合夹层屏蔽结构的电磁屏蔽效能增量，并用 Вагопин 多层电磁屏蔽理论公式进行了验证。林云等[9] 研究了在高频微波下高分子磁体/ TiO_2 复合缩波材料的电磁参数变化。由于数学分析的困难，目前只对无限基体中单根电磁弹性纤维的问题得到了解析解，而对多纤维的复合材料一般采用近似或数值方法。复合材料设计通常是设计(周期分布的)材料胞元，但是由于预报材料力学性质时，通常只能对胞元近似应用均匀位移边界条件或均匀应力边

收稿日期: 2004-10-26; 收修改稿日期: 2005-04-11
基金项目: 航空科学基金资助项目(04G51050)
通讯作者: 蒋持平，教授，研究方向为复合材料力学、断裂与损伤力学　E-mail: jiangchiping@buaa.edu.cn

界条件。已经证明前者高估了材料的有效模量，而后者低估了材料的有效模量，并且违反了各胞元边界应力分布的周期性[10]，这样的解答也难以给出精确的局部应力分析，给材料的强度设计造成困难。

本文中将利用双周期和双准周期解析函数理论并结合力学等效夹杂原理，为双周期电磁弹性复合材料分析发展实用有效的新的解析方法，以期用于这类复合材料的设计计算及安全性评估。

1 问题描述

如图1 所示，在双周期分布的电磁弹性复合材料中，取基本胞元 P_{00} 进行研究，设坐标原点取在 P_{00} 的中心，用 2ω 和 2ω 表示两个基本周期，基本胞元 P_{00} 四个顶点分别为 $\omega+\omega$、$-\omega+\omega$、$-\omega-\omega$ 和 $\omega-\omega$。P_{00} 中用 L_0 表示电磁弹性圆柱夹杂的边界，且在界面处理想联结，S^+ 表示夹杂内区域，S^- 表示基体区域。夹杂与基体的弹性、介电、磁渗、压电、压磁和电磁系数分别为 C_{44}^I、ε_1^I、μ_1^I、e_{15}^I、q_{15}^I、d_{11}^I 和 C_{44}^M、ε_1^M、μ_1^M、e_{15}^M、q_{15}^M、d_{11}^M，远场作用的纵向切应力为 τ_{xz}^∞、τ_{yz}^∞，均匀面内的电场为 E_x^∞、E_y^∞，均匀面内的磁场强度为 H_x^∞、H_y^∞。设 D_x 和 D_y 表示电场位移，B_x 和 B_y 表示磁感应强度。

