复 合 材 料 学 报 第24卷 第6期 12月 2007年
Acta Materiae Compositae Sinica Vol. 24 No. 6 December 2007

文章编号: 1000-3851(2007)06-0128-07

多夹杂问题的分步格式

杨庆生*, 陶 绪
(北京工业大学 机电学院工程数值模拟中心, 北京 100022)

摘 要: 提出了一种计算复合材料有效性能的分步格式, 用以解决高体分比和多夹杂复合材料的有效性能计算。对于多类夹杂问题, 模型分步处理每一类夹杂, 并分步计算复合材料的有效性能。给出了多夹杂复合材料性能的数值计算结果。数值结果与实验数据符合很好。研究表明, 对于二元复合材料, 现有的分步格式能够很好地处理接近于1的高体分比夹杂问题, 其结果与微分法的结果基本相同, 分步格式能够有效地处理具有不同形状和尺寸的多类夹杂问题。

关键词: 复合材料; 多夹杂; 有效性能; 分步格式
中图分类号: TB33 **文献标志码**: A

Stepping scheme for multi-inclusion problem

YANG Qingsheng*, TAO Xu
(Numerical Simulation Center for Engineering, Department of Engineering Mechanics, Beijing University of Technology, Beijing 100022, China)

Abstract: A stepping scheme was described for analyzing the effective properties of composites containing multiple kinds of inclusions with different shapes and sizes. In the stepping scheme the inclusions are treated kind by kind and the effective stiffness coefficients of the resultant composites in each step are calculated. Numerical results indicate that the stepping scheme can precisely deal with the problem with high volume fraction of inclusions and multiple inclusions. For the binary composites consisting of matrix and one kind of inclusion, the present result is in agreement with that of the differential scheme.

Keywords: composites; multi-inclusion; effective properties; stepping scheme

复合材料的均匀化和有效性能的计算是一个经典问题。目前已经发展了许多均匀化模型, 例如夹杂模型、直接方法和二尺度展开法等[1-4], 对这些方法的比较和数值对照也进行了研究[5-6]。

夹杂模型的理论基础是Eshelby关于无限大基体中嵌入单一夹杂问题的弹性力学解[7]。夹杂模型根据体分比和夹杂的几何尺寸及组分性能来推导有效性能, 自洽法[8-10]、广义自洽法[11-12]和M-T法[13-15]都是利用Eshelby的解发展而来的, 它们广泛应用于求解各种非均匀材料的有效性能。但是这种方法只能适应于具有椭球形状的夹杂问题。夹杂模型与有限元法的结合使得夹杂模型可以处理任意形状的夹杂问题[3,16]。但是, 这些方法的一个重要不足是只能适用于不同低体分比的单一夹杂问题。微分法[17-18]解决了高浓度夹杂的相互作用问题, 但只能用于含有同类夹杂的复合材料有效性能的计算。文献[19-20]研究了含有重叠的多夹杂问题, 解决了表面镀层的夹杂或含有界面层的复合材料的有效性能计算问题。

本文中研究的问题是基体材料中含有不同形状、不同性能和不同分布的多类夹杂问题, 如图1所示。多类夹杂问题在工程中很常见, 例如混杂纤维复合材料是有不同性能的纤维混杂在一起形成的复合材料。含缺陷复合材料含有增强相和微缺陷2类不同性质的夹杂。新型复合材料一般具有功能与结构的双重特性, 往往在基体材料中填加多种颗粒和纤维, 例如具有生物活性的颗粒与晶须复合材料[21]。但是, 多类夹杂问题的有效性能计算一直

收稿日期: 2007-01-16; 收修改稿日期: 2007-04-09
基金项目: 国家自然科学基金(10272006, 30470439)
通讯作者: 杨庆生, 教授, 博士生导师, 主要从事复合材料细观力学研究 E-mail: qsyang@bjut.edu.cn

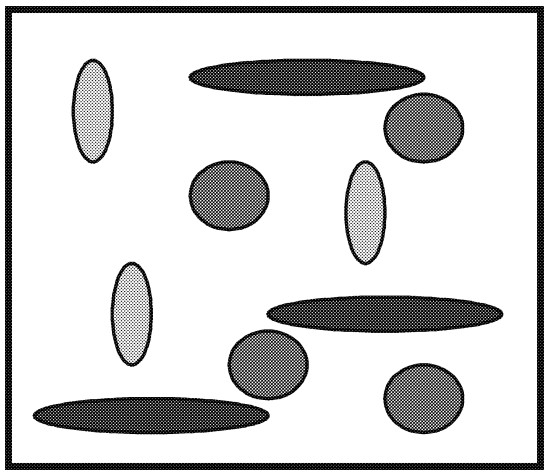

图1 多夹杂复合材料

Fig.1 Composite containing multiple kinds of inclusions

没有得到很好的解决[22]。文献[12]解决了单向纤维端头有微小裂纹复合材料的有效弹性模量计算问题。文献[23]推导了多相夹杂问题的数学公式，但没有明确的物理意义。文献[24]将不同夹杂作为一个集堆(Cluster)，研究了纤维束的有效弹塑性性能。但是，这些研究工作只能处理特殊的问题。

