复合材料学报 第31卷 第5期 10月 2014年
Acta Materiae Compositae Sinica Vol. 31 No. 5 October 2014

文章编号：1000-3851(2014)05-1357-07

压电复合材料中 III 型唇形裂纹问题的解析解

于 静[1,2]，郭俊宏[*1]，邢永明[1]

（1. 内蒙古工业大学 理学院，呼和浩特 010051；2. 内蒙古师范大学 基础教育学院，呼和浩特 011517）

摘 要： 采用复变函数方法和保角映射技术，研究了压电复合材料中含唇形裂纹的无限大体远场受反平面机械载荷和面内电载荷作用下的反平面问题，利用复变函数中的留数定理和 Cauchy 积分公式，分别获得了电不可通和电可通两种边界条件下裂纹尖端场强度因子和机械应变能释放率的解析表达式。当唇形裂纹的高度趋于零时，可得到无限大压电复合材料中 Griffith 裂纹的解析解。若不考虑电场作用，所得解退化为经典材料的已知结果。数值算例显示了裂纹的几何尺寸和机电载荷对机械应变能释放率的影响规律。结果表明：唇形裂纹高度的增加会阻碍裂纹的扩展；机械载荷总是促进裂纹的扩展；电载荷对裂纹扩展的影响与裂纹面电边界条件有关。

关键词： 压电复合材料；唇形裂纹；复变函数方法；场强度因子；机械应变能释放率

中图分类号： TB330.1；O346.1 **文献标志码：** A

Analytical solutions of mode - III lip - shape crack in piezoelectric composites

YU Jing[1,2], GUO Junhong[*1], XING Yongming[1]

(1. School of Science, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot 010051, China;
2. College of General Education, Inner Mongolia Normal University, Hohhot 011517, China)

Abstract: Based on the complex variable function method and the technique of conformal mapping, an anti - plane problem of lip - shape crack in piezoelectric composites was investigated under the anti - plane loading at infinity and in - plane electric loads. By using the residue theorem and Cauchy integral formula, the analytical expressions of the field intensity factors and the mechanical strain energy release rate are obtained with the assumption that the crack surfaces were electrically impermeable and electrically permeable. When the height of lip - shape crack approaches to zero, the analytical solutions of an infinitely large piezoelectric solid with a Griffith crack was obtained. Ignoring the effect of the electric field the present results can be reduced to the well - known solutions of classic material. The numerical examples are provided to show the influences of geometrical parameters and applied mechanical/electric loads on the mechanical strain energy release rate. The results indicate that an increase of the height of the lip - shape crack will retard the crack propagation and mechanical loads always accelerate the crack propagation. The influences of electric loads on the crack propagation was about boundary conditions of the lip - shape crack.

Keywords: piezoelectric composites; lip - shape crack; complex variable function method; field intensity factors; mechanical strain energy release rate

材料科学向智能化迈进之时，压电复合材料受到越来越广泛的关注。当发生机械变形时，压电介质中将产生电场，而当其受到电场作用时，将会产生机械变形，这是压电复合材料独特的力电耦合性质。由于这种独特的性质，使得压电复合材料越来越广泛地应用于制作高精度传感器、制动器、高精度位移器等电子元器件，航天航空、自动控制、微型机械系统、精密定位等领域。然而，压电复合材

收稿日期： 2013-08-13；**录用日期：** 2013-12-14；**网络出版时间：** 2014-01-17 15:14
网络出版地址： www.cnki.net/kcms/detail/11.1801.TB.20140117.1514.002.html
基金项目： 国家自然科学基金(11262012；11262014)；高等学校博士学科点专项科研基金(20101102110016)；内蒙古工业大学科学研究项目(ZD201219)；教育部科技研究重点项目(212029)；内蒙古自然科学基金(2013MS0114)；内蒙古教育厅重点项目(NJZZ13037)；内蒙古自治区研究生科研创新项目(B20131012801Z)
通讯作者： 郭俊宏，博士，讲师，硕士生导师，研究方向为压电复合材料。 E-mail：jhguo@imut.edu.cn

引用格式： *于 静，郭俊宏，邢永明. 压电复合材料中 III 型唇形裂纹问题的解析解 [J]. 复合材料学报，2014，31(5)：1357-1363. Yu Jing, Guo Junhong, Xing Yongming. Analytical solutions of a mode -III lip -shape crack in piezoelectric composites [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2014, 31(5): 1357-1363.*

