

利用外方内圆模型预测单向连续纤维增强树脂基复合材料的横向弹性模量

李艳茹*, 程忠庆, 姜海波

(海军勤务学院 海防工程系, 天津 300450)

摘要: 为了对连续纤维增强树脂基复合材料的横向弹性模量进行较高精度的解析计算, 利用代表性体积单元横截面为正方形基体包裹圆形纤维的外方内圆模型, 采用先并联后串联和先串联后并联的两种计算方式进行公式推导, 借助于 Mathematica 软件进行符号积分运算, 获得了横向弹性模量的 2 组解析解, 将其中间值作为预测值, 给出了预测值的近似公式, 并与一组实验数据进行了比较。研究表明, 外方内圆模型能较好地反映客观实际, 利用 Mathematica 软件可以解决计算困难的问题; 将解析解的中间值作为横向弹性模量的预测值, 与一组实验数据比较, 显示解析计算的相对误差基本在 10% 以内; 给出的近似公式形式简单, 且其曲线能较好地吻合中间值曲线, 在纤维体积分数小于 75% 的范围内, 近似公式与中间值公式计算结果之间的最大误差不超过 7%。

关键词: 复合材料; 连续纤维; 横向弹性模量; 外方内圆模型; 解析计算

中图分类号: TB332 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-3851(2018)08-2110-06

Prediction of transverse elastic modulus of unidirectional continuous fiber reinforced resin composites using the model of circle-in-square

LI Yanru*, CHENG Zhongqing, JIANG Haibo

(Department of Coastal Defense Engineering, Naval Logistical College, Tianjin 300450, China)

Abstract: In order to calculate the transverse elastic modulus of continuous fiber reinforced resin composites with high precision, two analytical solutions of the transverse elastic modulus were obtained, by using the model of circle-in-square, which is the cross-section shape of a representative volume unit that the square matrix wraps a circle fiber, and by derivating formulas using two kinds of calculation method in parallel after series and in series after parallel by means of Mathematica software. The median value of the two analytical solutions was treated as the predictive value, and the approximate formula of the predictive value was given. The research results show that, the model of circle-in-square can better reflect the objective reality, and the Mathematica software can be used to solve the problem of difficult calculation in this project; The median value of the two analytical solutions can be used as the predictive value of the transverse elastic modulus. Compared with a set of experimental data, the relative errors of the median values are basically less than 10%; The form of the approximate formula is simple, and its curve can well fit the median value curve. In the range that the fiber volume fraction is less than 75%, the maximum error between the calculation results of approximate formula and the median value formula is not more than 7%.

Keywords: composite material; continuous fiber; transverse elastic modulus; model of circle-in-square; analytical calculation

纤维增强树脂基复合材料弹性模量的计算是一个经典问题, 也是很复杂的问题, 通常采用解析法

和数值法两种方法解决。早期以解析法为主, 通过简单模型进行求解, 该项研究在上世纪五、六十年

收稿日期: 2017-07-12; 录用日期: 2017-09-08; 网络出版时间: 2017-09-20 15:52

网络出版地址: <https://doi.org/10.13801/j.cnki.fhclxb.20170920.003>

通讯作者: 李艳茹, 博士, 副教授, 研究方向为复合材料力学及工程应用 E-mail: yanru_li@126.com

引用格式: 李艳茹, 程忠庆, 姜海波. 利用外方内圆模型预测单向连续纤维增强树脂基复合材料的横向弹性模量[J]. 复合材料学报, 2018, 35(8): 2110-2115.

LI Yanru, CHENG Zhongqing, JIANG Haibo. Prediction of transverse elastic modulus of unidirectional continuous fiber reinforced resin composites using the model of circle-in-square[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2018, 35(8): 2110-2115 (in Chinese).