本文中提出一种计算多夹杂问题有效性能的分步格式。对于单一夹杂问题，这个方法可以有效地应用于高夹杂体分比的宏观性能计算，等价于经典的微分法；对于多夹杂问题，可以处理不同形状和不同性能的多夹杂复合材料。

1 单一夹杂问题的有效性能

复合材料的宏观应力和应变可以用组分的应力和应变表示为

$$\bar{\sigma}_{ij} = v_0 \sigma_{ij}^{(0)} + v_1 \sigma_{ij}^{(1)}, \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = v_0 \varepsilon_{ij}^{(0)} + v_1 \varepsilon_{ij}^{(1)} \tag{1}$$

其中，$v_r(r = 0, 1)$ 表示各相的体分比。

复合材料的有效弹性张量 $\bar{C}_{ijkl}$ 由下式定义：

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{C}_{ijkl} \bar{\varepsilon}_{kl} \tag{2}$$

或用应变能定义为

$$\frac{1}{2}\bar{\sigma}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\bar{C}_{ijkl}\bar{\varepsilon}_{ij}\bar{\varepsilon}_{kl} \tag{3}$$

当给定均匀位移(应变)边界条件时，复合材料的有效应变为

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \overset{0}{\varepsilon}_{ij} \tag{4}$$

$\overset{0}{\varepsilon}_{ij}$ 指的是边界上施加的常应变。这时，为了计算复合材料的有效弹性系数 C_{ijkl}，必须首先计算出复合材料的有效应力场。

假设在每一相中存在弹性关系

$$\sigma_{ij}^{(r)} = C_{ijkl}^{r} \varepsilon_{kl}^{(r)} \quad (r = 0, 1) \tag{5}$$

将式(5)代入式(1)，并利用式(3)，得到复合材料的有效弹性系数

$$\bar{C} = C^0 + v_1(C^1 - C^0)\bar{\varepsilon}^{(1)}\bar{\varepsilon}^{-1} \tag{6}$$

假设复合材料的有效应变与每一相内的局部应变之间存在关系

$$\bar{\varepsilon}^{(1)} = A\bar{\varepsilon} \tag{7}$$

其中，A 称为应变集中因子。复合材料的有效刚度可进一步表示为

$$\bar{C} = C^0 + v_1(C^1 - C^0)A \tag{8}$$

由上述过程可知，只要求出了集中因子 A，则复合材料的有效刚度就可容易求出。同理也可以得到复合材料的有效柔度。一般地说，应变集中因子与组分材料的性能和增强相的几何形状有关。

现有的均匀化方法通过不同的途径计算应变集中因子。利用自洽模型[8-10]计算的应变集中因子为

$$A = [I + S\bar{C}^{-1}(C^1 - \bar{C})]^{-1} \tag{9}$$

显然，要得到有效刚度，必须进行迭代计算。利用 Mori-Tanaka 法[13-15]得到的应变集中因子为

$$A = \hat{A}[v_0 I + v_1 \hat{A}]^{-1} \tag{10}$$

其中

$$\hat{A} = [I + S(C^0)^{-1}(C^1 - C^0)]^{-1} \tag{11}$$

在上述公式中，S 是 Eshelby 张量[7]，对于各向同性基体材料，Eshelby 张量的具体形式见附录1。

2 多类夹杂的分步格式

多夹杂问题分步格式的主要思想可以概括如下：假设有 n 类夹杂，首先向基体材料中投入其中的一类夹杂，然后进行均匀化；用均匀化后的复合材料作为新的基体，再投入另一类夹杂，再次进行均匀化；此过程一直进行下去，直到将所有的夹杂类型投放完毕。最后得到的有效性能就是多夹杂复合材料的宏观性能。

2.1 体分比的定义

假设基体材料中含有 n 种夹杂，每一种夹杂的体积为 V_i，基体的体积为 V_0，定义4种体分比。

真实的体分比：表示某一组分材料 i 在复合材料总体中所占的体积比，表示为

$$v_i = \frac{V_i}{V_0 + V_1 + \cdots + V_n} \tag{12}$$

这是通常所说的体分比，而且有 $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$。

相对基体的体分比：表示夹杂 i 相对于基体的体积比，表示为

$$\hat{v}_i = \frac{V_i}{V_0 + V_i} \tag{13}$$

随动体分比: 由 i - 1 类夹杂组成的复合材料称为当前复合材料。随动体分比表示夹杂 i 相对于当前复合材料的体积比, 表示为

$$v_i' = \frac{V_i}{V_0 + V_1 + \cdots + V_i} \tag{14}$$

相对夹杂体分比表示各个夹杂之间的体积比, 表示为

$$v_{ij} = V_i / V_j \quad (i < j) \tag{15a}$$

也可以表示为

$$v_{ij} = v_i / v_j \quad (i < j) \tag{15b}$$

它们之间的关系为

$$\frac{1}{v_i'} = \frac{V_1 + \cdots + V_{i-1} + V_i + V_0}{V_i} = v_{1i} + \cdots + v_{(i-1)i} + \frac{1}{v_0} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 \\ \frac{1}{v_2} &= \frac{1}{v_2'} + \frac{1}{v_{23}} + \cdots + \frac{1}{v_{2n}} \\ \frac{1}{v_i} &= \frac{1}{v_i'} + \frac{1}{v_{i(i+1)}} + \cdots + \frac{1}{v_{in}} \\ v_n &= v_n' \end{aligned} \tag{17}$$