料本身呈脆性，由于制造过程产生的缺陷(如裂纹、孔洞、夹杂等)可能导致压电复合材料发生破坏，因此，压电复合材料的断裂力学成为重要的研究课题之一。

近年来，压电复合材料断裂力学的研究引起广泛的关注。由于反平面问题相对平面问题较简单，且封闭形式的解析解更能为压电材料的断裂行为提供物理解释，所以，脆性压电复合材料中受反平面剪切力问题的解析方法的研究引起了研究者的广泛关注[1-14]。Pak[1]在电不可通边界条件下研究了无限大压电材料中含有中心裂纹的反平面问题，得到积分形式表示的 III 型断裂判据，即能量释放率；Zhang 和 Tong[2]利用复势函数表示应力场和电场，分析了电可通边界条件下的 III 型裂纹问题；Shindo 等[3-4]将边值问题转化为对偶积分方程和第二类 Fredholm 方程，发展了有限宽压电陶瓷中一中心裂纹在反平面载荷下的裂纹扩展率方程；Yang 和 Kao[5]，Zhong 和 Li[6]利用 Fourier 变换将边值问题转化为奇异积分方程，分别研究了在电可通边界条件下无限大压电体中含一个有限裂纹和压电狭长体中两个共线裂纹的反平面问题；Zhou 等[7-8]利用 Fourier 变换法研究了含 3 条非对称裂纹和多重平行对称裂纹的压电材料受纵向剪切的断裂问题；Zhang 和 Gao[9]采用 Stroh 公式对压电介质中的 III 型裂纹在不同电边界条件下进行了全面的分析；Li 和 Lee[10]利用螺型位错的基本解，将研究问题转化为奇异积分方程，分析了压电材料中周期分布倾斜裂纹的反平面问题；Wang 和 Gao[11]通过引入合适的保角映射函数，利用复变函数方法对圆孔边裂纹的压电弹性体反平面问题进行了研究，得到裂纹尖端的场强度因子和能量释放率的解析解；Guo 等[12-14]分别在电可通和电不可通边界条件下研究了含椭圆孔边非对称裂纹的压电弹性体问题，利用复变函数方法和保角映射函数，研究了在反平面剪应力和面内电载荷作用下的含半无限裂纹带状压电体的断裂问题。综上所述，对于压电复合材料反平面断裂问题的研究取得了不少的研究成果，但对于压电复合材料中唇形裂纹的研究目前尚未见报道。在实际的工程问题中，缺陷不仅仅是一些线状裂纹或规则的曲线，而常常是由一些曲边多角形所构成，其中包括只有尖点的一类多角形曲边缺陷例如唇形裂纹。因此，对唇形裂纹这类只有尖点的曲边多角形缺陷的断裂问题的研究有着十分重要的意义。对于纯弹性唇形裂纹问题，匡震邦[15]利用 Muskhelishvili 的二维各向同性弹性理论的传统方法，研究了唇形裂纹的平面问题，给出了势函数的表达式。刘又文等[16-17]研究了无穷远处 III 型均布载荷与集中载荷作用下应变加强层连接唇形裂纹的问题以及唇形裂纹附近混合型位错的裂纹特征。对于唇形裂纹的反平面问题的解析解，目前没有相关报道。

本文将基于复变方法和保角映射技术，充分利用 Cauchy 积分公式和留数定理，研究压电复合材料中唇形裂纹的反平面问题。基于 Stroh 公式，发展了求解压电材料中唇形裂纹在电可通及电不可通边界条件下的复势法，给出 III 型唇形裂纹在裂纹面电不可通和电可通两种边界条件下的场强度因子和机械应变能释放率的解析表达式，并且在不受电载荷作用时，为经典弹性材料提供新的解析解。当唇形裂纹的高度趋近于零时，所得结果可退化为 Griffith 裂纹。通过数值算例，分析了几何参数对场强度因子的影响以及几何参数和机电载荷对机械应变能释放率的影响。

1　基本方程

在三维空间直角坐标系 $x_i(i=1,2,3)$ 中，考虑横观各向同性的压电复合材料，其极化方向沿着 x_3 轴的方向，x_1-x_2 平面为各向同性平面，该结构的本构方程为[1,9]

$$\begin{cases}\sigma_{ij}=c_{ijkl}s_{kl}-e_{lij}E_l\\ D_i=e_{ikl}s_{kl}+\varepsilon_{il}E_l\end{cases}\tag{1}$$

式中：重复指标表示求和；c_{ijkl}、e_{lij} 和 ε_{il} 分别表示弹性刚度张量、压电张量和介电张量；σ_{ij}、s_{kl}、D_i 和 E_l 分别表示应力、应变、电位移和电场。

在小变形假设下，梯度方程为

$$\begin{cases}s_{ij}=(u_{i,j}+u_{j,i})/2\\ E_i=-\varphi_{,i}\end{cases}\tag{2}$$

式中：下标中逗号表示求偏导数；u_i 和 φ 分别表示弹性位移和电势。

平衡方程为

$$\begin{cases}\sigma_{ij,j}=0\\ D_{i,j}=0\end{cases}\tag{3}$$

由于反平面问题相对简单，并且其封闭形式的的显示解很容易提供对压电复合材料断裂行为物理意义的解释，所以，本文考虑各向同性平面中 III 型裂纹的电弹性问题。对于二维反平面变形，所有的物理量仅依赖于反平面位移 $u_3(x_1,x_2)$ 和面内电

势 $\varphi(x_1,x_2)$，则有

$$\begin{cases} s_{11}=s_{22}=s_{33}=s_{12}=0 \\ E_3=0 \\ u_1=u_2=0 \end{cases} \tag{4}$$

代入本构方程式(1)中，化为

$$\begin{cases} \sigma_{3k}=c_{44}u_{3,k}+e_{15}\varphi_{,k} \\ D_k=e_{15}u_{3,k}-\varepsilon_{11}\varphi_{,k} \end{cases} \quad (k=1,2) \tag{5}$$

利用 Stroh 型公式，引入一个广义的应力函数向量 $\boldsymbol{\phi}$，式(1)～式(5)的一般解可以由位移向量 $\boldsymbol{u}$ 和应力函数向量 $\boldsymbol{\phi}$ 来表示[9]

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(z)+\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(z)} \\ \boldsymbol{u}=[u_3 \quad \varphi]^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(z)+\overline{\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(z)} \\ z=x_1+\mathrm{i}x_2 \end{cases} \tag{6}$$

