复合材料学报 第26卷 第6期 12月 2009年
Acta Materiae Compositae Sinica Vol. 26 No. 6 December 2009

文章编号：1000-3851(2009)06-0201-09

纤维增强复合材料界面脱层和基体裂纹的模拟分析

罗吉祥*[1]，唐 春[1]，郭 然[2]
（1. 南昌工程学院 理学系，南昌 330099；2. 昆明理工大学 建筑工程学院，昆明 650000）

摘 要： 基于Ghosh提出的Voronoi单元有限元方法，构造能同时反映纤维增强复合材料界面脱层和基体裂纹扩展的单元(X-VCFEM单元)；应用界面力学理论和断裂力学理论，建立界面脱层、界面裂纹扩展方向和基体裂纹扩展的判断准则；结合网格重划分技术，模拟分析了只含有一个夹杂时界面脱层和基体裂纹扩展的过程，并通过与传统有限元计算结果的比较，验证X-VCFEM单元的可靠性和有效性；同时，模拟分析含任意随机分布夹杂的纤维增强复合材料界面脱层和基体裂纹的产生和扩展过程。结果表明：应用该方法模拟复杂多相复合材料裂纹问题具有计算速度快和精度高的优越性。

关键词： 纤维增强复合材料；X-VCEFM单元；界面脱层；基体裂纹；有限元方法
中图分类号： TB33 **文献标志码：** A

Numerical simulations of interfacial debonding and matrix cracking in fiber reinforced composites

LUO Jixiang*[1], TANG Chun[1], GUO Ran[2]
(1. Department of Science, Nanchang Institute of Technology, Nanchang 330099, China;
2. Faculty of Civil Engineering and Architecture, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650000, China)

Abstract: This paper introduces an extended Voronoi cell finite element model (X-VCFEM) proposed by Ghosh for modeling the propagation of interfacial debonding and matrix cracking in fiber reinforced composite materials. A series of criteria based on the theory of interface and fracture mechanics were proposed for assessing the damage development, which includes the interfacial debonding, the direction of damage at the interface and the crack propagation in the matrix. With a re-mesh strategy, comparisons of X-VEFEM simulations of one Voronoi element with reference results of traditional finite element method validate the effectiveness of X-VCFEM model. Meanwhile, the initiation and propagation of interfacial debonding and matrix cracking in fiber reinforced composite materials of random distributed fibers were simulated. The results show that this model for modeling the initiation and propagation of interfacial debonding and matrix cracking in complex fiber reinforced composite materials has the advantages of fast speed and high precision.

Keywords: fiber reinforced composite materials; X-VCEFM; interfacial debonding; matrix cracking; finite element method

近年来，随着科学技术的发展，复合材料在一些重要的工业领域，如航空、汽车、军事、核能和电子等领域得到了越来越广泛的应用，正在逐步代替一些传统的结构材料。纤维增强复合材料之所以获得广泛的应用，一方面得益于其许多优良性能[1]：(1) 纤维增强复合材料可提高材料的刚度或比刚度的潜力；(2) 增强体的加入，可以使以屈服应力或极限应力为代表的强度指标大大提高；(3) 增强体的存在，可以阻碍位错滑移，从而改善抗蠕变性能。另一方面，纤维增强复合材料中，纤维的加入在提高材料力学性能的同时，也带来了负面的影响：(1) 夹杂的存在会降低材料的延展性、断裂韧性，例如，短裂纹易于在平行于应力方向的平面上促发；(2) 夹杂的存在也加速了疲劳裂纹的形成和

收稿日期： 2008-10-20；**收修改稿日期：** 2009-02-14
基金项目： 云南省自然科学基金(2006A0013Q)
通讯作者： 罗吉祥，讲师，主要从事计算力学方面的研究工作 E-mail：laixiaoying77716@yahoo.com.cn

扩展，相应地降低了疲劳寿命；(3) 微结构的存在还加速了孔隙的产生，从而降低材料的抗蠕变损伤的能力。造成以上这些不利后果的诱因是复合材料的界面脱层和基体裂纹的扩展。这些不利因素都限制了纤维增强复合材料更广泛的应用[2-6]，它与夹杂形状、体积、数量、夹角和分布等拓扑结构特征密切相关。进一步了解夹杂拓扑结构对复合材料界面脱层和基体裂纹扩展性能的影响规律，将对材料的制作工艺和工程应用具有重要的参考价值。

应用 Voronoi 单元有限元法来研究纤维增强复合材料的学术团队主要有两个：一个是美国俄亥俄州立大学的 Ghosh 研究小组；另一个是以毕业于清华大学的郭然博士为首的团队。两个团队的研究工作基本上是同步的，但所建立的细观模型是有差异的。前者针对增强复合材料做了大量的研究，在考虑夹杂与基体脱层时是把夹杂与基体的界面附近一个微区域看成一个储存能量的弹簧装置，从能量的方面去考虑界面是否到达脱层的极限，相关研究成果有文献[7-17]；而后者考虑到界面附近应力的复杂情况，应用断裂力学的知识推导界面附近的应力公式，模拟脱层的过程，其研究成果有文献[18-20]。本文是在郭然博士的研究基础上所做的进一步研究，引入界面力学和断裂力学知识，得到界面附近的应力计算公式，正确描述了裂尖节点附近的应力变化，使计算模型更符合实际情况。

本文中基于 Ghosh 提出的 Voronoi 单元有限元方法和郭然[20]构造的反映界面脱层的 VCFEM 单元，推导能同时反映复合材料界面脱层和基体裂纹扩展的单元(X-VCFEM)。结合网格重划分技术，根据界面力学和断裂力学建立界面脱层和基体裂纹扩展的判断准则。应用简单的计算模型，与普通有限元软件的计算结果进行比较来验证单元的有效性。对含任意随机分布夹杂的纤维增强复合材料进行了裂纹发展的模拟分析，计算结果满足精度要求且大大提高了分析纤维增强复合材料裂纹扩展的工作效率。

1　满足界面脱层和基体裂纹的 Voronoi 单元

1.1　单元格式的推导

为了分析夹杂与基体之间的脱层和基体内部发生裂纹对结构微观演化和宏观性能的影响，考虑如图 1 所示的单元模型。

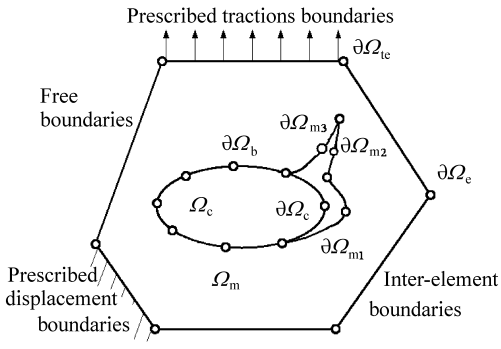


图 1　含有一个夹杂、考虑界面脱层和基体裂纹的 Voronoi 单元模型

Fig. 1　A Voronoi cell finite element of single fiber with interfacial debonding and matrix cracking

在夹杂与基体之间未脱层的界面 $\partial\Omega_b$ 上，满足面力连续条件

$$\boldsymbol{n}^c\cdot(\boldsymbol{\sigma}^{m1}-\boldsymbol{\sigma}^c)=0\qquad(\text{在 }\partial\Omega_b\text{ 上})\tag{1}$$