对于二元复合材料(只有一类夹杂)问题, 有

$$v_1' = v_0 = v_1 \tag{18a}$$

$$\frac{1}{v_2'} = v_{12} + \frac{1}{v_0} \tag{18b}$$

注意后3 种体分比都不是我们通常所说的普通意义上的体分比, 因为它们的和不为1 。

2.2　分步格式

首先在基体材料中加入第1 种夹杂。利用式(8) 得到相应的有效弹性性能 $\bar{C}$ 为

$$\bar{C} = C^0 + v_1 (C^1 - C^0) A_1 \tag{19}$$

利用自洽模型得到的应变集中因子为

$$A_1 = [I + S_1 \bar{C}^{-1} (C^1 - \bar{C})]^{-1} \tag{20}$$

利用 Mori-Tanaka 方法得到的应变集中因子为

$$A_1 = \bar{A}_1 [v_0 I + v_1 \bar{A}_1]^{-1},$$

$$\bar{A}_1 = [I + S_1 (C^0)^{-1} (C^1 - C^0)]^{-1} \tag{21}$$

其中: v_1 是第1 类夹杂的体分比, 也是真实的体分比; $v_0 = 1 - v_1$; S_1 是与基体的性能和第1 类夹杂形状有关的 Eshelby 张量。

假设分步格式的过程已经进行了 i - 1 次, 得到的有效性能为 $\bar{C}_{i-1}$。现在把 i - 1 次得到的复合材料作为新的基体, 加入第 i 类夹杂。再次利用式(8) 可以得到相应的有效弹性性能 $\bar{C}$, 注意需要将公式中的 C_0 替换为 $\bar{C}_{i-1}$, C^1 替换为 C^i, v_1 替换为 v_i'。

$$\bar{C} = \bar{C}_{i-1} + v_i' (C^i - \bar{C}_{i-1}) A_i \tag{22}$$

利用自洽模型得到的应变集中因子为

$$A_i = [I + S_i \bar{C}^{-1} (C^i - \bar{C})]^{-1} \tag{23}$$

利用 Mori-Tanaka 方法得到的应变集中因子为

$$A_i = \bar{A}_i [(1 - v_i') I + v_i' \bar{A}_i]^{-1},$$

$$\bar{A}_i = [I + S_i \bar{C}_{i-1}^{-1} (C^i - \bar{C}_{i-1})]^{-1} \tag{24}$$

S_i 是与 i - 1 复合材料性能 $\bar{C}_{i-1}$ 和第 i 类夹杂形状有关的 Eshelby 张量。值得注意的是 i - 1 步的复合材料有可能是各向异性的, 此时应该应用各向异性介质的 Eshelby 张量[25], 具体表达式见附录2。这个过程一直进行下去, 直到所有的夹杂投放完毕, 就可得到多夹杂复合材料的有效性能。这个过程可以由图2 表示。

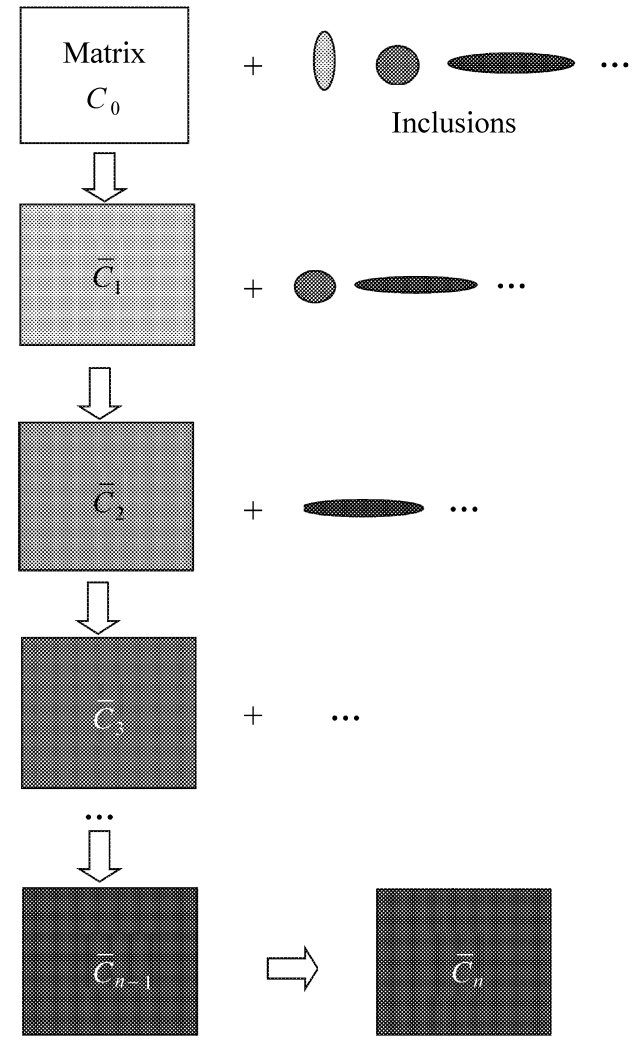

图2　多步格式示意图

Fig.2　Schematic of a stepping scheme

3　数值例题

首先考虑增强相(纤维夹杂)的复合材料, E 玻璃纤维的杨氏模量为73.1 GPa, 泊松比为0.22, 环氧树脂的杨氏模量为3.45 GPa, 泊松比为0.35, 每次加入占基体体积10 % 的玻璃纤维。复合材料的横向模量已由文献[6] 利用二尺度展开法计算过。实验结果见文献[26] 。现在利用分步格式进行计算, 数值结果表示在图3 中。图中同时给出了二尺