式中：$\boldsymbol{f}(z)$ 表示未知的复向量，$\overline{\boldsymbol{f}(z)}$ 表示 $\boldsymbol{f}(z)$ 的共轭，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 表示材料的常数矩阵，且

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{B}=\mathrm{i}\boldsymbol{B}_0, \boldsymbol{B}_0=\begin{bmatrix} c_{44} & e_{15} \\ e_{15} & -\varepsilon_{11} \end{bmatrix} \tag{7}$$

$\boldsymbol{I}$ 表示 2×2 阶的单位矩阵。

在已知的边界条件下，一旦确定了复势向量函数 $\boldsymbol{f}(z)$，所有的场变量都可以由下式确定

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma}_1=[\sigma_{31} \quad D_1]^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{\phi}_{,2} \\ \boldsymbol{\Sigma}_2=[\sigma_{32} \quad D_2]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\phi}_{,1} \\ \varphi_{,1}=-E_1 \\ \varphi_{,2}=-E_2 \end{cases} \tag{8}$$

2　保角映射和解析解

考虑无限大压电复合材料中含一唇形裂纹，如图 1 所示。利用复变函数方法和保角映射技术，给出远场受反平面机械载荷和面内电载荷作用下的场强度因子和机械应变能释放率的解析解。

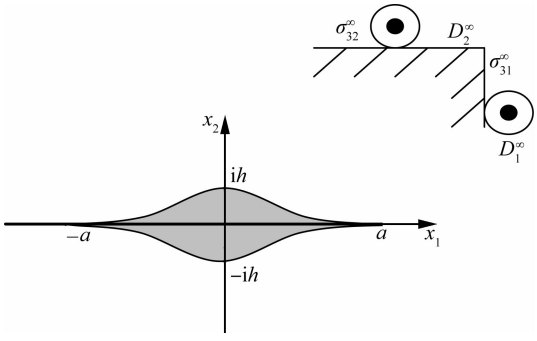

图 1　压电复合材料中的唇形裂纹

Fig. 1　Lip-shape crack in piezoelectric composites

对于该问题，复势向量函数 $\boldsymbol{f}(z)$ 具有如下形式[9,18]：

$$\boldsymbol{f}(z)=\boldsymbol{c}^{\infty}z+\boldsymbol{f}_0(z) \tag{9}$$

式中：$\boldsymbol{c}^{\infty}$ 表示与远场载荷有关的复常向量；$\boldsymbol{f}_0(z)$ 是待定的解析函数，且在无穷远处为零，即在 $z\to\infty$ 时，有 $\boldsymbol{f}_0(\infty)=\boldsymbol{0}$

在式(6)和式(7)中，对 x_1 求偏导数，得到

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_{,1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}(z)+\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}(z)} \\ \boldsymbol{\phi}_{,1}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}(z)+\overline{\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}(z)} \end{cases} \tag{10}$$

式中：$\boldsymbol{F}(z)=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}(z)}{\mathrm{d}z}$，将式(9)代入式(10)中，并且 $z\to\infty$ 时得到

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_{,1}^{\infty}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}^{\infty}+\overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{c}^{\infty}} \\ \boldsymbol{\phi}_{,1}^{\infty}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{c}^{\infty}+\overline{\boldsymbol{B}}\,\overline{\boldsymbol{c}^{\infty}} \end{cases} \tag{11}$$

式中：

$$\begin{cases} \boldsymbol{\phi}_{,1}^{\infty}=[\sigma_{32}^{\infty} \quad D_2^{\infty}]^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{u}_{,1}^{\infty}=[\varepsilon_{31}^{\infty} \quad -E_1^{\infty}]^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{12}$$

唇形裂纹面的力电边界条件可以表示为

$$\begin{cases} \boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(z)+\overline{\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(z)}=\int_s \boldsymbol{t}_s\mathrm{d}s \\ \boldsymbol{t}_s=[t_3 \quad -D_n]^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{13}$$

式中：t_3 和 D_n 分别代表沿边界所受的反平面剪切应力和法向电位移。

2.1　电不可通边界

当裂纹内部介质的介电常数比压电复合材料的介电常数小的多时，选用电不可通边界条件更为合理，则式(13)变为

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(z)+\overline{\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(z)}=\boldsymbol{0} \tag{14}$$

将式(9)代入式(14)中，可得：

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}_0(z)+\overline{\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}_0(z)}=-(\boldsymbol{B}\boldsymbol{c}^{\infty}z+\overline{\boldsymbol{B}}\,\overline{\boldsymbol{c}^{\infty}}\,\bar{z}) \tag{15}$$

为了求解函数方程组，引入合适的保角映射[15]

$$z=\omega(\zeta)=\frac{a\rho\mathrm{i}}{2}\left[m\zeta+\frac{1}{\zeta}-\frac{\zeta}{\rho^2(1+m\zeta^2)}\right] \tag{16}$$

式中：

$$\begin{cases} \rho=\dfrac{1}{1-m} \\ \beta=\dfrac{h}{a}=\dfrac{2m}{1-m^2} \end{cases} \tag{17}$$

由式(17)，得：

$$\begin{cases} m=\dfrac{-1+\sqrt{\beta^2+1}}{\beta} \\ \rho=\dfrac{\beta+1+\sqrt{\beta^2+1}}{2} \end{cases} \tag{18}$$