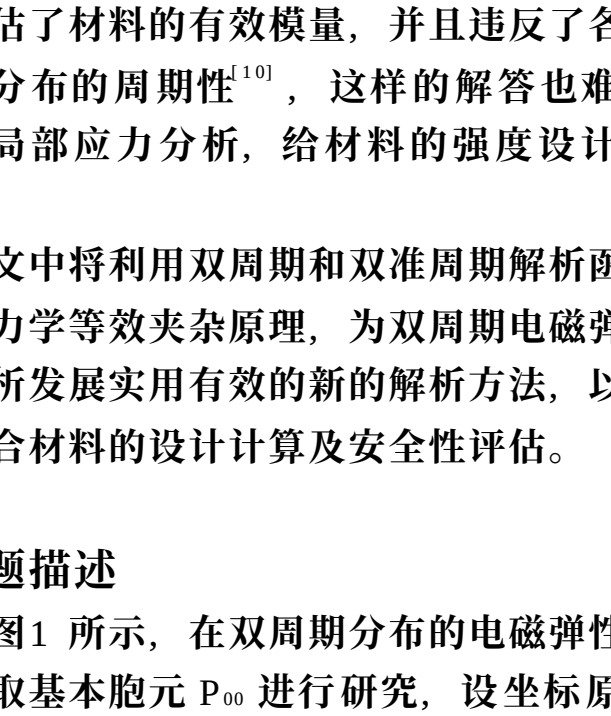

图1 无限介质中双周期圆柱夹杂

Fig. 1 A doubly periodic array of cylindrical inclusions in an infinite solid

2 分析与解答

2.1 基本方程

根据文献[11]，电磁弹性材料的本构方程为

$$\begin{bmatrix}\tau_{xz}\\ D_x\\ B_x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{44} & e_{15} & q_{15}\\ e_{15} & -\varepsilon_1 & -d_{11}\\ q_{15} & -d_{11} & -\mu_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial w}{\partial x}\\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x}\\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x}\end{bmatrix}=C\begin{bmatrix}\dfrac{\partial w}{\partial x}\\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x}\\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x}\end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix}\tau_{yz}\\ D_y\\ B_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{44} & e_{15} & q_{15}\\ e_{15} & -\varepsilon_1 & -d_{11}\\ q_{15} & -d_{11} & -\mu_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial w}{\partial y}\\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y}\\ \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\end{bmatrix}=C\begin{bmatrix}\dfrac{\partial w}{\partial y}\\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y}\\ \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\end{bmatrix} \tag{2}$$

场支配方程为

$$\begin{aligned}\tau_{xz,x}+\tau_{yz,y}&=0\\ D_{x,x}+D_{y,y}&=0\\ B_{x,x}+B_{y,y}&=0\end{aligned} \tag{3}$$

将式(1)和式(2)代入式(3)可以得到

$$C\begin{bmatrix}\nabla^2 w\\ \nabla^2\phi\\ \nabla^2\psi\end{bmatrix}=0 \tag{4}$$

式中 w、φ和 ψ均为调和函数，可以分别用解析函数 F(z)、V(z) 和 $\Phi(z)$ 表示

$$\begin{aligned}w&=\mathrm{Re}\,F(z)=\frac{1}{2}[F(z)+\overline{F(z)}]\\ \phi&=\mathrm{Re}\,V(z)=\frac{1}{2}[V(z)+\overline{V(z)}]\\ \psi&=\mathrm{Re}\,\Phi(z)=\frac{1}{2}[\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}]\end{aligned} \tag{5}$$

其中 Re 表示取实部。

将式(5)代入式(1)和式(2)，有

$$\begin{bmatrix}\tau_{xz}-i\tau_{yz}\\ D_x-iD_y\\ B_x-iB_y\end{bmatrix}=C\begin{bmatrix}\dfrac{dF}{dz}\\ \dfrac{dV}{dz}\\ \dfrac{d\Phi}{dz}\end{bmatrix} \tag{6}$$

为后面分析方便，定义应力、电位移和磁感应强度沿任意弧段 AB 的积分

$$T_\tau=-\int_A^B(\tau_{yz}dx-\tau_{xz}dy)$$

$$=\mathrm{Im}[C_{44}F(z)+e_{15}V(z)+q_{15}\Phi(z)]_A^B$$

$$T_D=-\int_A^B(D_y dx-D_x dy)$$

$$= \mathrm{Im}[\,e_{15}F(z) - \varepsilon_1 V(z) - d_{11}\Phi(z)\,]_A^B$$

$$T_B = -\int_A^B (B_y dx - B_x dy)$$

$$= \mathrm{Im}[\,q_{15}F(z) - d_{11}V(z) - \mu_1\Phi(z)\,]_A^B \qquad (7)$$

其中Im 代表虚部。

2.2 等效夹杂法

将等效夹杂法的思想引入电磁弹性复合材料。考虑一无穷大均匀电磁弹性介质在远场作用的纵向切应力 τ_{xz}^{∞}、τ_{yz}^{∞}，均匀面内的电场 E_x^{∞}、E_y^{∞}，均匀面内的磁场强度 H_x^{∞}、H_y^{∞} 下，应变、电场和磁场为

$$\begin{bmatrix} \gamma^0 \\ -E^0 \\ -H^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44}^M & e_{15}^M & q_{15}^M \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \gamma_{xz}^0 - i\gamma_{yz}^0 \\ -E_x^0 + iE_y^0 \\ -H_x^0 + iH_y^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{xz}^{\infty} - i\tau_{yz}^{\infty} \\ E_x^{\infty} - iE_y^{\infty} \\ H_x^{\infty} - iH_y^{\infty} \end{bmatrix} \qquad (8)$$