在脱层的界面上，面力为零：

$$\boldsymbol{n}^{m1}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{m1}=0\qquad(\text{在 }\partial\Omega_{m1}\text{ 上})\tag{2}$$

$$\boldsymbol{n}^c\cdot\boldsymbol{\sigma}^c=0\qquad(\text{在 }\partial\Omega_c\text{ 上})\tag{3}$$

在扩展的基体裂纹边界上，面力为零：

$$\boldsymbol{n}^{m2}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{m2}=0\qquad(\text{在 }\partial\Omega_{m2}\text{ 上})\tag{4}$$

$$\boldsymbol{n}^{m3}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{m3}=0\qquad(\text{在 }\partial\Omega_{m3}\text{ 上})\tag{5}$$

在公式(1)～(5)中：Ω 为任意一个空间；下标 b 表示基体与夹杂未脱层的边界；$\boldsymbol{n}$ 为边界上法向单位向量；$\boldsymbol{\sigma}$ 为应力向量；上标 c 表示夹杂部分；上标 m1 表示界面上的基体部分；上标 m2 表示基体裂纹面上一条裂纹边界；上标 m3 表示基体裂纹面上另一条裂纹边界。

基于应力杂交元的泛函公式，用 Lagrange 乘子法实施以上约束条件，容易得知 Lagrange 乘子是相应边界上的位移。于是得到修正后的增量形式的余能泛函

$$\begin{aligned}\prod{}^{e}_{mc}(\Delta\boldsymbol{\sigma},\Delta\boldsymbol{u})=&\int_{\Omega_e}\frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}+\Delta\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\sigma}+\Delta\boldsymbol{\sigma})\mathrm{d}\Omega\\&-\int_{\partial\Omega_e}\boldsymbol{n}^e(\boldsymbol{\sigma}+\Delta\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{u}+\Delta\boldsymbol{u})\mathrm{d}\partial\Omega\\&+\int_{\partial\Omega_{te}}(\boldsymbol{f}+\Delta\boldsymbol{f})(\boldsymbol{u}+\Delta\boldsymbol{u})\mathrm{d}\partial\Omega\\&+\int_{\partial\Omega_b}\boldsymbol{n}^b(\boldsymbol{\sigma}^m+\Delta\boldsymbol{\sigma}^m-\boldsymbol{\sigma}^c-\Delta\boldsymbol{\sigma}^c)(\boldsymbol{u}^b+\Delta\boldsymbol{u}^b)\mathrm{d}\partial\Omega\\&-\int_{\partial\Omega_{m1}}\boldsymbol{n}^{m1}(\boldsymbol{\sigma}^{m1}+\Delta\boldsymbol{\sigma}^{m1})(\boldsymbol{u}^{m1}+\Delta\boldsymbol{u}^{m1})\mathrm{d}\partial\Omega\\&-\int_{\partial\Omega_c}\boldsymbol{n}^c(\boldsymbol{\sigma}^c+\Delta\boldsymbol{\sigma}^c)(\boldsymbol{u}^c+\Delta\boldsymbol{u}^c)\mathrm{d}\partial\Omega\\&-\int_{\partial\Omega_{m2}}\boldsymbol{n}^{m2}(\boldsymbol{\sigma}^{m2}+\Delta\boldsymbol{\sigma}^{m2})(\boldsymbol{u}^{m2}+\Delta\boldsymbol{u}^{m2})\mathrm{d}\partial\Omega\end{aligned}$$

$$-\int_{\partial\Omega_{m3}} \boldsymbol{n}^{m3}(\boldsymbol{\sigma}^{m3}+\Delta\boldsymbol{\sigma}^{m3})(\boldsymbol{u}^{m3}+\Delta\boldsymbol{u}^{m3})\mathrm{d}\partial\Omega \tag{6}$$

其中：$\boldsymbol{f}$ 为边界荷载向量；$\Delta\boldsymbol{f}$ 为边界荷载增量向量；Π_{mc}^{e} 为一个单元的余能泛函；e 表示某个单元号；$\boldsymbol{S}$ 为弹性柔度矩阵；$\boldsymbol{u}$ 为节点位移；$\Delta\boldsymbol{u}$ 为位移增量。

在应力场满足平衡条件的前提下，对于二维问题，引用应力函数 $\Phi(x,y)$，得到满足平衡方程的应力增量方程

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_{xx}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2},\quad \Delta\boldsymbol{\sigma}_{yy}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2},\quad \Delta\boldsymbol{\sigma}_{xy}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \tag{7}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{cases}[\Delta\boldsymbol{\sigma}]^{m1}=\boldsymbol{P}^{m}\Delta\boldsymbol{\beta}^{m} & (\text{基体部分 }\Omega_m)\\ [\Delta\boldsymbol{\sigma}]^{m2}=\boldsymbol{P}^{m}\Delta\boldsymbol{\beta}^{m} & (\text{基体部分 }\Omega_m)\\ [\Delta\boldsymbol{\sigma}]^{m3}=\boldsymbol{P}^{m}\Delta\boldsymbol{\beta}^{m} & (\text{基体部分 }\Omega_m)\\ [\Delta\boldsymbol{\sigma}]^{m}=\boldsymbol{P}^{m}\Delta\boldsymbol{\beta}^{m} & (\text{基体部分 }\Omega_m)\\ [\Delta\boldsymbol{\sigma}]^{c}=\boldsymbol{P}^{c}\Delta\boldsymbol{\beta}^{c} & (\text{夹杂部分 }\Omega_c)\end{cases} \tag{8}$$

其中：上标含有 m 的表示基体部分；上标含有 c 的表示夹杂部分。

对于二维问题，$\Delta\boldsymbol{\sigma}$ 是包含 3 个应力分量的列矢量，$\Delta\boldsymbol{\beta}^{m}$ 和 $\Delta\boldsymbol{\beta}^{c}$ 均为列向量，$\boldsymbol{P}^{m}$ 和 $\boldsymbol{P}^{c}$ 是行数为 3 行，列数分别与 $\Delta\boldsymbol{\beta}^{m}$ 和 $\Delta\boldsymbol{\beta}^{c}$ 列数相同的系数矩阵。单元边界位移场由线性插值函数插值得到，对于某个单元的第 i 条边，位移为

$$[\boldsymbol{u}]=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{u}_1\\ \boldsymbol{u}_2\end{Bmatrix}=L\{\boldsymbol{q}\}=$$

$$\begin{bmatrix}1-a/l_i & 0 & a/l_i & 0\\ 0 & 1-a/l_i & 0 & a/l_i\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q_{2i-1}\\ q_{2i}\\ q_{2i+1}\\ q_{2i+2}\end{Bmatrix} \tag{9}$$