代达到高峰, 具有代表性的包括 Halpain-Tsai 的修正混合率公式^[1-2]、Eshelby 弹性夹杂模型^[3-4]、Mori-Tanaka 平均场模型^[5-6]、Chamis 模型^[7-8]、Hill-Hashin-Christensen-Lo 模型^[9-12]和桥联模型^[13-14]等。复合材料弹性模量的细观力学研究, 其精确度在很大程度上取决于计算模型的选取。早期建立的模型基本上都是复合材料实际结构的一种抽象, 未能反映真实材料的一些重要特征, 因而在计算除纵向弹性模量之外的其他常数时, 有较大的误差, 且这种误差的产生应归咎于模型误差, 仅通过改进计算手段的方法来减小误差是很困难的^[15]。

建立反映真实材料主要特征的复杂模型, 是提高计算精度的前提条件, 但是解析法对复杂模型的求解遇到巨大困难, 因此后期的研究以数值法为主, 通过复杂、逼真的模型进行数值计算。从上世纪七十年代开始的这种研究随计算机软硬件的飞速发展而持续不断地得到加强, 具有代表性的包括通用元胞法^[16-17]和有限元法^[18-19]等。数值法采用了较复杂的模型, 因此预测精度高, 但存在消耗计算机资源多、计算结果没有普适性等问题。

最近 20 年来, 一大批数学软件应运而生, 发展迅速且功能强大, 具有代表性的包括 Mathematica、MathCAD、Matlab 和 Maple 等, 这些先进技术成果使对复杂表达式的积分运算变得简单易行, 大幅度提升了解析法的应用深度和广度。本文的目的也是对复杂、逼真的模型进行精确计算, 但不是采用目前广泛流行的数值法, 而是借助于 Mathematica 软件的符号积分工具采用解析法进行求解, 期望达到与数值法相近的精度, 并能发挥解析法结果清晰直观和具有普适性的特点。

1 外方内圆模型及其求解问题

在纤维增强树脂基复合材料的代表性体积单元的横截面上, 纤维应当排列在基体的中间, 并回归纤维截面原有的圆形形状, 而包裹纤维的基体横截面为正方形, 由此可形成外方内圆模型, 如图 1 所示。但是纤维圆形截面计算起来十分复杂, 起初人们不得不对其进行简化处理, 最典型的办法是简化成等面积的正方形, 并将代表性体积单元的横截面划分成 3 部分, 中间部分的宽度与纤维正方形的边长相等, 由纤维和基体材料串联(并联)组成, 两侧的部分则全是基体材料, 与中间部分构成并联(串联)结构, 然后利用串、并联公式进行复合计算, 得到先串后并(如图 2(a)所示)和先并后串(如图 2(b)

所示)的两个计算公式^[20], 其值稍高于串联公式的计算值, 但仍偏离实验数据。由此可见, 研究者面对的难题是, 要么采用简化的模型得到误差很大的结果, 要么采用接近实际的模型得到比较准确的结果, 但必须攻克计算困难的制约。

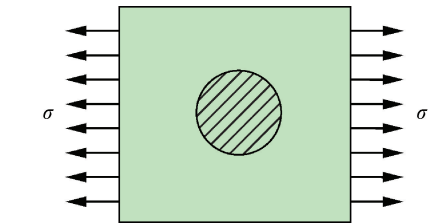


图 1 纤维增强树脂基复合材料外方内圆计算模型
Fig. 1 Calculation model of circle-in-square of fiber reinforced resin matrix composites

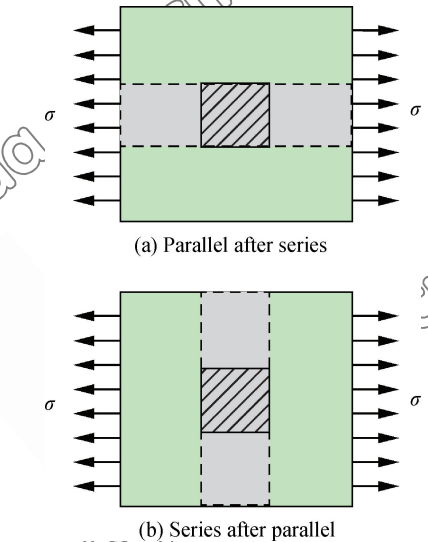


图 2 纤维增强树脂基复合材料方形计算模型
Fig. 2 Square calculation model of fiber reinforced resin matrix composites