该保角映射把 z 平面上唇形裂纹的外部区域映射到 ζ 平面上单位圆 τ 的内部，唇形裂纹的边界映射为单位圆周，$w^{-1}(a)\to \mathrm{i}$，$w^{-1}(-a)\to -\mathrm{i}$，$w^{-1}(\mathrm{i}h)\to 1$，$w^{-1}(-\mathrm{i}h)\to -1$，如图 2 所示。

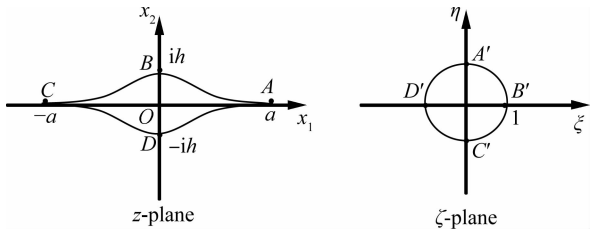

图 2　z 平面上唇形裂纹的外部区域到 ζ 平面上单位圆 τ 内部的保角映射

Fig. 2　Conformal mapping of lip-shape crack exterior region in z-plane into interior of a unit circle τ in ζ-plane

在 ζ 平面上，式(15)可改写为

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}_0(\sigma)+\overline{\boldsymbol{B}}\,\overline{\boldsymbol{f}_0(\sigma)}=-\left[\boldsymbol{B}\boldsymbol{c}^{\infty}\omega(\sigma)+\overline{\boldsymbol{B}}\,\overline{\boldsymbol{c}^{\infty}}\,\overline{\omega(\sigma)}\right] \tag{19}$$

式中：$\sigma=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 是单位圆周上的点，且定义 $\boldsymbol{f}_0(\sigma)=\boldsymbol{f}_0(\omega(\sigma))$。

对式(19)两边同时乘以 $\mathrm{d}\sigma/[2\pi\mathrm{i}(\sigma-\zeta)]$，其中：$\zeta$ 是单位圆内的任意一点，沿单位圆 τ 积分，利用 Cauchy 积分公式得：

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}_0(\zeta)=-\boldsymbol{B}\boldsymbol{c}^{\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\tau}\frac{\omega(\sigma)}{\sigma-\zeta}\mathrm{d}\sigma-\overline{\boldsymbol{B}}\,\overline{\boldsymbol{c}^{\infty}}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\tau}\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\sigma-\zeta}\mathrm{d}\sigma\quad(|\zeta|<1) \tag{20}$$

$\omega(\zeta)$ 在单位圆内除了一级极点 $\zeta=0$ 是解析的，$\overline{\omega(\zeta)}$ 在单位圆内除了 3 个一级极点 $\zeta=0$、$\zeta=\sqrt{m}\mathrm{i}$、$\zeta=-\sqrt{m}\mathrm{i}$ 是解析的。利用复变函数理论中的留数定理得：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{\tau}\frac{\omega(\sigma)}{\sigma-\zeta}\mathrm{d}\sigma=\omega(\zeta)-\frac{a\rho\mathrm{i}}{2\zeta}\\[2ex]\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{\tau}\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\sigma-\zeta}\mathrm{d}\sigma=\overline{\omega(\zeta)}+\frac{am\rho\mathrm{i}}{2\zeta}-\frac{a\zeta\mathrm{i}}{2\rho(m+\zeta^2)}\end{cases} \tag{21}$$

由式(11)和式(12)得：

$$\begin{cases}\boldsymbol{B}\boldsymbol{c}^{\infty}=\dfrac{1}{2}\{[\sigma_{32}^{\infty}\quad D_2^{\infty}]^{\mathrm{T}}+\mathrm{i}[\sigma_{31}^{\infty}\quad D_1^{\infty}]^{\mathrm{T}}\}\\[2ex]\overline{\boldsymbol{B}}\,\overline{\boldsymbol{c}^{\infty}}=\dfrac{1}{2}\{[\sigma_{32}^{\infty}\quad D_2^{\infty}]^{\mathrm{T}}-\mathrm{i}[\sigma_{31}^{\infty}\quad D_1^{\infty}]^{\mathrm{T}}\}\end{cases} \tag{22}$$

对式(20)两端关于 ζ 求导，并将式(22)代入所得结果，得：

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_0(\zeta)=\frac{a\rho}{4}\left[m+1-\frac{1-m\zeta^2}{\rho^2(1+m\zeta^2)^2}\right]\begin{bmatrix}\sigma_{31}^{\infty}\\D_1^{\infty}\end{bmatrix}-\frac{a\rho}{4}\left[m-1-\frac{1-m\zeta^2}{\rho^2(1+m\zeta^2)^2}\right]\begin{bmatrix}\sigma_{32}^{\infty}\\D_2^{\infty}\end{bmatrix}\mathrm{i} \tag{23}$$

式中：$\boldsymbol{F}_0(\zeta)=\mathrm{d}\boldsymbol{f}_0(\zeta)/\mathrm{d}\zeta$。

由式(16)可得 $\omega'(\zeta)$ 的表达式为

$$\omega'(\zeta)=\frac{a}{2}\rho\mathrm{i}\left[m-\frac{1}{\zeta^2}-\frac{1-m\zeta^2}{\rho^2(1+m\zeta^2)^2}\right] \tag{24}$$