度展开法的结果[6]和实验结果[26]。可以看出，现在分步格式与二尺度展开法得到的结果符合很好，它们都符合实验数据，并在 Hanshin-Strikeman[27]的下限以内。但是现在的分步格式可以适用于整个纤维体分比范围，而二尺度展开法因使用代表体元的概念，而只能针对体分比在0.6 以下的情况，这是因为只有在稀疏的夹杂情况，才可以取出完整的基体包含夹杂的代表体元[28]。

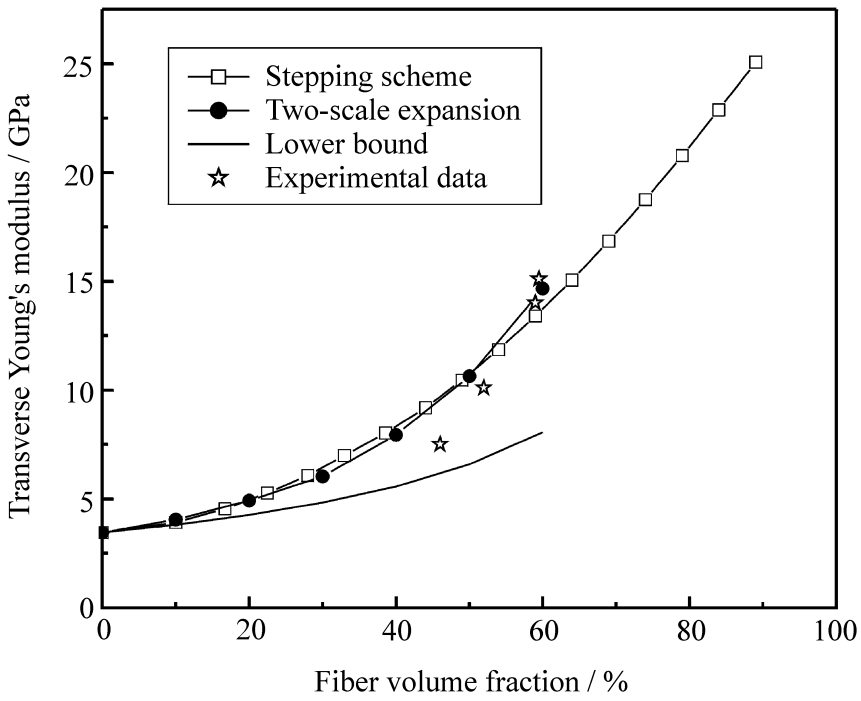

图3　纤维复合材料的有效模量

Fig.3　Effective moduli of fiber composites

图3 表示只含有纤维增强相的复合材料有效模量的预测结果，图4 表示只含有球形孔洞的固体的有效体积模量，这里体积模量已经与无孔洞固体的体积模量进行了归一化。结果表明，对于这个单一夹杂问题，分步格式与微分法得到基本相同的结果，他们都可以适用于整个体分比范围。而自洽模型则只能适合很小的体分比情况，而且，当体分比达到50 %左右时，自洽模型得到的有效模量为零，这显然是不成立的。但是值得注意是，微分法只能应用于单一夹杂问题而不能应用于多夹杂问题。

对于含单类刚性夹杂复合材料，数值结果表明现在的分步格式与微分法得到几乎完全相同的结果，如图5 所示。在计算中，每次加入随动体分比10 %的夹杂，直到真实体分比达到1 为止。这个计算过程可以非常容易地一次完成，而不必像微分法那样求解微分方程。

为了进一步考虑夹杂的不同添加顺序对基体性能的影响，对多夹杂混合的复合材料，应用现在的分步格式计算其有效性能。将杨氏模量为80 GPa，泊松比为0.4 的刚性球夹杂和孔洞夹杂以不同的顺