根据等效夹杂法，考虑两种等效情形：一种是在上述无穷均匀介质的相应周期位置，出现电磁弹性纤维，显然这就是正在研究的电磁弹性纤维问题；另一情形是在相应的双周期位置，发生非均匀的特征应变、特征电场和特征磁场。令两种情形的应力和应变相等，得到方程

$$\begin{aligned} & C^I \begin{bmatrix} \gamma_{xz}^0 + \gamma_{xz}^* + \gamma_{xz1}'' - i(\gamma_{yz}^0 + \gamma_{yz}^* + \gamma_{yz1}'') \\ -(E_x^0 + E_x^* + E_{x1}'') + i(E_y^0 + E_y^* + E_{y1}'') \\ -(H_x^0 + H_x^* + H_{x1}'') + i(H_y^0 + H_y^* + H_{y1}'') \end{bmatrix} \\ & = C^M \begin{bmatrix} \gamma_{xz}^0 + \gamma_{xz1}'' - i(\gamma_{yz}^0 + \gamma_{yz1}'') \\ -(E_x^0 + E_{x1}'') + i(E_y^0 + E_{y1}'') \\ -(H_x^0 + H_{x1}'') + i(H_y^0 + H_{y1}'') \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (9)$$

其中：C^M 表示基体的电磁弹性参数矩阵，C^I 表示夹杂的电磁弹性参数矩阵，上标“*”表示特征场量，上标“″”表示特征场量产生的扰动场。

方程(9)中包含了四个未知应变分量 γ_{xz}^*、γ_{yz}^*、γ_{xz}''、γ_{yz}''，四个未知电场分量 E_x^*、E_y^*、E_{x1}''、E_{y1}''，四个未知磁场分量 H_x^*、H_y^*、H_{x1}''、H_{y1}''，要想求得这些未知数，需要对其特征场进行分析，推导特征应变、电磁场所引起的扰动方程。

2.3 特征场分析

设基本胞元的圆柱形区域的特征应变 γ_{xz}^*、γ_{yz}^*，特征电场 E_x^*、E_y^*，特征磁场 H_x^*、H_y^*，分别用解析函数 $F^{\Delta}(z)$、$V^{\Delta}(z)$ 和 $\Phi^{\Delta}(z)$ 表示，它们在基本胞元的圆形区域 $F^{\Delta}(z)$、$V^{\Delta}(z)$ 和 $\Phi^{\Delta}(z)$ 可以展开成幂级数

$$\begin{aligned} F^{\Delta}(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k \\ V^{\Delta}(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} B_k z^k \\ \Phi^{\Delta}(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} C_k z^k \end{aligned} \qquad (10)$$

由式(5)和式(10)可得圆形区域边界 L_0 上的特征位移 $w_0(t)$、特征电势 $\phi_0(t)$ 和特征磁势 $\psi_0(t)$

$$\begin{aligned} w_0(t) &= \frac{1}{2}[\,F^{\Delta}(z) + \overline{F^{\Delta}(z)}\,] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} A_k t^k + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{A}_k R^{2k} \frac{1}{t^k} \\ \phi_0(t) &= \frac{1}{2}[\,V^{\Delta}(z) + \overline{V^{\Delta}(z)}\,] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} B_k t^k + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{B}_k R^{2k} \frac{1}{t^k} \\ \psi_0(t) &= \frac{1}{2}\Phi^{\Delta}(z) + \overline{\Phi^{\Delta}(z)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} C_k t^k + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{C}_k R^{2k} \frac{1}{t^k} \end{aligned} \qquad (11)$$