其中：l_i 为第 i 条边的长度；a 为离 i 节点的距离；$\boldsymbol{q}$ 为相应节点广义位移。同样，单元的边界位移增量为各个边界段节点广义位移增量的插值

$$\begin{cases}[\Delta\boldsymbol{u}]=L\{\Delta\boldsymbol{q}^{e}\} & (\text{单元边界 }\partial\Omega_e)\\ [\Delta\boldsymbol{u}]^{b}=L^{b}\{\Delta\boldsymbol{q}^{b}\} & (\text{夹杂与基体间未脱层边界 }\partial\Omega_b)\\ [\Delta\boldsymbol{u}]^{m1}=L^{m1}\{\Delta\boldsymbol{q}^{m1}\} & (\text{夹杂与基体间脱层处的基体边界 }\partial\Omega_{m1})\\ [\Delta\boldsymbol{u}]^{m2}=L^{m2}\{\Delta\boldsymbol{q}^{m2}\} & (\text{基体裂纹扩展的边界 }\partial\Omega_{m2})\\ [\Delta\boldsymbol{u}]^{m3}=L^{m3}\{\Delta\boldsymbol{q}^{m3}\} & (\text{基体裂纹扩展的边界 }\partial\Omega_{m3})\\ [\Delta\boldsymbol{u}]^{c}=L^{c}\{\Delta\boldsymbol{q}^{c}\} & (\text{夹杂与基体间脱层处的夹杂边界 }\partial\Omega_c)\end{cases} \tag{10}$$

式中，L 为拉格朗日线性插值函数。将式(8)和(10)代入式(6)，得到离散后的系统余能弱形式。据据修正余能泛函驻值条件，再将单元公式进行细化，凝聚内部自由度后即可得到系统的求解方程，具体可以查看文献[21]。

1.2 应力函数的选择

在多相复合材料体中，应力函数的选取对 X-VCFEM 单元的收敛性有很大的影响。充分考虑微观结构对单元的影响，应力函数的选取应该满足：(1) 应力函数应该考虑夹杂的形状；(2) 对于基体应力函数，在远离相界面的地方，形状的影响应该消失；(3)在相的界面处，应力函数应该满足面力连续条件；(4) 在基体裂纹扩展的 2 条新产生的边界上，应力函数要满足零面力和裂尖处的应力变化幅度大，并能使在两边界上互不影响，以便适合裂尖节点附近奇异性的问题。

1.2.1 基体应力函数形式的选择

为了能满足以上 4 个条件，本文中选择三部分组成应力函数，即多项式、互作用和微波基应力函数。其中前两部分应力函数的形式参考郭然[8]提出的应力函数形式，主要是描述单一材料和多相材料界面处附近应力分布情况；微波基应力函数则是为了描述基体内部裂尖附近应力分布而加入的，它的选择是参考 Li[17-18]提出处理裂尖附近应力场问题的函数构造方法。

微波基应力函数选择如下形式：

$$\Phi^{wvlt}(\xi,\eta)=\sum_{k=1,l=0,m=1,n=-n_n/2}^{k_n,l_n,m_n,n_n/2}\Phi_{k,l,m,n}(\xi,\eta) \tag{11}$$

其中：

$$\Phi_{k,l,m,n}(\xi,\eta)=\exp\left[-\left(\frac{\xi-b_n}{a_m}\right)^2\Big/2\right]\exp\left[-\left(\frac{\eta-d_l}{c_k}\right)^2\Big/2\right]\boldsymbol{\beta}_{k,l,m,n} \tag{12}$$

于是得到应力形式如式(13)所示。其中：ξ、η 分别为局部坐标系中的横坐标和纵坐标；k，l，m，n 为任意连续的平移和扩张参数；Φ^{wvlt} 为考虑裂尖节点附近应力奇异的应力函数。

需要指出的是，以上公式中的坐标是以基体裂尖点为坐标原点，以裂纹面为 x 轴的局部坐标。因此需要进行坐标转换，即有

$$\begin{Bmatrix}\Delta\boldsymbol{\sigma}_{\xi\xi}\\ \Delta\boldsymbol{\sigma}_{\eta\eta}\\ \Delta\boldsymbol{\sigma}_{\xi\eta}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial^2\Phi^{\mathrm{wvlt}}}{\partial\eta^2}\\ \dfrac{\partial^2\Phi^{\mathrm{wvlt}}}{\partial\xi^2}\\ \dfrac{\partial^2\Phi^{\mathrm{wvlt}}}{\partial\xi\partial\eta}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\displaystyle\sum_{k=1,l=0,m=1,n=-n_n/2}^{k_n,l_n,m_n,n_n,/2}\dfrac{\partial^2(\mathrm{e}^{-[(\xi_1-b_n)/a_m]/2}\mathrm{e}^{-[(\eta_1-d_l)/c_k]/2})}{\partial\eta^2}\Delta\boldsymbol{\beta}_{k,l,m,n}\\ \displaystyle\sum_{k=1,l=0,m=1,n=-n_n/2}^{k_n,l_n,m_n,n_n,/2}\dfrac{\partial^2(\mathrm{e}^{-[(\xi_1-b_n)/a_m]/2}\mathrm{e}^{-[(\eta_1-d_l)/c_k]/2})}{\partial\xi^2}\Delta\boldsymbol{\beta}_{k,l,m,n}\\ -\displaystyle\sum_{k=1,l=0,m=1,n=-n_n/2}^{k_n,l_n,m_n,n_n,/2}\dfrac{\partial^2(\mathrm{e}^{-[(\xi_1-b_n)/a_m]/2}\mathrm{e}^{-[(\eta_1-d_l)/c_k]/2})}{\partial\xi\partial\eta}\Delta\boldsymbol{\beta}_{k,l,m,n}\end{Bmatrix}\tag{13}$$

$$\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{\sigma}_{xx} & \Delta\boldsymbol{\sigma}_{xy}\\ \Delta\boldsymbol{\sigma}_{xy} & \Delta\boldsymbol{\sigma}_{yy}\end{bmatrix}^{\mathrm{wvlt}}=$$

$$[\boldsymbol{Q}_{\mathrm{w}}]^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2\Phi^{\mathrm{wvlt}}}{\partial\eta^2} & -\dfrac{\partial^2\Phi^{\mathrm{wvlt}}}{\partial\xi\partial\eta}\\ -\dfrac{\partial^2\Phi^{\mathrm{wvlt}}}{\partial\xi\partial\eta} & \dfrac{\partial^2\Phi^{\mathrm{wvlt}}}{\partial\xi^2}\end{bmatrix}[\boldsymbol{Q}_{\mathrm{w}}]\tag{14}$$

其中：

$$[\boldsymbol{Q}_{\mathrm{w}}]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\eta}{\partial y} & \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\\ \dfrac{\partial\xi}{\partial y} & \dfrac{\partial\xi}{\partial x}\end{bmatrix}\tag{15}$$