定义场强度因子为

$$\boldsymbol{k}_{\mathrm{imp}}=[k_{\mathrm{imp}}^{\sigma}\quad k_{\mathrm{imp}}^{D}]^{\mathrm{T}}=\lim_{z\to z_1}\boldsymbol{\phi}_{,1}\sqrt{2\pi(z-z_1)} \tag{25}$$

式中：z_1 代表裂纹的端点；$k_{\mathrm{imp}}^{\sigma}$ 和 k_{imp}^{D} 分别表示电不可通边界条件下裂纹尖端的应力强度因子和电位移强度因子。

将式(10)代入式(25)可得：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}_{\mathrm{imp}}&=[k_{\mathrm{imp}}^{\sigma}\quad k_{\mathrm{imp}}^{D}]^{\mathrm{T}}=\lim_{z\to z_1}\boldsymbol{\phi}_{,1}\sqrt{2\pi(z-z_1)}\\&=\lim_{z\to z_1}\sqrt{2\pi(z-z_1)}[\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}(z)+\overline{\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}(z)}]\\&=\lim_{z\to z_1}\sqrt{2\pi(z-z_1)}[\boldsymbol{B}\boldsymbol{c}^{\infty}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_0(z)+\overline{\boldsymbol{B}\boldsymbol{c}^{\infty}}+\overline{\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_0(z)}]\\&=\lim_{z\to z_1}\sqrt{2\pi(z-z_1)}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{c}^{\infty}+\overline{\boldsymbol{B}\boldsymbol{c}^{\infty}})+\lim_{z\to z_1}\sqrt{2\pi(z-z_1)}[\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_0(z)+\overline{\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_0(z)}]\\&=\lim_{z\to z_1}\sqrt{2\pi(z-z_1)}[\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_0(z)+\overline{\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_0(z)}]\end{aligned} \tag{26}$$

选取沿着 x_1 轴取极限，这时 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_0(z)$ 是一实函数，故可得到：

$$\boldsymbol{k}_{\mathrm{imp}}=[k_{\mathrm{imp}}^{\sigma}\quad k_{\mathrm{imp}}^{D}]^{\mathrm{T}}=2\lim_{z\to z_1}\sqrt{2\pi(z-z_1)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_0(z) \tag{27}$$

在 ζ 平面上，式(27)化为

$$\boldsymbol{k}_{\mathrm{imp}}=[k_{\mathrm{imp}}^{\sigma}\quad k_{\mathrm{imp}}^{D}]^{\mathrm{T}}=2\sqrt{2\pi}\lim_{\zeta\to\mathrm{i}}\sqrt{\omega(\zeta)-\omega(\mathrm{i})}\cdot\frac{\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_0(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \tag{28}$$

此处 $\zeta=\mathrm{i}$ 对应于 z 平面上的裂纹端点 $z=a$。

由式(23)和式(24)可知 $\lim\limits_{\zeta\to\mathrm{i}}\omega'(\zeta)=0$ 并且 $\lim\limits_{\zeta\to\mathrm{i}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_0(\zeta)\neq 0$，由 L'Hospital 法则，式(28)可以简化为

$$\boldsymbol{k}_{\mathrm{imp}}=[k_{\mathrm{imp}}^{\sigma}\quad k_{\mathrm{imp}}^{D}]^{\mathrm{T}}=2\sqrt{\pi}\lim_{\zeta\to\mathrm{i}}\frac{\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_0(\zeta)}{\sqrt{\omega''(\zeta)}} \tag{29}$$

由式(24)易求得：

$$\omega''(\zeta)=\frac{a\rho\mathrm{i}}{2}\left[\frac{2}{\zeta^3}-\frac{2m^2\zeta^3-6m\zeta}{\rho^2(1+m\zeta^2)^3}\right] \tag{30}$$

将式(23)和式(30)代入式(29)中，得到电不可通边界条件下唇形裂纹的反平面剪切问题的裂纹尖端的场强度因子的解析表达式为

$$\boldsymbol{k}_{\mathrm{imp}}=[k_{\mathrm{imp}}^{\sigma}\quad k_{\mathrm{imp}}^{D}]^{\mathrm{T}}=[\sigma_{32}^{\infty}\quad D_2^{\infty}]^{\mathrm{T}}K\sqrt{\pi a} \tag{31}$$

式中：无量纲强度因子 K 为

$$K = \frac{1-\beta+\sqrt{\beta^2+1}}{2} \tag{32}$$

与纯弹性经典材料相比，压电复合材料的破坏不仅受到机械载荷的影响，而且受到电场的影响。不受电载荷作用时，得到经典材料中唇形裂纹反平面问题的解析解。式(31)表明电不可通边界条件下应力强度因子仅与机械载荷有关，电位移强度因子仅与电载荷有关。

2.2　电可通边界

对于电可通边界条件可表示为[19]

$$[\sigma_{32} \quad D_2]^{\mathrm{T}} = [0 \quad D_2^0]^{\mathrm{T}} = \left[0 \quad D_2^{\infty} - \frac{e_{15}}{c_{44}}\sigma_{32}^{\infty}\right]^{\mathrm{T}} \tag{33}$$