在材料界面上，位移、电势和磁势满足相容性条件

$$\begin{aligned} [\,F^+(t) + \overline{F^+(t)}\,] - [\,F^-(t) + \overline{F^-(t)}\,] &= -2w_0(t) \\ [\,V^+(t) + \overline{V^+(t)}\,] - [\,V^-(t) + \overline{V^-(t)}\,] &= -2\phi_0(t) \\ [\,\Phi(t) + \overline{\Phi(t)}\,] - [\,\Phi(t) + \overline{\Phi(t)}\,] &= -2\psi_0(t) \\ (t \in L_0) & \end{aligned} \qquad (12)$$

根据力、电位移和磁感应强度连续性条件有

$$\begin{aligned} [\,F^+(t) - \overline{F^+(t)}\,] - [\,F^-(t) - \overline{F^-(t)}\,] & \\ [\,V^+(t) - \overline{V^+(t)}\,] - [\,V^-(t) - \overline{V^-(t)}\,] &= 0 \\ [\,\Phi(t) - \overline{\Phi(t)}\,] - [\,\Phi(t) - \overline{\Phi(t)}\,] & \\ (t \in L_0) & \end{aligned} \qquad (13)$$

由式(12)和式(13)得

$$\begin{aligned} F^+(t) - F^-(t) &= -w_0(t) \\ V^+(t) - V^-(t) &= -\phi_0(t) \qquad (t \in L_0) \\ \Phi(t) - \Phi(t) &= -\psi_0(t) \end{aligned} \qquad (14)$$

根据双准周期 Riemann 边值问题理论[12]求得方程(14)的解为

$$F(z) = C_{12}z - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \overline{A}_k R^{2k} \zeta(z) - \frac{1}{z}^{(k-1)} \qquad (z \in S^+)$$

$$C_{12}z - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \overline{A}_k R^{2k} \zeta^{(k-1)}(z) \qquad (z \in S^-) \qquad (15)$$

$$V(z) =$$

$$C_{22}z - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} B_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\overline{B}_k R^{2k}\,\zeta^{(k-1)}(z) - \frac{1}{z^{(k-1)}} \quad (z \in S^+)$$

$$C_{22}z - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\overline{B}_k R^{2k}\,\zeta^{(k-1)}(z) \quad (z \in S^-) \tag{16}$$

$$\Phi(z) =$$

$$C_{32}z - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} C_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\overline{C}_k R^{2k}\,\zeta^{(k-1)}(z) - \frac{1}{z^{(k-1)}} \quad (z \in S^+)$$

$$C_{32}z - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\overline{C}_k R^{2k}\,\zeta^{(k-1)}(z) \quad (z \in S^-) \tag{17}$$

根据问题的实际情况，胞元 P_{00} 边界上的剪力、电位移和磁感应强度为零，可以求得 C_{12}、C_{22} 和 C_{32}。另外，特征应变(γ_{xz}^*，γ_{yz}^*)、特征电场(E_x^*，E_y^*)、特征磁场(H_x^*，H_y^*)可以用解析函数 $F^{\Delta}(z)$、$V^{\Delta}(z)$ 和 $\Phi^{\Delta}(z)$ 表示为

$$\gamma_{xz}^* - i\gamma_{yz}^* = \frac{dF^{\Delta}(z)}{dz} = \sum_{k=1}^{\infty} kA_k z^{k-1} \tag{18}$$

$$E_x^* - iE_y^* = \frac{dV^{\Delta}(z)}{dz} = \sum_{k=1}^{\infty} kB_k z^{k-1} \tag{19}$$

$$H_x^* - iH_y^* = \frac{d\Phi^{\Delta}(z)}{dz} = \sum_{k=1}^{\infty} kC_k z^{k-1} \tag{20}$$