随着计算机硬件和软件技术的迅猛发展, 现在人们可以设计各种复杂的、回归本质特征的计算模型, 而计算过程的复杂性可由计算机解决。本研究对外方内圆模型进行了研究, 将纤维圆形截面及包裹的基体截面划分成无穷多个小矩形, 利用积分方法得到了弹性模量性能解析计算公式, 结果将表明计算值能较好地符合实验数据。

2 单向连续纤维增强树脂基复合材料横向弹性模量公式推导

本文采用微积分方法探讨基于外方内圆模型的弹性模量计算问题。可分为先并后串和先串后并两种计算方式。

2.1 先并后串计算方式

首先确定计算单元。横向受力的连续纤维增强复合材料外方内圆模型的代表性体积单元如图 1 所示, 将该体积单元划分成左中右 3 部分, 左右两部分是纯基体, 中间部分(宽度等于纤维直径)是纤维与基体的混合体, 如图 3 所示。现取其右上角四分之一计算单元建立坐标系进行计算, 如图 4 所示。

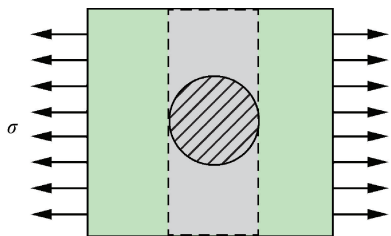


图 3 纤维增强树脂基复合材料的代表性体积单元
(先并后串计算图)

Fig. 3 Representative volume unit of fiber reinforced resin matrix composites (series after parallel)

设代表性体积单元边长为 2(图 4 中正方体边长为 1), 则纤维的体积分数为

$$V_f = \frac{\pi r^2}{4} \quad (1)$$

纤维半径 r 的最大值为 1, 因此纤维体积分数 V_f 的最大值为 $\pi/4$ 。若纤维体积分数已知, 由上式可得纤维半径为

$$r = \sqrt{\frac{4V_f}{\pi}} \quad (2)$$

其次确定微分单元的弹性模量。设外部应力为水平方向, 在图 4 中的 x 处($x < r$ 范围内)取一微分单元, 其宽度为 Δx , 纤维与基体的混合体的总高度为 1, 其中纤维高度为 $\sqrt{r^2 - x^2}$ 。假定该混合

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_{rx}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{E(x_n)} \frac{\Delta x_n}{r} = \int_0^r \frac{1}{E(x)} \frac{dx}{r} = \int_0^{\sqrt{4V_f/\pi}} \frac{1}{\sqrt{4V_f/\pi - x^2} E_f + (1 - \sqrt{4V_f/\pi - x^2}) E_m} \frac{dx}{\sqrt{4V_f/\pi}} \\ &= \frac{\pi^2 E_m + 2\pi E_m \arctan \left[\frac{2(E_f - E_m)\sqrt{V_f}/\sqrt{\pi E_m^2 - 4V_f(E_f - E_m)^2}}{2(E_f - E_m)\sqrt{V_f}/\sqrt{\pi E_m^2 - 4V_f(E_f - E_m)^2}} \right]}{4(E_f - E_m)\sqrt{V_f}/\sqrt{\pi E_m^2 - 4V_f(E_f - E_m)^2}} + \frac{\pi\sqrt{\pi}}{4(E_f - E_m)\sqrt{V_f}} \end{aligned} \quad (5)$$