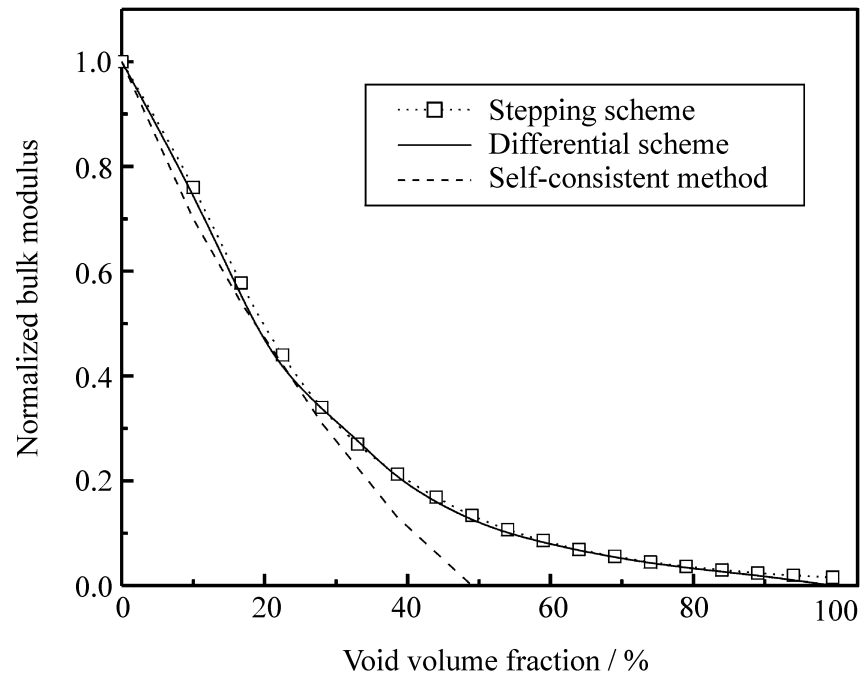

图4　含有孔洞固体的有效体积模量

Fig.4　Effective bulk moduli of solid containing void

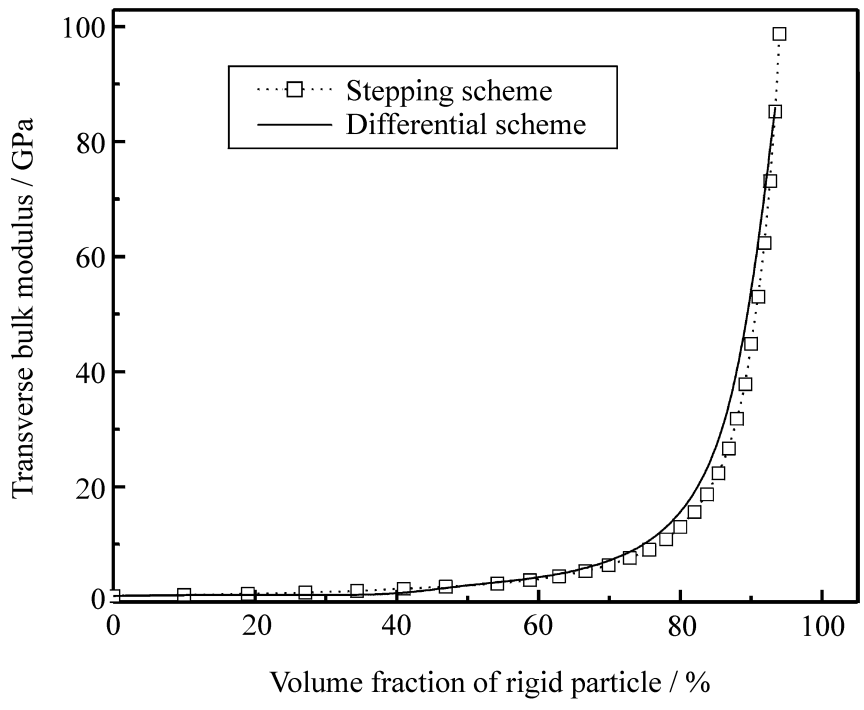

图5　刚性颗粒复合材料的有效模量

Fig.5　Effective moduli of composites containing rigid particles

序加入到杨氏模量为3.45 GPa，泊松比为0.35 的环氧树脂中。

表1 的计算结果反映了含有孔洞和刚性颗粒的复合材料的有效性能。这里考虑了4 种情况：(1) 20 %孔洞+ 刚性球；(2) 10 %孔洞+ 刚性球；(3) 20 %刚性球+ 孔洞；(4) 10 %刚性球+ 孔洞。第(1)、(2) 种情况是刚性颗粒的体分比从0 变化到1。从计算结果可以看出，在颗粒体分比为0 时，由于基体中含有一定的孔洞，其有效体积模量要小于基体的模量。随着刚性颗粒的逐渐加入，复合材料的有效体积模量迅速增加。在颗粒接近饱和(体分比接近1) 时，计算的有效模量实际上是含有一定孔洞的刚性材料的有效性能。对于任意体分比的孔洞

和颗粒，都可以计算复合材料的有效性能。第(3)、(4)种情况是孔洞的体分比从0 变化到1。当孔洞体分比为0 时，由于基体中含有一定的颗粒，其有效体积模量要大于基体的模量，随着孔洞体积的逐渐增加，复合材料的有效体积模量迅速减小。在颗粒接近饱和(体分比接近1)时，计算的有效模量实际上是含有一定刚性球的孔洞材料的有效性能。可以通过表格的计算结果来比较一下相同情况下的夹杂对复合材料有效性能的影响。表1 中所示，加入20 %孔洞+10 %刚性球的夹杂后材料的有效刚度是3.2340，而当加入10 %刚性球+20 %孔洞的夹杂后材料的有效刚度是3.1688；加入10 %孔洞+20 %刚性球的夹杂后材料的有效刚度是7.7110，而当加入20 %刚性球+10 %孔洞的夹杂后材料的有效刚度是7.5344；加入10 %孔洞+10 %刚性球的夹杂后材料的有效刚度是4.2350，而当加入10 %刚性球+10 %孔洞的夹杂后材料的有效刚度是4.2301；加入20 %孔洞+20 %刚性球的夹杂后材料的有效刚度是5.9702，而当加入20 %刚性球+20 %孔洞的夹杂后材料的有效刚度是5.9682。可以看出这几组数值几乎相等，这就说明了几种夹杂在添加次序不同的情况下，夹杂物对复合材料的有效性能没有影响。