同时有

$$\gamma''_{xz1} - i\gamma''_{yz1} = C_{12} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} kA_k z^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\overline{A}_k R^{2k}\,\zeta^{(k)}(z) - \frac{1}{z^{(k)}} \tag{21}$$

$$\gamma''_{xz2} - i\gamma''_{yz2} = C_{12} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\overline{A}_k R^{2k}\,\zeta^{(k)}(z)$$

$$E''_{x1} - iE''_{y1} = -C_{22} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} kB_k z^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\overline{B}_k R^{2k}\,\zeta^{(k)}(z) - \frac{1}{z^{(k)}} \tag{22}$$

$$E''_{x2} - iE''_{y2} = -C_{22} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\overline{B}_k R^{2k}\,\zeta^{(k)}(z)$$

$$H''_{x1} - iH''_{y1} = -C_{32} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} kC_k z^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\overline{C}_k R^{2k}\,\zeta^{(k)}(z) - \frac{1}{z^{(k)}} \tag{23}$$

$$H''_{x2} - iH''_{y2} = -C_{32} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\overline{C}_k R^{2k}\,\zeta^{(k)}(z)$$

把式(18)～式(23)代入式(9)就可以求出未知数 A_k、B_k、C_k($k = 1, 2, 3, \cdots$)。这样特征场就已经确定，可以求出夹杂和基体的应力、电位移和磁感应强度，问题得到解决。

如果用 $F_1(z)$、$V_1(z)$ 和 $\Phi(z)$ 表示远场作用均匀纵向剪切位移、均匀面内电位移和均匀磁场时基本胞元内的位移势函数、电势函数和磁势函数，有

$$F_1(z) = \begin{cases} \gamma_{xz}^0 z + F^{\Delta}(z) + F(z) & (z \in S^+) \\ \gamma_{xz}^0 z + F(z) & (z \in S^-) \end{cases} \tag{24}$$

$$V_1(z) = \begin{cases} -E_x^0 z + V^{\Delta}(z) + V(z) & (z \in S^+) \\ -E_x^0 z + V(z) & (z \in S^-) \end{cases} \tag{25}$$

$$\Phi_1(z) = \begin{cases} -H_x^0 z + \Phi^{\Delta}(z) + \Phi(z) & (z \in S^+) \\ -H_x^0 z + \Phi(z) & (z \in S^-) \end{cases} \tag{26}$$

3 数值结果与讨论

3.1 夹杂内的应力场分析

上面所发展的解析分析方法可以用于复合材料(周期)胞元的设计计算，定量分析微结构参数与细观应力场的关联。已经知道，均匀介质中的单个圆或椭圆夹杂在远场均匀载荷下，其内部应力场是均匀的，但是多夹杂之间的干涉将破坏这种应力的均匀性。为了考察这种夹杂相互作用对细观应力场的干涉规律，定义夹杂应力集中系数 $\beta = \tau_{xz,\max}/\tau_{xz}^{\infty}$，其中 $\tau_{xz,\max}$ 和 τ_{xz}^{∞} 分别是夹杂内的最大切应力和远场切应力。

取基体为 $CoFe_2O_4$，夹杂为 $BaTiO_3$，分别用 b_1 表示列间距，b_2 表示行间距，图2给出了无量纲列间距 $b_1/(2R)$ 和行间距 $b_2/(2R)$ 对应力集中系数的影响。从图2中可以发现，应力集中系数 β 对列和行两个方向的相对间距呈现出截然相反的特性。β 随着无量纲列间距 $b_1/(2R)$ 的增大而减小，但是随着无量纲行间距 $b_2/(2R)$ 的增大而增大。这说明在复合材料的研究过程中，对夹杂的应力系数