式中：D_2^0 表示唇形裂纹内部的电位移分量。

由此得到电可通边界下场强度因子的解析表达式为

$$\boldsymbol{k}_{\mathrm{per}} = [k_{\mathrm{per}}^{\sigma} \quad k_{\mathrm{per}}^{D}]^{\mathrm{T}} = \sqrt{\pi a}\begin{bmatrix}\sigma_{32}^{\infty} \\ D_2^{\infty} - D_2^0\end{bmatrix}K \tag{34}$$

$$\begin{cases} k_{\mathrm{per}}^{\sigma} = \sqrt{\pi a}\sigma_{32}^{\infty}K \\ k_{\mathrm{per}}^{D} = \sqrt{\pi a}\dfrac{e_{15}}{c_{44}}\sigma_{32}^{\infty}K \end{cases} \tag{35}$$

式中：$k_{\mathrm{per}}^{\sigma}$ 和 k_{per}^{D} 分别表示电可通边界条件下裂纹尖端的应力强度因子和电位移强度因子。由式(35)可知，对于电可通裂纹，应力强度因子仅与机械载荷有关，而电位移强度因子还受压电效应的影响。

2.3　机械应变能释放率

压电复合材料有多种断裂准则，如应力强度因子准则、总能量释放率准则、能量密度因子准则、局部能量释放率准则、机械应变能释放率准则以及 COD 准则等。方岱宁和刘金喜[20]指出，与其他准则相比，机械应变能释放率、局部能量释放率和 COD 准则与实验结果更为吻合，故本文选择机械应变能释放率准则来分析唇形裂纹的断裂行为。

对于电不可通裂纹，机械应变能释放率的计算公式为[21]

$$G_{\mathrm{imp}}^{m} = \frac{k_{\mathrm{imp}}^{\sigma}k_{\mathrm{imp}}^{s}}{2} \tag{36}$$

式中：k_{imp}^{s} 表示电不可通边界条件下裂纹尖端的应变强度因子，且

$$k_{\mathrm{imp}}^{s} = \frac{e_{15}k_{\mathrm{imp}}^{\sigma} + \varepsilon_{11}k_{\mathrm{imp}}^{D}}{e_{15}^2 + \varepsilon_{11}c_{44}} \tag{37}$$

将式(31)和式(37)代入式(36)，得到电不可通裂纹尖端的机械应变能释放率的解析表达式为

$$G_{\mathrm{imp}}^{m} = \frac{\pi a K^2(e_{15}\sigma_{32}^{\infty}D_2^{\infty} + \varepsilon_{11}\sigma_{32}^{\infty 2})}{2(e_{15}^2 + \varepsilon_{11}c_{44})} \tag{38}$$

对于电可通裂纹，利用同样的方法可得到电可通裂纹尖端的机械应变能释放率的解析表达式为

$$G_{\mathrm{per}}^{m} = \frac{\pi a K^2(\sigma_{32}^{\infty})^2}{2c_{44}} \tag{39}$$

3　数值算例

以常用的压电复合材料 PZT－5H 为例，讨论裂纹构型的几何参数对场强度因子的影响以及在电可通及电不可通边界条件下几何参数和机电载荷对机械应变能释放率的影响。压电复合材料 PZT－5H 的材料常数如下：

$$\begin{cases} c_{44} = 3.53\times10^{10}\ \mathrm{N/m^2} \\ e_{15} = 17.0\ \mathrm{C/m^2} \\ \varepsilon_{11} = 1.51\times10^{-8}\ \mathrm{C/(V\cdot m)} \end{cases} \tag{40}$$

为了无量纲化，取 $G_{\mathrm{cr}} = 5.0\ \mathrm{N/m}$ 为临界机械应变能释放率[1]，一般由实验测出。

考虑场强度因子随唇形裂纹几何构型的变化，即考虑无量纲应力强度因子 K 随裂纹长度与高度的比值 $\beta = h/a$ 的变化。从图 3 可知，无量纲应力强度因子 K 随着 β 的增大而减小，由此可知，唇形裂纹高度的增加会阻碍裂纹的扩展。特别是当唇形裂纹的高度趋于零时，退化为无限大压电体中 III 型 Griffith 裂纹，即 $K = 1$。进一步发现，与唇形裂纹相比，Griffith 裂纹更易于扩展。

取定几何参数为：$a = 0.001\ \mathrm{m}$。下文将讨论在电可通与电不可通两种边界条件下各个参数对机

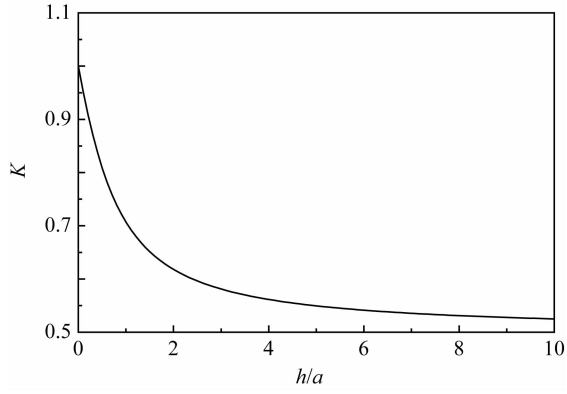

图 3　无量纲应力强度因子 K 随裂纹长度与高度比值($\beta = h/a$)的变化

Fig. 3　Variation of dimensionless stress intensity factor K with ratio of lip－shape crack length to lip－shape crack height ($\beta = h/a$)