图6(a)表示了含有孔洞和刚性颗粒的复合材料的有效性能。图6(b)中的结果表示在一定刚性夹杂的复合材料中，使孔洞的体分比从0 变到1 时，计算出的有效体积模量。这相当于在基体中先加入一定的刚性夹杂(刚性球的模量为80 GPa，泊

表1　有效模量结果比较

Table 1　Comparison of effective moduli

Volume ratio/ %	Effective volume moduli/ GPa			
	20 % void + rigid sphere particles	10 % void + rigid sphere particles	20 % rigid sphere particles + void	10 % rigid sphere particles + void
0	2.2698	3.0134	8.6162	4.8113
10	3.2340	4.2350	7.5344	4.2301
20	5.9702	7.7110	5.9682	3.1688
30	13.3219	15.9988	3.6428	2.0267
40	27.9330	31.1743	1.9387	1.0767
50	46.9041	49.7019	0.8330	0.4618
60	63.7433	65.6585	0.2773	0.1535
70	74.5393	75.3190	0.0671	0.0371
80	78.8709	79.0403	0.0105	0.0058

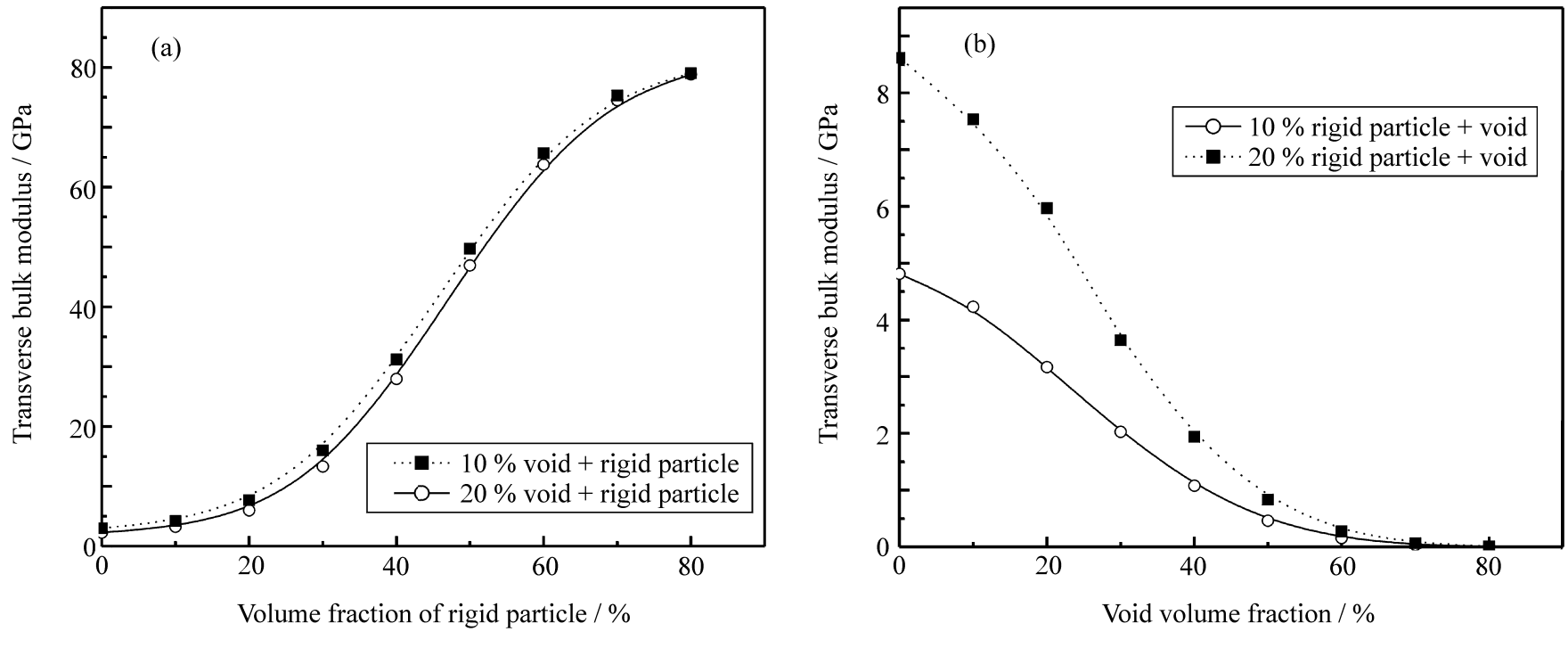

图6　孔洞与刚性颗粒复合材料的有效体积模量

Fig.6　Effective bulk moduli of composites containing void and rigid partide

松比为0.4)，然后逐渐加入孔洞。比较图6(a)和图6(b)的结果，可以发现对于一定的孔洞和刚性夹杂体分比，夹杂的添加顺序对于最后结果没有影响。

4 结 论

提出了一种计算多夹杂复合材料有效性能的新方法—分步格式。该方法是在对夹杂材料作了必要的假设以后作出的计算，它可以有效地处理高体分比夹杂和多夹杂问题。该方法操作简单，计算结果与实验数据符合很好。对于二元复合材料，应用分步格式可以精确地计算高体分比复合材料的有效性能，克服了以Eshelby夹杂理论为基础的间接法的缺陷，其计算结果与微分法的结果基本一致。但是，分步格式能够处理多夹杂问题，这是微分法无能为力的。

参考文献:

[1] Mura T. Micromechanics of defect in solids [M]. 2nd ed. New York: Martins Nijhoff, 1987: 304.

[2] Nemat-Nasser S, Hori M. Micromechanics: Overall properties of heterogeneous materials [M]. Amsterdam: North Holland Publisher, 1993: 381.

[3] Bensoussan A, Lion J L, Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures [M]. Amsterdam: North Holland Publisher, 1978: 20.

[4] Sanchez-Palencia E. Non-hongeneous media and vibration theory [M]. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1980: 127.

[5] Hohe J, Becker W. Effective stress-strain relations for two dimensional cellular sandwich cores: Homogenization, material models, and properties [J]. Applied Mechanics Review, 2002, 55(1): 61-87.

[6] Yang Q S, Becker W. A comparative investigation of different homogenization methods for prediction of the macroscopic properties of composites [J]. Computer Modeling in Engineering and Sciences, 2004, 6(4): 319-332.

[7] Eshelby J D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems [J]. Proceedings of Royal Society London, Serial A, 1957, 241: 376-396.

[8] Budiansky B. On the elastic moduli of some heterogeneous materials [J]. Journal of Mechanics and Physics of Solids, 1965, 13: 223-227.

[9] Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials [J]. Journal of Mechanics and Physics of Solids, 1965, 13: 213-222.

[10] hou T W, Nomura S, Taya M. A self-consistent approach to the elastic stiffness of short-fiber composites [J]. Journal of Composite Materials, 1980, 14: 178-188.