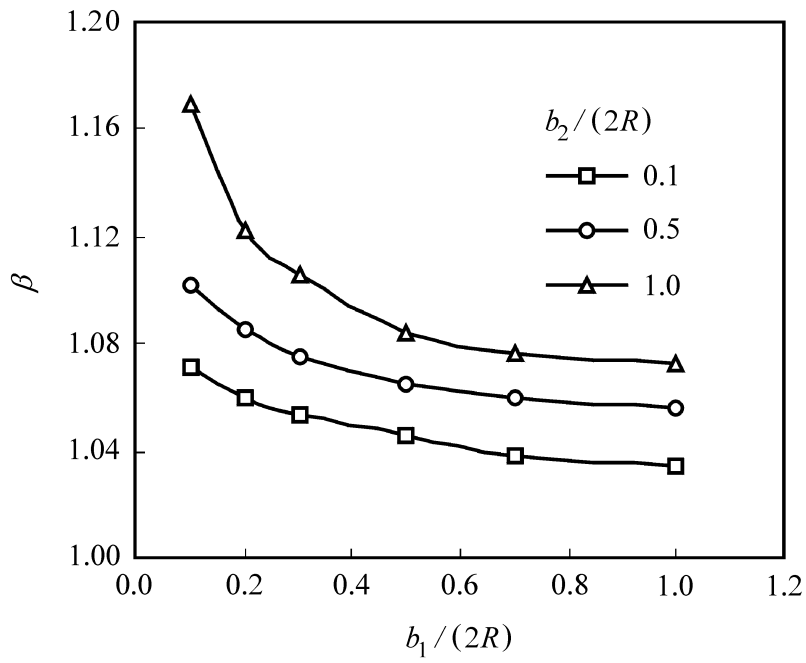

图2 夹杂间距对应力集中系数 β 的影响

Fig. 2 Influence of the inclusion spacings on the stress concentration factor β

的讨论，不能单纯的考虑夹杂的体积分数，还必须综合考虑夹杂的分布情况。

当夹杂的行间距和列间距均逐渐变大时，夹杂中的应力场逐渐趋于均匀，并趋于单夹杂问题的经典结果[13]，即

夹杂内:

$$\begin{pmatrix} F_1(z) \\ V_1(z) \\ \Phi(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^0 & A_0 \\ E + & -E^0 & B_0 \\ & -H^0 & C_0 \end{pmatrix} z \qquad (27)$$

基体内:

$$\begin{pmatrix} F_1(z) \\ V_1(z) \\ \Phi(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 & \gamma^0 & \overline{A}_0 \\ B_0 z + & -E^0 & \overline{B}_0 \\ C_0 & -H^0 & \overline{C}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{R^2}{z} \end{pmatrix} \qquad (28)$$

从式(27)可以看出，应力场、电位移和磁场分布是均匀的(E 为单位矩阵)。

纯弹性情况时，可以求得 $B_k = C_k = 0$，而 A_k 满足方程

$$C_{44}^{I} \sum_{k=1}^{\infty} kA_k z^{k-1} + (C_{44}^{I} - C_{44}^{M}) \times \left(G_2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} kA_k z^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{A}_k R^{2k} z^{-k-1} \right) - \frac{1}{z} \qquad (29)$$

$$= -(C_{44}^{I} - C_{44}^{M})\gamma^0 \qquad (29)$$

与文献[14]的表达形式一致。这从一个侧面验证了本文解答的正确性。

3.2　材料有效电磁弹性性质的预测

利用本文的解答并根据平均场理论，可预报所设计的电磁弹性复合材料有效电磁弹性模量。

取基体为 $CoFe_2O_4$，夹杂为 $BaTiO_3$，图3 给出了夹杂方形和正六角形排列的结果对比，从图中可以发现，当体积分数比较小时，夹杂排列对结果的影响不会太大，基本上是相等的；当体积分数比较大时，两种排列的结果相差比较大。可见夹杂的排列不仅影响细观应力场，也影响宏观有效电磁弹性性质。

4　结束语

本文作者为双周期圆柱形夹杂电磁弹性复合材料反平面问题发展了严格的解析分析方法，并求得了问题的解析解，该解析解对研究电磁弹性复合材料的细观应力场、电磁场和有效电磁弹性性质具有重要实用价值。