这是包含反正切函数的比较复杂的积分结果, 它是利用 Mathematica 软件进行符号积分得到的。

图 5 表示的四分之一计算单元右侧纯基体部分

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_1} &= \frac{V_{r1}}{E_{rx}} + \frac{1 - V_{r1}}{E_m} = \frac{r}{E_{rx}} + \frac{1 - r}{E_m} \\ &= \frac{\pi\sqrt{\pi} E_m + 2\pi E_m \arctan \left[\frac{2(E_f - E_m)\sqrt{V_f}/\sqrt{\pi E_m^2 - 4V_f(E_f - E_m)^2}}{2(E_f - E_m)\sqrt{V_f}/\sqrt{\pi E_m^2 - 4V_f(E_f - E_m)^2}} \right]}{2(E_f - E_m)\sqrt{V_f}/\sqrt{\pi E_m^2 - 4V_f(E_f - E_m)^2}} + \frac{\pi}{2(E_f - E_m)} + \frac{1 - \sqrt{4V_f/\pi}}{E_m} \end{aligned} \quad (6)$$

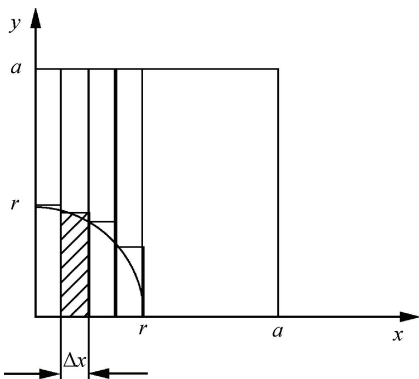


图 4 纤维增强树脂基复合材料四分之一体积单元
(先并后串计算图)

Fig. 4 Quarter of the representative volume unit of fiber reinforced resin matrix composites (series after parallel)

体微分单元纤维和基体应变相等, 根据弹性模量的并联公式, 该混合体微分单元的弹性模量为

$$\begin{aligned} E(x) &= V_f E_f + (1 - V_f) E_m \\ &= \sqrt{r^2 - x^2} E_f + (1 - \sqrt{r^2 - x^2}) E_m \\ &= \sqrt{4V_f/\pi - x^2} E_f + (1 - \sqrt{4V_f/\pi - x^2}) E_m \end{aligned} \quad (3)$$

最后计算总弹性模量。在 $x < r$ 范围内, 所有微分单元是串联排列的, 按弹性模量的串联公式, 该部分的弹性模量的倒数为

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_{rx}} &= \frac{V_{x1}}{E(x_1)} + \frac{V_{x2}}{E(x_2)} + \frac{V_{x3}}{E(x_3)} + \dots + \frac{V_{xn}}{E(x_n)} + \dots \\ &= \frac{1}{E(x_1)} \frac{\Delta x_1}{r} + \frac{1}{E(x_2)} \frac{\Delta x_2}{r} + \frac{1}{E(x_3)} \frac{\Delta x_3}{r} + \dots + \frac{1}{E(x_n)} \frac{\Delta x_n}{r} + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

当 n 趋近于无穷大时, 上式可由积分法计算, 即

2.2 先串后并计算方式

首先确定计算单元。横向受力的连续纤维增强复合材料外方内圆模型的代表性体积单元如图 5 所示。将该体积单元划分成上中下 3 部分, 上、下两部分是纯基体, 中间部分(宽度等于纤维直径)是纤维与基体的混合体。现取其右上角四分之一计算单元建立坐标系进行计算, 如图 6 所示。

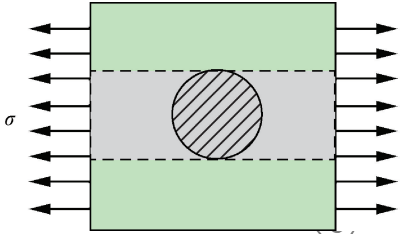


图 5 纤维增强树脂基复合材料的代表性体积单元
(先串后并计算图)

Fig. 5 Representative volume unit of fiber reinforced resin matrix composites (parallel after series)