[11] hristensen R M, Lo K H. Solutions for effective shear properties in three sphere and cylinder models [J]. Journal of Mechanics and Physics of Solids, 1979, 27: 315-330.

[12] hristensen R M. A critical evaluation for a class of micro mechanics models [J]. Journal of Mechanics and Physics of Solids, 1990, 38: 379-406.

[13] ori T, Tanaka K. Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusion [J]. Acta Metall, 1973, 21: 571-576.

[14] eng G J. Some elastic properties of reinforced solids with special reference to isotropic ones containing spherical inclusions [J]. International Journal of Engineering Sciences, 1984, 22: 845-856.

[15] eveniste Y. A new approach to the application of Mori-Tanaka s theory in composite materials [J]. Mechanics of Materials, 1987, 6: 147-157.

[16] ang Qingsheng, Tang L M, Chen H R. Self-consistent finite element method: A new method for predicting effective properties of inclusion media [J]. Finite Elements in Analysis and Design, 1994, 17: 247-257.

[17] orris A N. A differential scheme for the effective moduli of composites [J]. Mechanics of Materials, 1985, 4: 1-16.

[18] ashin Z. The differential scheme and its application to cracked materials [J]. Journal of Mechanics and Physics of Solids, 1988, 36: 719-736.

[19] ori M, Nemat-Nasser S. Double-inclusion model and overall moduli of multi-phase composites [J]. Mechanics of Materials, 1993, 14(3): 189-206.

[20] i J Y. Magnetoelectroelastic multi-inclusion and inhomogeneity problems and their applications in composite materials [J]. International Journal of Engineering Science, 2000, 38: 1993-2011.

[21] u H H K, Smith D T, Simon C G. Strong and bioactive composites containing nano-silica-fused whiskers for bone repair [J]. Biomaterials, 2004, 25: 4615-4626.

[22] aya M, Chou T W. On two kinds of ellipsoidal inhomogeneities in an infinite elastic body: An application to a hybrid composite [J]. International Journal of Solids and Structures, 1981, 17: 553-563.

[23] 郑代华，杨庆生. 多相复合材料的有效模量预测[J]. 铁道学报, 2000, 22(2), 86-89.
Zheng Daihua, Yang Qingsheng. Prediction of the effective properties of composites with multi kinds of inclusions [J]. Journal of the China Railway Society, 2000, 22(2): 86-89.

[24] ang Qingsheng, Qin Qinghua. Modelling the effective elastoplastic properties of unidirectional composites reinforced by fibre bundles under transverse tension and shear loading [J]. Materials Science and Engineering A, 2003, 344(1/2): 140-145.

[25] in S C, Mura T. Elastic fields of inclusions in anisotropic media II [J]. Physica Status Solidi A, 1973, 15: 281-285.

[26] sai S W. Structural behavior of composite materials, CR-71 [R]. Washington: NASA, 1964.