这样，一个 X-VCFEM 单元的基体应力场可以表示为

$$\begin{Bmatrix}\Delta\boldsymbol{\sigma}_{xx}\\ \Delta\boldsymbol{\sigma}_{yy}\\ \Delta\boldsymbol{\sigma}_{xy}\end{Bmatrix}_{\mathrm{e}}=\begin{Bmatrix}\Delta\boldsymbol{\sigma}_{xx}\\ \Delta\boldsymbol{\sigma}_{yy}\\ \Delta\boldsymbol{\sigma}_{xy}\end{Bmatrix}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{poly}}+\begin{Bmatrix}\Delta\boldsymbol{\sigma}_{xx}\\ \Delta\boldsymbol{\sigma}_{yy}\\ \Delta\boldsymbol{\sigma}_{xy}\end{Bmatrix}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{rec}}+\begin{Bmatrix}\Delta\boldsymbol{\sigma}_{xx}\\ \Delta\boldsymbol{\sigma}_{yy}\\ \Delta\boldsymbol{\sigma}_{xy}\end{Bmatrix}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{wvlt}}=$$

$$\begin{Bmatrix}\displaystyle\sum_{p,q}\dfrac{\partial^2(\xi^p\eta^q)}{\partial\eta^2}\Delta\boldsymbol{\beta}_{pq}+\sum_{p,q,i}\dfrac{\partial^2(\xi^p\eta^q f^i)}{\partial\eta^2}\Delta\boldsymbol{\beta}_{pqi}\\ \displaystyle\sum_{p,q}\dfrac{\partial^2(\xi^p\eta^q)}{\partial\xi^2}\Delta\boldsymbol{\beta}_{pq}+\sum_{p,q,i}\dfrac{\partial^2(\xi^p\eta^q f^i)}{\partial\xi^2}\Delta\boldsymbol{\beta}_{pqi}\\ \displaystyle\sum_{p,q}-\dfrac{\partial^2(\xi^p\eta^q)}{\partial\xi\partial\eta}\Delta\boldsymbol{\beta}_{pq}+\sum_{p,q,i}-\dfrac{\partial^2(\xi^p\eta^q f^i)}{\partial\xi\partial\eta}\Delta\boldsymbol{\beta}_{pqi}\end{Bmatrix}$$

$$+\begin{Bmatrix}\Delta\boldsymbol{\sigma}_{xx}\\ \Delta\boldsymbol{\sigma}_{yy}\\ \Delta\boldsymbol{\sigma}_{xy}\end{Bmatrix}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{wvlt}}$$

$$=[[\boldsymbol{P}]_{\mathrm{poly}}^{\mathrm{m}}\quad[\boldsymbol{P}]_{\mathrm{rec}}^{\mathrm{m}}\quad[\boldsymbol{P}]_{\mathrm{wvlt}}^{\mathrm{m}}]_{\mathrm{e}}\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{\beta}_{pq}\\ \Delta\boldsymbol{\beta}_{pqi}\\ \Delta\boldsymbol{\beta}_{k,l,m,n}\end{bmatrix}_{\mathrm{e}}$$

$$=[\boldsymbol{P}^{\mathrm{m}}]_{\mathrm{e}}[\Delta\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{m}}]_{\mathrm{e}}\tag{16}$$

其中：p 和 q 为多项式应力函数的项数；i 为互作用应力函数的项数；$[\boldsymbol{P}_{\mathrm{poly}}^{\mathrm{m}}]$为基体多项式应力函数应力系数矩阵；$[\boldsymbol{P}_{\mathrm{rec}}^{\mathrm{m}}]$为基体互作用应力函数应力系数矩阵；$[\boldsymbol{P}_{\mathrm{wvlt}}^{\mathrm{m}}]$为反应裂尖节点附近的微波基应力函数应力系数矩阵；$[\boldsymbol{P}^{\mathrm{m}}]_{\mathrm{e}}$ 为基体部分应力函数应力系数矩阵。

1.2.2　夹杂应力函数形式的选择

由于夹杂部分没有裂纹扩展部分，只需两部分应力函数即可很好地描述夹杂部分的应力分布情况，即多项式应力函数和互作用应力函数，这样夹杂部分的应力场可以表示为

$$\begin{Bmatrix}\Delta\boldsymbol{\sigma}_{xx}^{\mathrm{c}}\\ \Delta\boldsymbol{\sigma}_{yy}^{\mathrm{c}}\\ \Delta\boldsymbol{\sigma}_{xy}^{\mathrm{c}}\end{Bmatrix}_{\mathrm{e}}=$$

$$\begin{Bmatrix}\displaystyle\sum_{p,q}\dfrac{\partial^2(\xi^p\eta^q)}{\partial\eta^2}\Delta\boldsymbol{\beta}_{pq}+\sum_{p,q,i}\dfrac{\partial^2(\xi^p\eta^q f^i)}{\partial\eta^2}\Delta\boldsymbol{\beta}_{pqi}\\ \displaystyle\sum_{p,q}\dfrac{\partial^2(\xi^p\eta^q)}{\partial\xi^2}\Delta\boldsymbol{\beta}_{pq}+\sum_{p,q,i}\dfrac{\partial^2(\xi^p\eta^q f^i)}{\partial\xi^2}\Delta\boldsymbol{\beta}_{pqi}\\ \displaystyle\sum_{p,q}-\dfrac{\partial^2(\xi^p\eta^q)}{\partial\xi\partial\eta}\Delta\boldsymbol{\beta}_{pq}+\sum_{p,q,i}-\dfrac{\partial^2(\xi^p\eta^q f^i)}{\partial\xi\partial\eta}\Delta\boldsymbol{\beta}_{pqi}\end{Bmatrix}$$

$$=[\boldsymbol{P}_{\mathrm{poly}}^{\mathrm{c}}]_{\mathrm{e}}\begin{Bmatrix}\Delta\boldsymbol{\beta}_{11}\\ \vdots\\ \Delta\boldsymbol{\beta}_{pq}\\ \vdots\end{Bmatrix}_{\mathrm{e}}+[\boldsymbol{P}_{\mathrm{rec}}^{\mathrm{c}}]_{\mathrm{e}}\begin{Bmatrix}\Delta\boldsymbol{\beta}_{111}\\ \vdots\\ \Delta\boldsymbol{\beta}_{pqi}\\ \vdots\end{Bmatrix}_{\mathrm{e}}$$

$$=[\boldsymbol{P}^{\mathrm{c}}]_{\mathrm{e}}\{\Delta\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{c}}\}_{\mathrm{e}}\tag{17}$$

其中：$[\boldsymbol{P}_{\mathrm{poly}}^{\mathrm{c}}]_{\mathrm{e}}$ 为夹杂多项式应力函数应力系数矩阵；$[\boldsymbol{P}_{\mathrm{rec}}^{\mathrm{c}}]_{\mathrm{e}}$ 为夹杂互作用应力函数应力系数矩阵；$[\boldsymbol{P}^{\mathrm{c}}]_{\mathrm{e}}$ 为夹杂部分应力函数应力系数矩阵。

1.3　断裂准则的建立

本文中断裂准则分为两部分内容：第一部分是界面附近的断裂准则，应用界面力学理论，针对纤维增强复合材料基体和夹杂界面进行定量的强度评价，一方面要求获得界面裂纹的应力强度因子，另一方面要求获得界面端奇异应力场和界面裂纹裂尖奇异应力场，然后建立破坏准则进行分析、判断。由于振荡应力奇异性和界面端的非 $1/\sqrt{r}$的奇异性，所以不能直接采用材料力学或断裂力学的破坏准则，而必须根据界面的具体特征，重新建立断裂准则，这也是与其它准则的不同之处。第二部分是裂纹向基体扩展后的裂纹是否继续进行的断裂准则，主要依据断裂力学的强度评价准则来判断。

1.3.1 界面脱层的判断准则

界面是否脱层主要是根据界面端的应力场分布情况来判断。根据许金泉教授提出的应力分布情况得到界面端附近的奇异应力场为

$$\sigma_{\theta j}=\frac{K_1}{r^{1-\lambda}}\begin{bmatrix} a_j\{(2\lambda+1)\cos\lambda\theta\cos\theta+\sin\lambda\theta\sin\theta \\ -\cos[(\lambda+1)\theta+(-1)^j\lambda\pi]\} \\ -b_j\{(2\lambda+1)\sin\lambda\theta\cos\theta-\cos\lambda\theta\sin\theta \\ +\sin[(\lambda+1)\theta+(-1)^j\lambda\pi]\} \end{bmatrix} \tag{18}$$