其次确定微分单元的弹性模量。设外部应力为水平方向, 在图 6 中的 y 处($y < r$ 范围内)取一微分单元, 其宽度为 Δy , 纤维与基体的混合体的总长度为 1, 其中纤维长度为 $\sqrt{r^2 - y^2}$ 。假定该混合体微分单元纤维和基体所受应力处处相等, 根据弹性模

$$E_{ry} = V_{y1}E(y_1) + V_{y2}E(y_2) + V_{y3}E(y_3) + \dots + V_{yn}E(y_n) + \dots$$

$$= \frac{\Delta y_1}{r}E(y_1) + \frac{\Delta y_2}{r}E(y_2) + \frac{\Delta y_3}{r}E(y_3) + \dots + \frac{\Delta y_n}{r}E(y_n) + \dots$$

当 n 趋近于无穷大时, 上式可由积分法计算, 即

$$E_{ry} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta y_n}{r}E(y_n) = \int_0^r E(y) \frac{dy}{r} = \int_0^{\sqrt{4V_f/\pi}} \frac{1}{\frac{\sqrt{4V_f/\pi - y^2}}{E_f} + \frac{1 - \sqrt{4V_f/\pi - y^2}}{E_m}} \frac{dy}{\sqrt{4V_f/\pi}}$$

$$= \frac{\pi E_f^2 E_m \left[2 \arctan \frac{2(E_f - E_m)\sqrt{V_f}}{\sqrt{\pi E_f^2 - 4(E_f - E_m)^2 V_f}} + \pi \right]}{4(E_f - E_m)\sqrt{V_f}\sqrt{\pi E_f^2 - 4V_f(E_f - E_m)^2}} - \frac{\pi^{3/2} E_f E_m}{4(E_f - E_m)\sqrt{V_f}}$$

图 6 表示的四分之一计算单元上侧纯基体部分与 $y < r$ 范围内的混合体并联, 因此总的弹性模

$$E_2 = V_{r2}E_{ry} + (1 - V_{r2})E_m = rE_r + (1 - r)E_m$$

$$= \sqrt{\frac{4V_f}{\pi}} \left\{ \frac{\pi E_f^2 E_m \left[2 \arctan \frac{2(E_f - E_m)\sqrt{V_f}}{\sqrt{\pi E_f^2 - 4V_f(E_f - E_m)^2}} + \pi \right]}{4(E_f - E_m)\sqrt{V_f}\sqrt{\pi E_f^2 - 4V_f(E_f - E_m)^2}} - \frac{\pi^{3/2} E_f E_m}{4(E_f - E_m)\sqrt{V_f}} \right\} + \left(1 - \sqrt{\frac{4V_f}{\pi}} \right) E_m$$

$$= \frac{E_f^2 E_m \left[2 \arctan \frac{2(E_f - E_m)\sqrt{V_f}}{\sqrt{\pi E_f^2 - 4V_f(E_f - E_m)^2}} + \pi \right]}{2(E_f - E_m)\sqrt{\pi E_f^2 - 4V_f(E_f - E_m)^2}} - \frac{\pi E_f E_m}{2(E_f - E_m)} + \left(1 - \sqrt{\frac{4V_f}{\pi}} \right) E_m$$

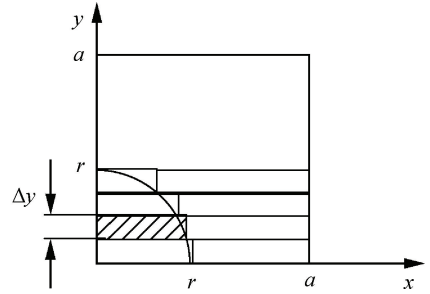


图 6 纤维增强树脂基复合材料四分之一体积单元
(先串后并计算图)

Fig. 6 Quarter of the representative volume unit of fiber reinforced resin matrix composites (parallel after series)

量的串联公式, 该混合体微分单元的弹性模量的倒数为

$$\frac{1}{E(y)} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{1 - V_f}{E_m}$$

$$= \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{E_f} + \frac{1 - \sqrt{r^2 - y^2}}{E_m}$$

$$= \frac{\frac{4V_f}{\pi} - y^2}{E_f} + \frac{1 - \sqrt{\frac{4V_f}{\pi} - y^2}}{E_m}$$