[27] ashin Z, Shtrikman S. A variational approach to the theory of elastic behavior of multiphase materials [J]. Journal of Mechanics and Physics of Solids, 1963, 11: 127-140.

[28] hristensen R M. A critical evaluation for a class of micro mechanics models [J]. Journal of Mechanics and Physics of Solids, 1990, 38: 379-404.

附录1　各向同性介质中的Eshelby 张量

对于各向同性基体和旋转椭球夹杂($a_1 \geq a_2 = a_3$)，Eshelby 张量的非零分量为:

$$S_{2222} = S_{3333} = \frac{3}{8(1-\nu)}\frac{\alpha^2}{(\alpha^2-1)} + \frac{1}{4(1-\nu)}\left(1-2\nu-\frac{9}{4(\alpha^2-1)}\right)g$$

$$S_{1111} = \frac{1}{2(1-\nu)}\left(1-2\nu+\frac{(3\alpha^2-1)}{(\alpha^2-1)}\right)-\left(1-2\nu+\frac{3\alpha^2}{(\alpha^2-1)}\right)g$$

$$S_{2233} = S_{3322} = \frac{1}{4(1-\nu)}\left(\frac{\alpha^2}{2(\alpha^2-1)}-(1-2\nu)-\frac{3}{4(\alpha^2-1)}\right)g$$

$$S_{2211} = S_{3311} = -\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\alpha^2}{(\alpha^2-1)}+\frac{1}{4(1-\nu)}\left(\frac{3\alpha^2}{(\alpha^2-1)}-(1-2\nu)\right)g$$

$$S_{1122} = S_{1133} = -\frac{1}{2(1-\nu)}\left(1-2\nu+\frac{1}{(\alpha^2-1)}\right)+\frac{1}{2(1-\nu)}\left(1-2\nu+\frac{3}{2(\alpha^2-1)}\right)g$$

$$S_{1212} = S_{1313} = \frac{1}{8(1-\nu)}\left(2(1-2\nu)-2\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}+3\left(-1+2\nu+3\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}\right)g\right)$$

$$S_{2323} = \frac{1}{8(1-\nu)}\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}+\frac{1}{16(1-\nu)}\left(4(1-2\nu)-\frac{3}{\alpha^2-1}\right)g$$

其中: $\alpha = \frac{a_1}{a_2}$; $g = \frac{\alpha}{(\alpha^2-1)^{3/2}}\left[\alpha(\alpha^2-1)^{1/2}-\cosh^{-1}\alpha\right]$; a_1、a_2 分别表示椭圆球的长轴和短轴的长度。

附录2　横观各向同性介质中的Eshelby 张量

对横观各向同性介质，Eshelby 张量的表示式为

$$S_{ijkl} = \frac{1}{8\pi}C_{pqkl}(M_{jpq}+M_{jipq}) \tag{10}$$

其中: C_{ijkl} 为无限大横观各向同性介质的弹性张量; M_{ijkl} 可用夹杂的形状参数和基体的材料性质表示出来。设夹杂的 x_1 方向垂直于各向同性面，且椭球的形状为旋转椭球，即 $a_2 = a_3$。

令 $\rho = a_1/a_2$，$C_{2222} = d$，$\frac{1}{2}(C_{2222}-C_{2233}) = e$，$C_{2121} = f$，$C_{2211}+C_{2121} = g$，$C_{1111} = h$.

则非零的 M_{jkl} 分量为

$$M_{2222} = M_{3333} = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \Delta(1-x^2)\{[f(1-x^2)+h\rho^2x^2][(3e+d)(1-x^2)+4f\rho^2x^2]-g^2\rho^2x^2(1-x^2)\}dx$$

$$M_{1111} = 4\pi\int_0^1 \Delta\rho^2x^2[d(1-x^2)+f\rho^2x^2][e(1-x^2)+f\rho^2x^2]dx$$

$$M_{2323} = M_{3232} = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \Delta(1-x^2)\{[f(1-x^2)+h\rho^2x^2][(e+3d)(1-x^2)+4f\rho^2x^2]-3g^2\rho^2x^2(1-x^2)\}dx$$

$$M_{2121} = M_{3131} = 2\pi\int_0^1 \Delta\rho^2x^2\{[(d+e)(1-x^2)+2f\rho^2x^2][f(1-x^2)+h\rho^2x^2]-g^2\rho^2x^2(1-x^2)\}dx$$

$$M_{1313} = M_{1212} = 2\pi\int_0^1 \Delta(1-x^2)[d(1-x^2)+f\rho^2x^2][e(1-x^2)+f\rho^2x^2]dx$$

$$M_{2233} = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \Delta(1-x^2)^2\{g^2\rho^2x^2-(d-e)[f(1-x^2)+h\rho^2x^2]\}dx$$

$$M_{3311} = M_{2211} = (-2\pi)\int_0^1 \Delta g\rho^2x^2(1-x^2)[e(1-x^2)+f\rho^2x^2]dx$$

$$\Delta^{-1} = [e(1-x^2)+f\rho^2x^2]\{[d(1-x^2)+f\rho^2x^2][f(1-x^2)+h\rho^2x^2]-g^2\rho^2x^2(1-x^2)\}$$