其中：$\sigma_{\theta j}$ 为某点在 θ 方向上的应力值；θ 为某点在整体坐标系中的角度值；λ 为界面端特征值，取值范围为[0,1]，当 $\lambda=0$ 时对应的是一个刚体位移场，$\lambda=1$ 时对应的是一个常应力场，并且一般情况下为零应力场；r 是某点到裂尖节点的距离；a_j 和 b_j 为计算参数，具体的表达式见文献[22]。公式(18)中只有 K_1 是未知的，因此计算出来的 K_1 如果满足条件 $K_1\geqslant K_{\mathrm{IC}}$ 时就认为界面脱层，其中 K_{IC} 为界面两材料的第Ⅰ型断裂韧性中的较小值。

1.3.2 界面裂纹向基体扩展的判断准则

界面脱层后，在界面上就形成了裂尖节点，因而在裂尖节点附近的应力变化幅度非常大而且应力值也很大，正确地描述该节点附近的应力分布情况是判断裂纹发展方向的关键。由界面力学理论得到界面裂尖节点附近应力场可以表达为

$$\sigma_{\theta j}=\frac{\sqrt{K_1^2+K_2^2}}{2\sqrt{2\pi r}\cosh(\varepsilon\pi)}(B_j\cos Q-C_j\sin Q) \tag{19}$$

其中：B_j 和 C_j 为待定参数；Q 为界面裂纹到裂尖的距离；ε 为界面裂纹的振荡因子。上述各参数的具体计算表达式见文献[22]。由公式(19)可以求出 $\sqrt{K_1^2+K_2^2}$ 的值。如果满足下式条件，则认为在界面裂尖节点处向基体 θ 方向扩展裂纹：

$$K_{\theta\max}=\frac{\sqrt{K_1^2+K_2^2}}{2\cosh(\varepsilon\pi)}B_j\geqslant K_{\mathrm{IC}} \tag{20}$$

1.3.3 基体裂纹继续扩展的判断准则

当界面裂纹向基体扩展之后，正确模拟裂纹的发展方向是很重要的。采用断裂力学关于平面裂纹的断裂准则进行判断[23]，可以得到基体裂纹裂尖附近的应力分布情况如下：

$$\sigma_x=\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)-\frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\left(2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\sigma_y=\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)+\frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \tag{21}$$

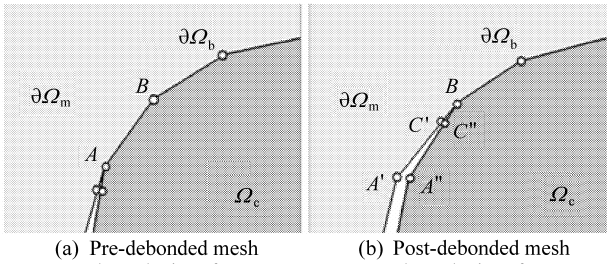
由公式(21)计算出 K_{I} 和 K_{II}，当任意点的应力强度因子满足以下条件时，认为裂纹将在基体内部继续发展：

$$K_{\mathrm{I}}>K_{\mathrm{IC}}\quad 或\quad K_{\mathrm{II}}>K_{\mathrm{IIC}} \tag{22}$$

其中：θ，r 的物理含义与 1.3.1 中的一样；K_{I}、K_{II} 分别对应于Ⅰ型和Ⅱ型裂纹下的应力强度因子；K_{IC} 和 K_{IIC} 是分别对应基体的第Ⅰ、Ⅱ型断裂韧性。

1.4 网格重划分技术

为了真实模拟纤维增强复合材料的界面脱层过程，随着脱层区域的改变，不可避免地要改变相应的网格结构，这就要用到有限元的网格重化分技术。以下面这种典型情况来分析网格重化分技术的具体实施方法。在界面上一旦有新的脱层产生，原来的 1 个节点位置就产生了 1 个新的节点，形成 1 个节点对，分别代表基体和夹杂在脱层裂纹面上的节点；同时为了能更好地满足裂纹面上面力为零的条件，在靠近界面裂尖点附近生成 1 个新的节点对，如图 2 所示。



(a) Pre-debonded mesh along the interface (b) Post-debonded mesh along the interface

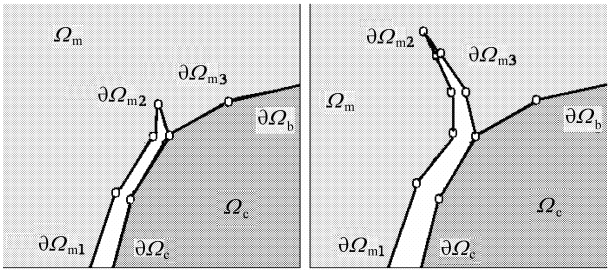
图 2 界面的网格重划分过程

Fig. 2 Remeshing progress at the interface

同理，在发生基体裂纹扩展之后，随着裂纹在基体内部的扩展，新的节点和裂尖节点不断出现，为了能更好地满足基体裂纹面上面力为零的条件，在靠近基体裂纹裂尖节点附近增加 1 个新的节点对，如图 3 所示。

2 计算实例

针对算例做几点说明：(1) 夹杂相面积占总面积的比值控制在 3%～10%的范围，夹杂面积比大小对精度的影响将会在夹杂拓扑结构特征相关论文中阐述；(2) 每个 X-VCFEM 单元只包含 1 个夹



(a) Pre-debonded mesh along the matrix cracking　(b) Post-debonded mesh along the matrix cracking

图 3　基体的网格重划分过程

Fig. 3　Remeshing progress in the matrix

杂，当 2 个夹杂很近时，夹杂距离 2 个 X-VCFEM 单元的公共边界很近，此时的夹杂分布是随机变化的，同样在研究夹杂拓扑结构特征对界面脱层和基体裂纹扩展影响的论文中进行阐述；(3) 由于本文中未讨论塑性阶段的情况，所以 2 个相邻 X-VCFEM 单元中的基体裂纹贯通的情况本文中没有考虑，这将在研究纤维增强复合材料的热机疲劳损伤时予以考虑。

2.1　X-VCFEM 单元有效性的验证

X-VCFEM 单元是基于杂交元理论为基础的，为了验证它的有效性和优越性，使其应用于纤维粒增强基体复合材料的数值模拟。本文中采用的手段是将 X-VCFEM 程序的计算结果和普通有限元软件的结果进行比较来说明。比较的内容主要是应力的云图情况和某些特殊部位(即界面、裂纹面和裂尖处)的应力值大小。

在本算例中，X-VCFEM 模型包含 1 个简单的 Voronoi 单元，普通有限元模型由包含大量单元的细密有限元网格构成。X-VCFEM 的有效性通过与普通有限元的计算结果比较得以验证。要模拟的模型是在 1 个 20 mm×20 mm 正方形的基体里包含 1 个长半轴和短半轴均为 2 mm 的多边形夹杂，其体积分数为 3%。夹杂位于正方形基体的中心位置，夹杂由 1 个十边形的结构代表，如图 4 所示。初始时，如模型 4(b)所示，界面各边不含脱层。随着载荷的增加，夹杂两边产生脱层和向基体扩展裂纹节点，如模型 4(c)、模型 4(d)和模型 4(e)所示，分别在界面上的 2×2 个边产生了脱层，从右边裂尖节点向基体扩展出 1 个和 2 个节点。