最后计算总弹性模量。在 $y < r$ 范围内, 所有微分单元是并联排列的, 按并联公式该部分的弹性模量为

$$(8)$$

量为

$$(10)$$

2.3 连续纤维增强树脂基复合材料弹性模量预测值

E_1 和 E_2 分别是按先并后串和先串后并两种计算方式得到的复合材料弹性模量,前者较大,后者较小,实测弹性模量值应当介于两者之间。可用中间值 E_c 对弹性模量进行预测,即

$$E_c = \frac{E_1 + E_2}{2} \tag{11}$$

通过大量试验得到的中间值无量纲近似公式为

$$\frac{E_a}{E_m} \approx \frac{1 + V_f}{1 - 1.25V_f + 4.3(E_m/E_f)V_f} \tag{12}$$

由软件计算得到,不论 E_f/E_m 的比值如何变化,近似公式与中间值公式计算结果之间的最大相对误差不超过 7%,特别是,当 $E_f/E_m < 10$ 时,最大相对误差不超过 2.5%。

3 连续纤维增强树脂基复合材料弹性模量计算值与实验数据的比较

用外方内圆模型计算的相对弹性模量曲线如图 7 所示。为便于比较,图中列出了 E_1 (式 6)、 E_2 (式 10)、 E_c (式 11)和 E_a (式 12)相对于基体弹性模量 E_m 的无量纲曲线和一组实验数据($E_f=83.4\text{ GPa}$, $E_m=3.33\text{ GPa}$)^[20],实验值与计算值如表 1 所示,计算值由式(11)获得。

从图 7 和表 1 可以看出, E_1 和 E_2 确定了弹性模量的较窄范围,中间值接近实验值,误差基本保持在 10%以内,且近似公式曲线(虚线)与中间值公式曲线(实线)吻合很好。

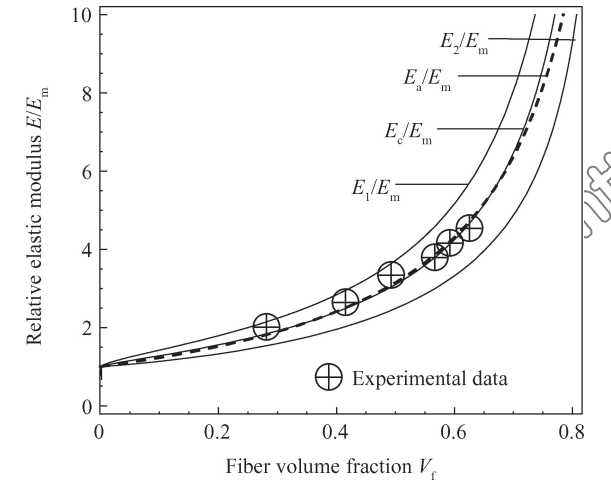


图 7 纤维增强树脂基复合材料相对弹性模量实验数据与计算值曲线

Fig.7 Experimental and calculated values curves relative elastic modulus of fiber reinforced resin matrix composites

表 1 纤维增强树脂基复合材料弹性模量实验值与计算值比较

Table 1 Comparison of experimental values and calculated values of elastic modulus of fiber reinforced resin matrix composites

Fiber volume fraction $V_f/\%$	Experimental values of E/E_m	Calculated values of E/E_m	Relative errors/%
28.91	2.15	1.90	11.63
41.99	2.75	2.57	6.55
49.88	3.44	3.19	7.27
57.50	3.95	4.04	-2.28
59.62	4.30	4.42	-2.79
62.57	4.65	4.97	-6.88

4 结 论

(1) 将纤维圆形横截面直接作为圆形计算模型,借助于 Mathematica 软件进行符号积分运算,可获得纤维增强树脂基复合材料横向弹性模量的解析解。

(2) 将解析解的中间值作为横向弹性模量的预测值,与一组实验数据比较,显示解析计算的相对误差基本在 10%以内。

(3) 给出了形式简单的中间值近似公式,在纤维体积分数小于 75%的实用范围内,近似公式与中间值公式计算结果之间的最大误差不超过 7%。

参考文献:

[1] GANESH V V, CHAWLA N. Effect of particle orientation anisotropy on the tensile behavior of metal matrix composites: Experiments and micro structure-based simulation[J]. Materials Science & Engineering A, 2005, 391(1-2): 342-353.