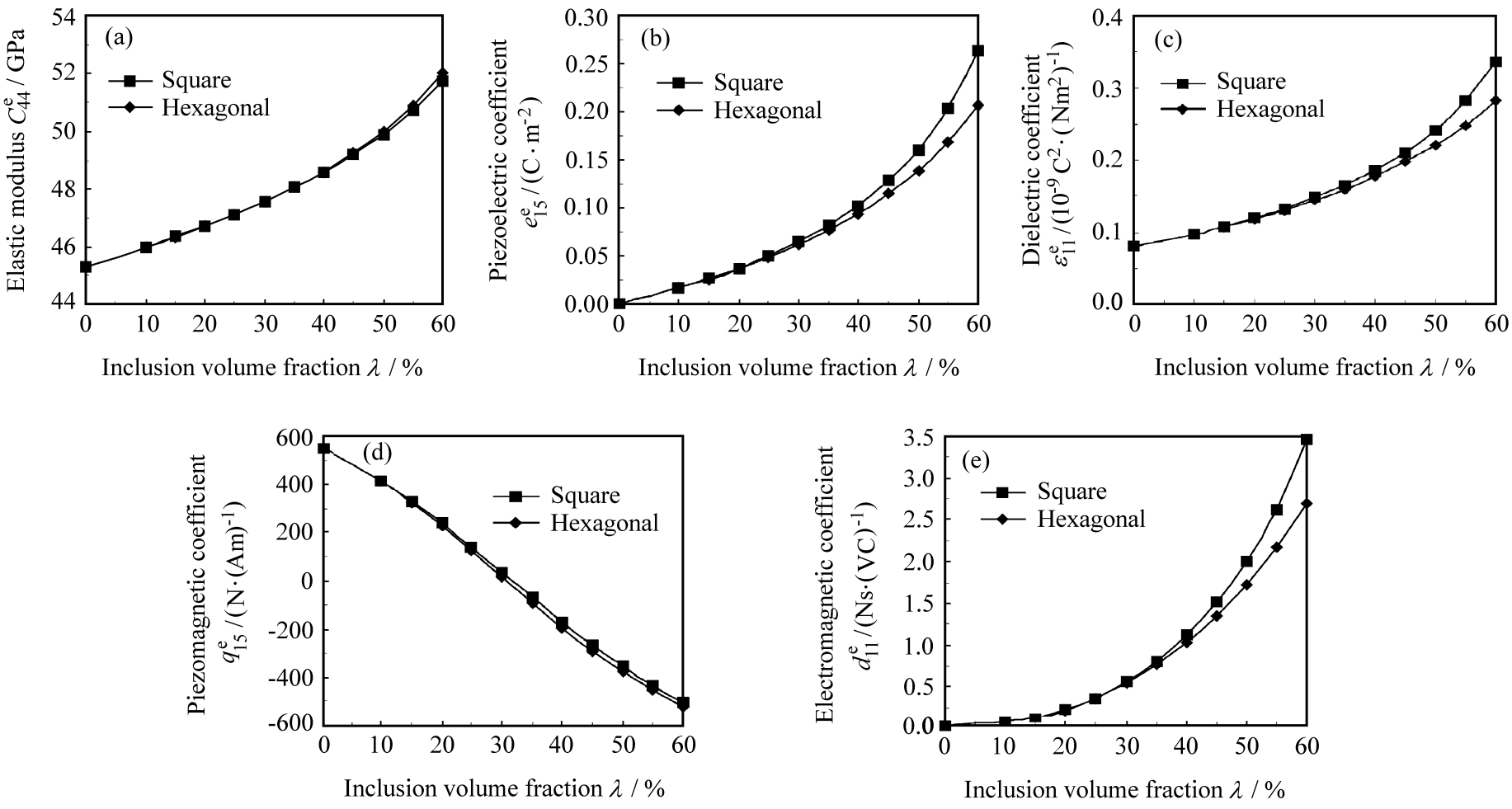

图3　有效电磁弹性参数随夹杂体积分数的变化

Fig. 3　Variations of effective magnetoelectroelastic with inclusion volume fraction

参考文献:

[1] Van Run A M J G, Terrell D R. Scholing J H. An in situ grown eutectic magnetoelectric composite material Ⅱ: Physical properties[J]. J Mater Sci, 1974, 9: 1710 - 1714.