对应脱层和扩展过程，分别建立 4 个用于对比分析的普通有限元模型，由 6128 个二阶等参平面应力 6 节点三角形单元构成，包含 13000 左右个节点；X-VCFEM 模型由 1 个 Voronoi 单元构成，如图 4 所示。单元内包括 8 个外部节点、10 至 8 个粘接界面节点、0 到 6 个脱层界面节点对和 0 到 4 个基体裂纹节点。单元内基体部分的应力函数包含 131 项(其中：42 项多项式应力函数项、33 项互作用应力函数项和 56 项微波应力函数项)；夹杂部分的应力函数包含 52 项多项式应力函数项。

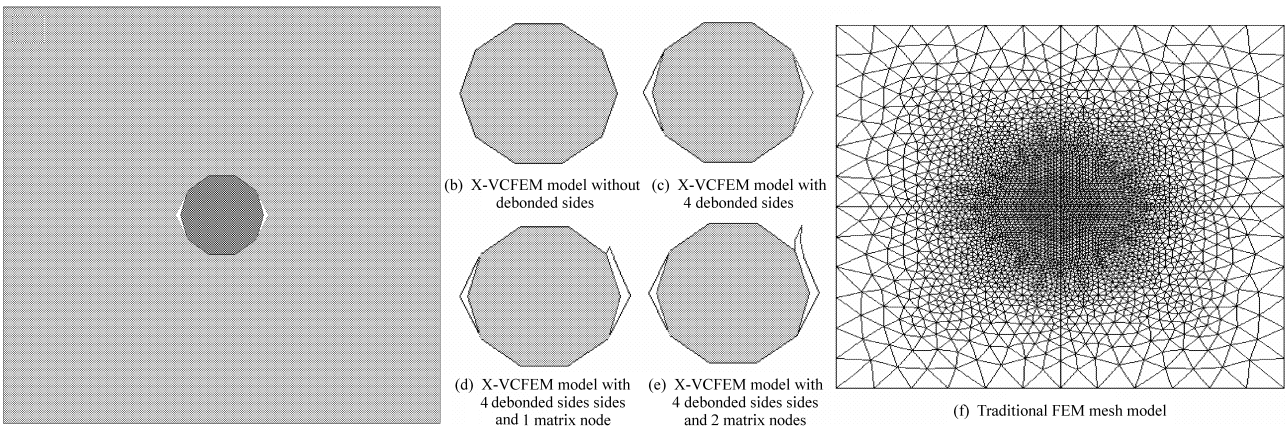
为了便于对比分析，X-VCFEM 模型和普通有限元模型所受边界条件和位移载荷完全相同：左端水平位移为 0；上下两端垂直方向位移为 0；右端给定位移。模型的材料特性如下：

基体部分 $E_m=150$ GPa，$\nu_m=0.33$；

夹杂部分 $E_c=300$ GPa，$\nu_c=0.25$；

断裂韧性 $K_{IC}=0.7$ MPa·m$^{1/2}$。

右端位移荷载施加方案如下：首先给定右端 0.003 mm 的位移载荷，在以后的每个荷载增量步



(a) X-VCFEM mesh model　(b) X-VCFEM model without debonded sides　(c) X-VCFEM model with 4 debonded sides　(d) X-VCFEM model with 4 debonded sides sides and 1 matrix node　(e) X-VCFEM model with 4 debonded sides sides and 2 matrix nodes　(f) Traditional FEM mesh model

图 4　含有 1 个夹杂的正方形板

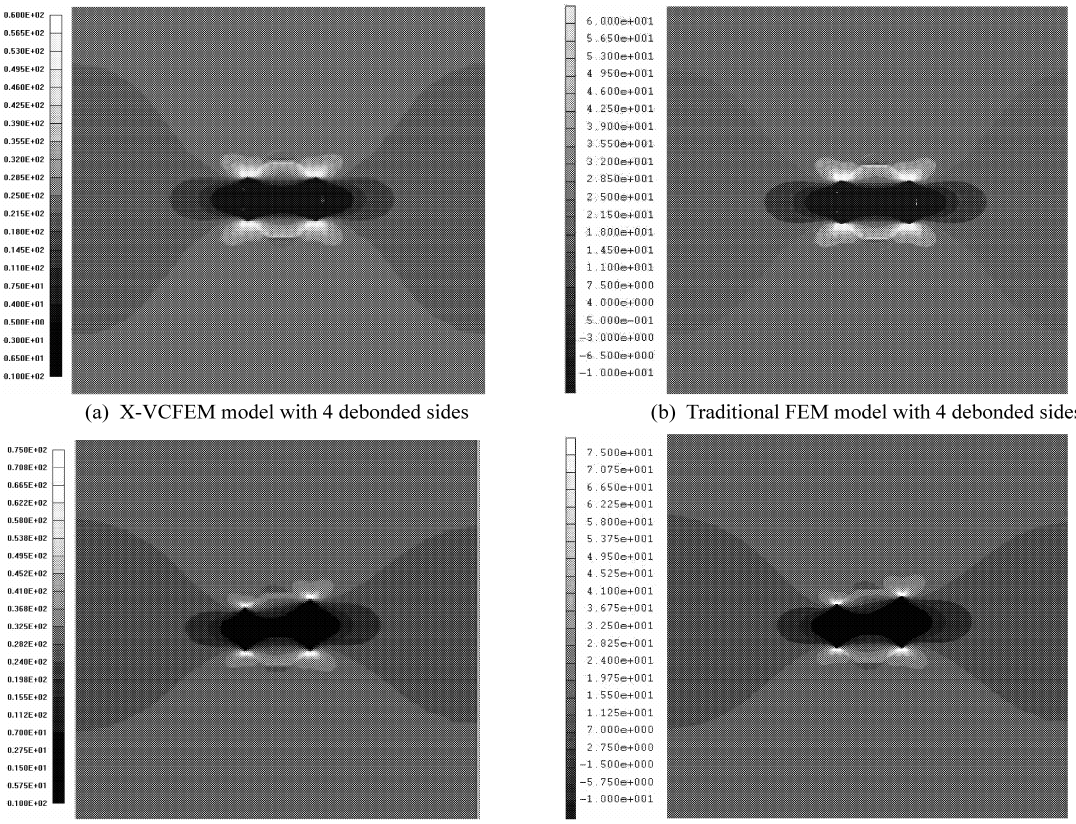
Fig. 4　A square plate with a single fiber

中，给定 0.0001 mm 的载荷。在 X-VCFEM 模型中，由于当位移载荷较小时，模型内的应力值比较小，而当位移载荷随荷载增量步的增大而增加时，模型内的应力值越来越大，所以在后处理程序中绘制应力云图时采用不同的应力最大值和最小值，这样模型内的应力分布情况比较清楚；在普通有限元模型中，都是分别考虑 X-VCFEM 模型实际情况，建立不同的网格细划模型，尤其是在基体和界面的交界处附近、界面裂纹裂尖点附近和基体内部裂纹裂尖点附近加大细划程度，这样才能更准确地描绘裂尖点附近的应力场情况。分别将界面有脱层和裂纹在基体内部继续扩展到 2 个节点，2 种情况计算所得 X-VCFEM 模型和普通有限元模型的水平方向应力 σ_x 云图如图 5 所示。从图中不难发现，2 种模型计算所得的应力云图是一致的，从而验证了 X-VCFEM 单元的有效性。