[2] 田云德,秦世伦. 复合材料等效弹性模量的改进混合律方法[J]. 西南交通大学学报, 2005, 36(6): 783-787.

TIAN Y D, QIN S L. Improved mixed-model method of valid elastic modulus of composites[J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2005, 36(6): 783-787 (in Chinese).

[3] ESHELBY J D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems[J]. Proceedings of the Royal Society, 1957, 241: 376-396.

[4] ESHELBY J D. The elastic field outside an ellipsoidal inclusion[J]. Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences, 1959, 252(1271): 561-569.

[5] MORI T, TANAKA K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions[J]. Acta Metallurgica, 1973, 21(5): 571-576.

- [6] BENVENISTE Y. A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials[J]. *Mechanics of Materials*, 1987, 6(2): 147-157.
- [7] HOPKINS D A, CHAMIS C C. A unique set of micromechanics equations for high temperature metal matrix composites; NASA TM 87154[R]. USA: National Aeronautics & Space Administration, 1985.
- [8] CHAMIS C C. Mechanics of composite materials: Past, present and future[J]. *Journal of Composites Technology & Research*, 1989, 11(1): 3-14.
- [9] HILL R. Theory of mechanical properties of fiber-strengthened materials: I elastic behavior[J]. *Journal of the Mechanics & Physics of Solids*, 1964, 12(4): 199-212.
- [10] HILL R. A self-consistent mechanics of composite materials [J]. *Journal of the Mechanics & Physics of Solids*, 1965, 13 (4): 213-222.
- [11] HASHIN Z, ROSEN B W. The elastic moduli of fiber-reinforced materials[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1964, 31 (2): 223-232.
- [12] HASHIN Z. On elastic behavior of fiber-reinforced materials [J]. *Journal of the Mechanics & Physics of Solids*, 1965, 13 (3): 119-134.
- [13] HUANG Z M. Micromechanical prediction of ultimate strength of transversely isotropic fibrous composites [J]. *International Journal of Solid & Structures*, 2001, 38(22-23): 4147-4172.
- [14] HUANG Z M. Simulation of the mechanical properties of fibrous composites by the bridging micromechanics model[J]. *Composites Part A*, 2001, 32(2): 143-172.
- [15] HUANG Z M. Micromechanical prediction of ultimate strength of transversely isotropic fibrous composites [J]. *International Journal of Solid & Structures*, 2001, 38(22-23): 4147-4172.
- [16] PALEY M, ABOUDI J. Micromechanics analysis of composites by the generalized cell model[J]. *Mechanics of Materials*, 1992, 14(2): 127-139.
- [17] 孙志刚, 宋迎东, 高德平. 改进的二维高精度通用单胞模型 [J]. *固体力学学报*, 2005, 26(2): 235-240.
- SUN Z G, SONG Y D, GAO D P. Efficient reformulation of 2-D high-fidelity generalized method of cells [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 26 (2): 235-240 (in Chinese).
- [18] SEGURADO J, LLORCA J. A numerical approximation to the elastic properties of sphere-reinforced composites[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2002, 50 (10): 2107-2121.
- [19] ANNA PRAGADA S R, SUN D, GARIMELLA S V. Prediction of effective thermo-mechanical properties of particulate composites[J]. *Computational Materials Science*, 2007, 40: 255-266.
- [20] 周祝林, 杨云娣. 单向纤维复合材料的弹性常数研究[J]. *玻璃钢*, 1995(3): 1-12.
- ZHOU Z L, YANG Y D. Study on elastic constants of unidirectional fiber composites[J]. *Fiber Reinforced Plastics*, 1995 (3): 1-12 (in Chinese).