械应变能释放率的影响。图 4 给出了力电载荷给定下唇形裂纹的几何尺寸在电可通及电不可通两种不同边界条件时对机械应变能释放率的影响，可以看出，裂纹形状在两种边界条件下对机械应变能释放率的影响规律情形相似，即随着裂纹高度 h 的增加，机械应变能释放率在减小，表明唇形裂纹的高度越小，该材料越容易破坏。反之若 h 为定值，随着 h/a 的减小，即 a 增大，机械应变能释放率增大，表明唇形裂纹长度的增加容易导致裂纹的扩展。当唇形裂纹的高度小于唇形裂纹的长度时，裂纹高度的变化对机械应变能释放率影响显著。若唇形裂纹高度 h 趋于无穷大，机械应变能释放率趋于一定值。并且，由图 4 可知，在电可通边界条件下机械应变能释放率的值比电不可通边界条件下机械应变能释放率的值大一些。

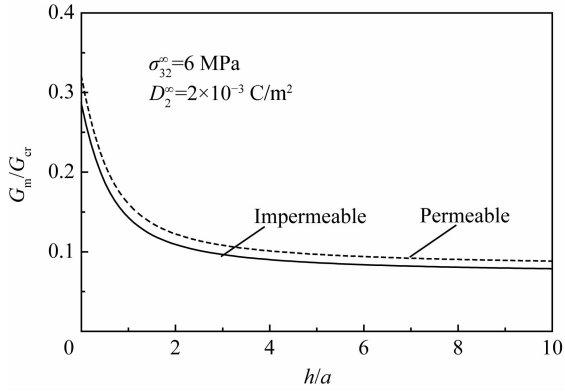

图 4　电可通及电不可通边界条件下机械应变能释放率 G_m/G_{cr} 随裂纹长度与高度的比值 h/a 的变化

Fig. 4　Variation of mechanical strain energy release rate G_m/G_{cr} with ratio of lip-shape crack length to lip-shape crack height h/a under electrically impermeable and permeable assumptions

取 $\beta=\dfrac{h}{a}=0.5$，图 5(a)给出了在电可通及电不可通两种不同边界条件下电载荷对机械应变能释放率的影响规律。从图中可以看出，在电可通边界件下，裂纹的机械应变能释放率仅依赖于机械载荷。在电不可通边界件下，当唇形裂纹的几何形状固定时，在一定的机械条载荷下，机械应变能释放率随电载荷的变化呈线性分布。正电场促进裂纹的扩展，负电场抑制裂纹的扩展。

图 5(b)给出了在电可通及电不可通两种不同边界条件下机械载荷对机械应变能释放率的影响规律。可见，机械载荷在两种边界条件下对机械应变能释放率的影响规律情形相似。当唇形裂纹的几何形状固定时，在一定的电载荷下，机械应变能释放率随机械载荷的变化呈抛物线分布。在纯机械载荷的作用下，机械载荷始终促进裂纹的扩展。当给定的电载荷为正时，机械载荷也总是促进裂纹的扩展；当给定的电载荷为负时，机械应变能释放率在机械载荷足够大时，机械载荷仍促进裂纹的扩展。在电可通边界条件下机械应变能释放率的值比电不可通边界条件下机械应变能释放率的值大一些。

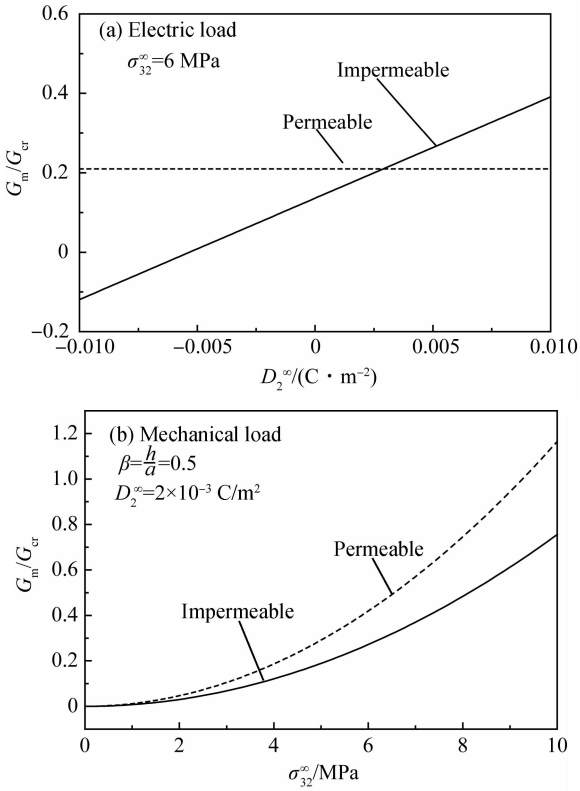

图 5　电可通及电不可通边界条件下电载荷和机械载荷对机械应变能释放率 G_m/G_{cr} 影响

Fig. 5　Effects of applied electric load and applied mechanical load on mechanical strain energy release rate G_m/G_{cr} under electrically impermeable and permeable assumptions

4　结　论

针对横观各向同性压电复合材料受面外剪切载荷和面内电载荷作用下的唇形裂纹问题，本文以复变方法和保角映射为基础，结合 Cauchy 积分公式和留数定理，得到了电可通与电不通两种边界条件下的场应力强度因子和机械应变能释放率的解析表达式。通过数值算例，讨论了裂纹构型的几何参数对场强度因子的影响以及在电可通及电不可通边界条件下几何参数和机电载荷对机械应变能释放率的影响。并得到如下结论：