综上所述，2 种模型的结果是一致的，同时还可从理论上进一步分析：X-VCFEM 单元的理论基础是杂交元理论，它是以节点应力作为未知量来求解的，因而得到的应力云图非常接近精确值；在普通有限元的计算中，是以节点的位移作为未知量，要求某点的应力值，必须通过应力应变的关系换算求得，在换算过程中涉及到插值函数的求导运算，从而降低了应力应变的精确性[24]，而要解决这一矛盾的方法是将模型网格最大限度的细化，本例中普通有限元模型网格是非常细密的，其缺点就是增加了计算的工作量。

2.2 复杂复合材料的损伤模拟

经过上面有效性验证算例中可以知道，X-VCFEM 单元的计算结果满足要求，而且 X-VCFEM 单元的单元数和节点数远远少于普通有限元的数量，从而减少了计算工作量，提高了工作效率。下面对复杂的纤维增强复合材料进行裂纹模拟分析，其中含有大量任意大小、方向和分布的夹杂，如图 6 所示。目标模型是在 1 个 2 mm×1 mm 的正方形板上随机分布着 43 个任意大小、方向的椭圆形夹杂，每个夹杂的界面由 16 段直线边构成。随着载荷的增加，部分界面节点处的应力强度因子



(a) X-VCFEM model with 4 debonded sides

(b) Traditional FEM model with 4 debonded sides

(c) X-VCFEM model with 4 debonded sides and 2 matrix nodes

(d) Traditional FEM model with 4 debonded sides and 2 matrix nodes

图 5 X-VCFEM 模型和普通有限元模型水平应力云图(应力单位：MPa)

Fig. 5 Comparisons of contours plots of horizontal stress component σ_x in X-VCFEM model with traditional FEM model (stress unit: MPa)

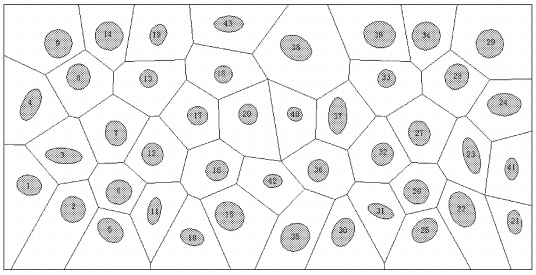


图 6　复杂复合材料的 X-VCFEM 模型

Fig. 6　X-VCFEM model of complex composite

大于材料的断裂韧性，导致界面段产生脱层，并从裂尖节点向基体扩展，应力强度因子大于材料断裂韧性的节点在网格重划分后由 1 个节点对代替。X-VCFEM 模型中，单元内基体部分的应力函数系数项数随单元外边数的不同而改变；夹杂部分的应力函数包含 52 项多项式应力函数项。

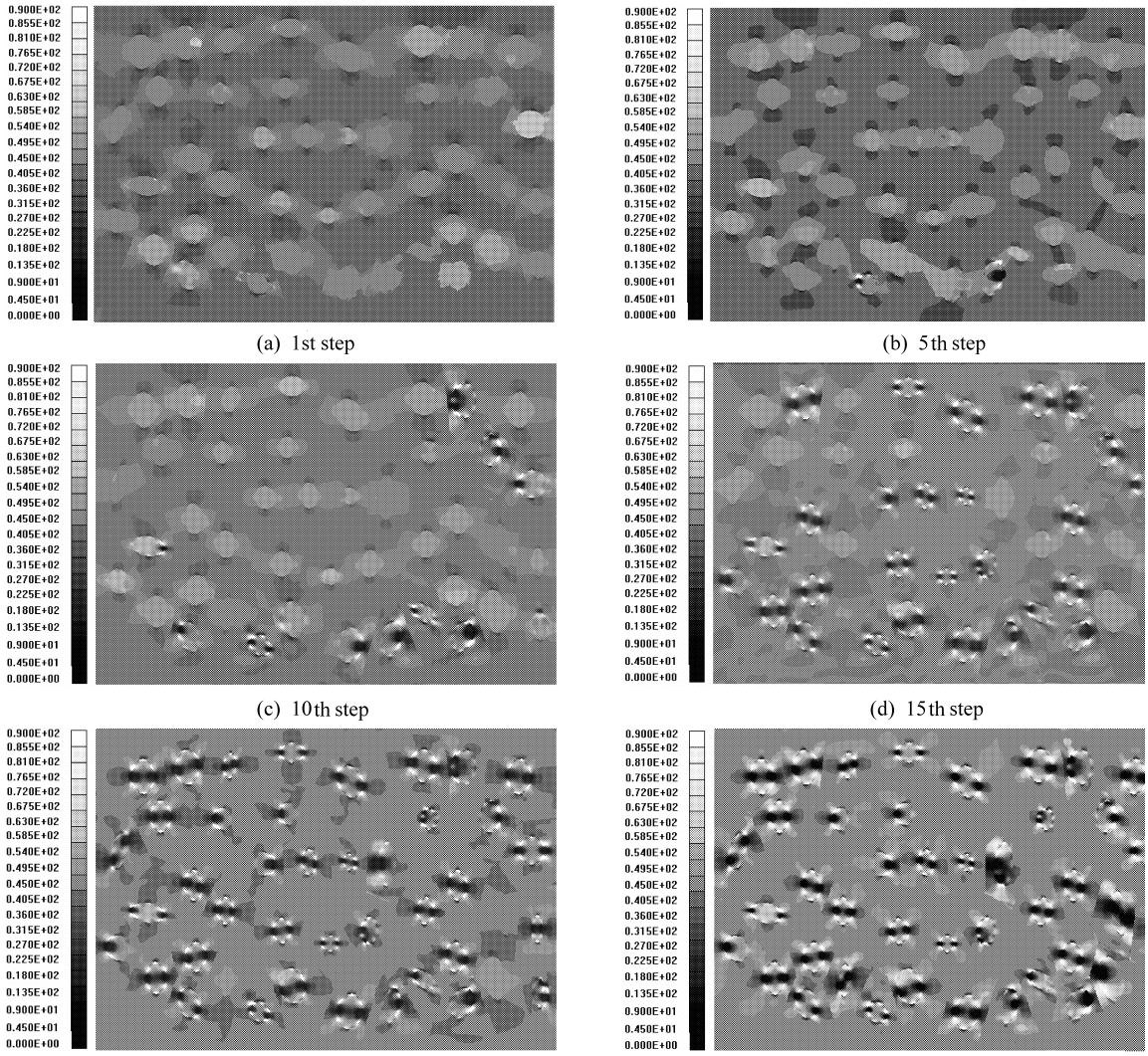
本例计算中的位移边界情况是：上下两端的 y 方向位移固定为零，左端的 x 方向位移也固定为零，只施加水平向右的位移荷载。X-VCFEM 模型对整个结构在载荷作用下逐步产生损伤的过程模拟如下：第一个增量步，右端的给定位移为 0.0003 mm；随后的每一个增量步，位移增量为 0.0001 mm。模型的材料特性如下：