[2] Harshe G. Magnetoelectric effect in piezoelectric- magnetostrictive composites[D]. Pennsylvania: The Pennsylvania State University, 1991.

[3] Avellaneda M, Harshe G. Magnetoelectric effect in piezoelectric/ magnetostrictive multilayer (2-2) composites [J]. J Intell Mater Syst Struct, 1994, 5: 501 - 513.

[4] Wu T L, Huang J H. Closed-form solution for the magnetoelectric coupling coefficients in fibrous composites with piezoelectric and piezomagnetic phases[J]. Int J Solid Struct, 2000, 37: 2981 - 3009.

[5] 张敬周，王 旭，仲 政. 电磁弹性复合材料双圆柱夹杂问题[J]. 力学季刊, 2002, 23(3): 373 - 379.
Zhang Jingzhou, Wang Xu, Zhong Zheng. Double circular cylindrical inclusions in a magnetoelectroelastic composite material [J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2002, 23 (3): 373 - 379.

[6] 刘金喜，王祥琴，王 彪. 横观各向同性电磁弹性固体耦合方程的一般解[J]. 应用数学和力学, 2003, 24(7): 684 - 690.
Liu Jinxi, Wang Xiangqin, Wang Biao. General solution for coupled equations of transversely isotropic magnetoelectroelastic solids [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2003, 24(7): 684 - 690.

[7] 关 群，何顺荣. 压电、压磁及电磁耦合弹性介质材料的弹性常数与工程材料常数之间的关系[J]. 四川大学学报(工程科学版), 2003, 35(6): 26 - 30.
Guan Qun, He Shunrong. Relationship between elastic constants and engineering constants of the piezoelectric-piezomagnetic and elastic media[J]. Journal of Sichuan University(Engineering Science Edition), 2003, 35(6): 26 - 30.

[8] 张晓宁，王 群，葛开勇，毛倩瑾，周美玲. 合成纤维复合夹层屏蔽结构改性及其电磁特性研究[J]. 复合材料学报, 2003, 20(1): 85 - 90.
Zhang Xiaoning, Wang Qun, Ge Kaiyong, Mao Qianjin, Zhou Meiling. Modification of composite interlayer shielding structure on synthetic fiber and study of its electro magnetic characteristic[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2003, 20(1): 85 - 90.

[9] 林 云，朱世富，林展如. 高分子磁体/TiO_2复合缩波材料的电磁性能[J]. 复合材料学报, 2004, 21(2): 45 - 49.
Lin Yun, Zhu Shifu, Lin Zhanru. Electromagnetic properties of polymer magnet/ TiO_2 composite compact wave materials [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2004, 21(2): 45 - 49.

[10] Xia Z H, Zhang Y F, Ellyin F A. A unified periodical boundary conditions for presentative volume elements of composites and applications [J]. Int J Solids and Structure, 2003, 40: 1907 - 1721.

[11] Tan Ping, Tong Liyong. Modeling for the electro-magneto-thermo-elastic properties of piezoelectric-magnetic fiber reinforced composites [J]. Composites Part A, 2002, 33: 631 - 645.

[12] Lu J K. Boundary value problems for analytic function [M]. Singapore: World Scientific, 1993.

[13] 吴力宁，刘永前. 含椭圆夹杂电磁弹性固体的反平面问题[J]. 石家庄铁道学院学报, 2000, 13(4): 9 - 12.
Wu Lining, Liu Yongqian. On the antiplane problem of magnetoelectroelastic solids with an elliptic inclusion[J]. Journal of Shijiazhuang Railway Institute, 2000, 13(4): 9 - 12.

[14] 徐耀铃，蒋持平. 双周期圆柱形夹杂纵向剪切问题的精确解[J]. 力学学报, 2003, 35(3): 265 - 271.
Xu Yaoling, Jiang Chiping. An exact solution for a doubly periodic array of cylindrical inclusions under longitudinal shear[J]. Acta Mechanica Sinica, 2003, 35(3): 265 - 271.

责任编审：孙丽娟