(1)唇形裂纹高度的增加会阻碍裂纹的扩展。

含唇形裂纹的压电复合材料要比含 Griffith 裂纹的压电复合材料更为安全。唇形裂纹长度的增加容易导致压电复合材料失效。

(2)唇形裂纹的高度越小，该材料越容易破坏。当唇形裂纹的高度小于唇形裂纹的长度时，裂纹高度的变化对机械应变能释放率影响显著；当唇形裂纹的高度大于唇形裂纹的长度时，裂纹高度的变化对机械应变能释放率影响不明显。若唇形裂纹高度 h 趋于无穷大，机械应变能释放率趋于一定值。

(3) 机械载荷总是促进裂纹的扩展，电载荷对裂纹扩展的影响与裂纹面电边界条件有关。电可通边界下，电场对裂纹的扩展没有影响，而电不可通边界下，正电场总是促进裂纹扩展，负电场总是阻碍裂纹扩展。

(4) 电可通边界条件下机械应变能释放率的值比电不可通边界条件下的值大一些。在电可通边界条件下，裂纹的机械应变能释放率仅依赖于机械载荷。

参考文献：

[1] Pak Y E. Crack extension force in a piezoelectric material [J]. Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME, 1990, 57(3): 647-653.

[2] Zhang T Y, Tong P. Fracture mechanics for mode - III crack in a piezoelectric materials [J]. International Journal of Solids and Structures, 1996, 33(3): 343-359.

[3] Shindo Y, Narita F, Tanaka K. Electroelastic intensification near anti - plane shear crack in orthotropic piezoelectric ceramic strip[J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 1996, 25(1): 65-71.

[4] Narita F, Shindo Y. Anti - plane shear crack growth rate of piezoelectric ceramic body with finite width [J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 1998, 30(2): 127-132.

[5] Yang F Q, Kao I. Crack problem in piezoelectric materials: general anti - plane mechanical loading [J]. Mechanics of Materials, 1999, 31(6): 395-406.

[6] Zhong X C, Li X F. Closed - form solution for two collinear cracks in a piezoelectric strip [J]. Mechanics Research Communications, 2005, 2(4): 401-410.

[7] Zhou Z G, Zhang P W, Li G Q. Interactions of multiple parallel symmetric permeable mode III crack in a piezoelectric material plane [J]. European Journal of Mechanics - A/Solids, 2009, 28(4): 728-737.

[8] Zhou Z G, Guo Y, Wu L Z. The behavior of three parallel non - symmetric permeable mode - III cracks in a piezoelectric material plane [J]. Mechanics Research Communications, 2009, 36(6): 690-698.

[9] Zhang T Y, Gao C F. Fracture behaviors of piezoelectric materials [J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2004, 41(1-3): 339-379.

[10] Li X F, Lee K Y. A piezoelectric material with a periodic distribution of slant mode - III cracks [J]. Mechanics of Materials, 2005, 37(1): 189-200.

[11] Wang Y J, Gao C F. The mode III cracks originating from the edge of a circular hole in a piezoelectric solid [J]. International Journal of Solids and Structures, 2008, 45(16): 4590-4599.

[12] Guo J H, Lu Z X, Han H T, et al. The behavior of two non -symmetrical permeable cracks emanating from an elliptical hole in a piezoelectric solid [J]. European Journal of Mechanics - A/Solids, 2010, 29(4): 654-663.

[13] Guo J H, Lu Z X, Han H T, et al. Exact solutions for anti - plane problem of two asymmetrical edge cracks emanating from an elliptical hole in a piezoelectric material [J]. International Journal of Solids and Structures, 2009, 46(21): 3799-3809.

[14] Guo J H, Liu P, Lu Z X, et al. Anti - plane analysis of semi - infinite crack in a piezoelectric strip [J]. Applied Mathematics, 2011, 32(1): 75-82.

[15] 匡震邦. 只有尖点的平面曲边多角形缺陷的应力分析 [J]. 力学学报，1979，14(2)：218-228.
Kuang Zhenbang. Stress analysis for plane curved polygonal defects containing cusps only [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 1979, 14(2): 218-228.

[16] 刘又文，谢　超，蒋纯志，等. 无穷远处 III 型均布载荷与集中载荷作用下应变加强层连接唇形裂纹的解析解 [J]. 应用数学和力学，2010，31(9)：1075-1088.
Liu Youwen, Xie Chao, Jiang Chunzhi, et al. Analytical solution for a strained reinforcement layer bonded to a lip - shaped crack under remote mode III uniform load and a concentrated load [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2010, 31(9): 1075-1088.

[17] Xie C, Liu Y W, Fang Q H, et al. Cracking characteristics of mixed mode dislocations near a lip - like mode crack [J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2009, 51(2): 139-143.

[18] Sosa H. Plane problems in piezoelectric media with defects [J]. International Journal of Solids and Structures, 1991, 28(4): 491-505.

[19] Bogdan R. The mode III cracks emanating from an elliptical hole in the piezoelectric - electro - magneto - elastic materials [J]. Archive of Applied Mechanics, 2011, 81(11): 1607-1620.

[20] 方岱宁，刘金喜. 压电与铁电体的断裂力学 [M]. 北京：清华大学出版社，2008：227-240.
Fang Daining, Liu Jinxi. Fracture mechanics of piezoelectric and ferroelectric [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2008: 227-240.

[21] Pak S B, Sun C T. Fracture criteria for piezoelectric ceramics [J]. Journal of the American Ceramic Society, 1995, 78(6): 1475-1480.