基体部分 $E_m=150$ GPa，$\nu_m=0.33$；

夹杂部分 $E_c=300$ GPa，$\nu_c=0.25$；

断裂韧性 $K_{IC}=0.7$ MPa·m$^{1/2}$。

为了便于清楚地了解复合材料界面脱层和基体裂纹扩展的整个过程，图 7 列出了 6 个关键加载阶



(a) 1st step　(b) 5th step

(c) 10th step　(d) 15th step

(e) 20th step　(f) 25th step

图 7　复杂复合材料水平方向应力云图(应力单位：MPa)

Fig. 7　Contour plots of horizontal stress component σ_x of complex composite (stress unit: MPa)

段的水平方向应力云图。从这些云图可以把复合材料的损伤模拟分成以下 4 个阶段：(1) 如图 7(a)所示，整个模型中的材料没有出现裂纹，在大部分基体和夹杂交界处(即界面)的外载荷方向出现很高的应力，此时材料处于一个完全弹性状态；(2) 随着外加荷载步的增加，在模型中材料的界面出现了脱层现象，如图 7(b)，由云图可以看出，在脱层的位置出现了零面力；(3) 随着荷载步的进一步增加，裂纹已经开始从界面上的裂纹裂尖节点向基体内部扩展开来，如图 7(c)所示；(4) 当荷载步不断增加时，复合材料中的界面脱层和基体裂纹就大量的出现，如图 7(f)所示，此时几乎所有的 Voronoi 单元内基体和夹杂界面发生了脱层以及基体裂纹扩展，若把弹性范围作为设计依据，则可认为材料已经损伤破坏了。

3 结 论

(1) 基于 Ghosh 提出的 Voronoi 单元有限元方法，构造能同时反映纤维增强复合材料界面脱层和基体裂纹扩展的 X-VCFEM 单元。同时选择适当的多项式应力函数、互作用应力函数和微波基应力函数形式描述基体、夹杂、界面和裂纹附近的应力分布。

(2) 应用界面力学和断裂力学的相关理论，建立界面脱层、界面裂纹扩展方向和基体裂纹扩展的判断准则。

(3) 在裂纹面上结合网格重划分技术，模拟分析了只含有 1 个夹杂时界面脱层和基体裂纹扩展的过程，并通过与传统有限元计算结果的比较，证实了本文中提出的单元的可靠性和有效性。

(4) 应用 X-VCFEM 单元模拟了含有 43 个随机分布夹杂的纤维增强复合材料的损伤过程，显示了此方法模拟复杂复合材料计算速度快和精度高的优越性。

(5) 夹杂形状、体积、数量、夹角和分布等拓扑结构特征对界面脱层和基体裂纹扩展影响很大，将在以后的论文中阐述。

参考文献：

[1] 蒋咏秋. 复合材料力学 [M]. 西安：西安交通大学出版社，1990：5-11.

[2] Lewandowski J J, Manoharan M, Hunt W H. Fracture characteristics of an Al-Si-Mg model composite system [J]. Materials Science & Engineering A, 1993, A172(1/2): 63-69.

[3] Llorca J, Gonzalaez C. Microstructural factors controlling the strength and ductility of particle-reinforced metal-matrix composites [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1998, 46(1): 1-28.

[4] Mummery P M, Derby B, Scruby C B. Acoustic emission from particulate-reinforced metal matrix composites [J]. Acta Metallurgica et Materialia, 1993, 41(5): 1431-1445.

[5] Brechet Y, Embury J D, Tao S. Damage initiation in metal matrix composites [J]. Acta Metallurgica et Materialia, 1991, 39(8): 1781-1786.

[6] Corbin S, Wilkinson D. The influence of particle distribution on the mechanical response of a particulate metal matrix composites [J]. Acta Metallurgica et Materialia, 1994, 42(4): 1311-1318.

[7] Moorthy S, Ghosh S. Adaptivity and convergence in the voronoi cell finite element model for analyzing heterogeneous materials [J]. Comput Meth Appl Mech Eng, 2000, 185(1): 37-74.

[8] Ghosh S, Moorthy S. Three dimensional voronoi cell finite element model for modeling microstructures with ellipsoidal heterogeneities [J]. Comput Mech, 2004, 34(6): 510-531.

[9] Li S, Ghosh S. Debonding in composite microstructures with morphologic variations [J]. Int J Comput Methods, 2004, 1(1): 121-149.

[10] Li S, Ghosh S. Extended voronoi cell finite element model for multiple cohesive crack propagation in brittle materials [J]. Int J Numer Methods Eng, 2006, 65(7): 1028-1067.

[11] Raghavan P, Ghosh S. A continuum damage mechanics model for unidirectional composites undergoing interfacial debonding [J]. Mechanics of Materials, 2005, 37(9): 955-979.

[12] Lee K, Ghosh S. A microstructure based numerical method for constitutive modeling of composite and porous materials [J]. Materials Science and Engineering, 1999, A272(5): 120-133.

[13] Ghosh S, Bai J, Raghavan P. Concurrent multi-level model for damage evolution in microstructurally debonding composites [J]. Mechanics of Materials, 2007, 39(4): 241-266.

[14] Raghavan P, Ghosh S. Concurrent multi-scale analysis of elastic composites by a multi-level computational model [J]. Computer Methods Applied Mech Engrg, 2004, 193(10): 497-538.

[15] Raghavan P, Li S, Ghosh S. Two scale response and damage modeling of composite materials [J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2004, 40(10): 1619-1640.

[16] Ghosh S, Ling Y, Majumdar B. Interfacial debonding analysis in multiple fiber reinforced composites [J]. Mechanics of Materials, 2000, 32(10): 561-591.

[17] Li S, Ghosh S. Modeling interfacial debonding and matrix cracking in fiber reinforced composites by the extended Voronoi cell FEM [J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2007, 43(5): 397-410.

[18] 郭 然，施惠基，姚振汉. 颗粒增强复合材料热机疲劳性能的模拟分析 [J]. 材料工程，2003，32(10)：80-84.
Guo Ran, Shi Huiji, Yao Zhenhan. Simulation of the thermal-mechanical fatigue behavior for particle reinforced composites [J]. Journal of Materials Engineering, 2003, 32(10): 80-84.

[19] 郭 然，施惠基，姚振汉. 颗粒增强复合材料界面开裂力学性能的模拟 [J]. 航空材料学报，2003，23(2)：62-66.
Guo Ran, Shi Huiji, Yao Zhenhan. Simulation of the fracture behavior of inclusion-matrix interface for particle reinforced composites [J]. Journal of Aeronautical Materials, 2003, 23(2): 62-66.

[20] 郭 然. 颗粒增强复合材料界面脱层和热机疲劳性能的数值模拟 [D]. 北京：清华大学，2003.

[21] 罗吉祥. 颗粒增强复合材料界面脱层和基体裂纹的数值模拟 [D]. 昆明：昆明理工大学，2008.

[22] 许金泉. 界面力学 [M]. 北京：科学出版社，2006：121-155.

[23] 黄克智. 弹塑性断裂力学 [M]. 北京：清华大学出版社，1985：40-49.

[24] 王勖成. 有限单元法 [M]. 北京：清华大学出版社，2005：163-168.