复合材料学报
Acta Materiae Compositae Sinica
第 30 卷 第 3 期 6 月 2013 年
Vol. 30 No. 3 June 2013

文章编号：1000-3851(2013)03-0168-09

梯度复合材料应力强度因子计算的梯度扩展单元法

陈 康，许希武*，郭树祥
（南京航空航天大学 结构与强度研究所，机械结构力学及控制国家重点实验室，南京 210016）

摘 要： 推导了一种适用于梯度复合材料断裂特性分析的梯度扩展单元，采用细观力学方法描述材料变化的物理属性，通过线性插值位移场给出了 4 节点梯度扩展元随空间位置变化的刚度矩阵，并建立了结构的连续梯度有限元模型。通过将梯度单元的计算结果与均匀单元以及已有文献结果进行对比，证明了梯度扩展有限元(XFEM)的优越性，并进一步讨论了材料参数对裂纹尖端应力强度因子(SIF)的影响规律。研究结果表明：随着网格密度的增加，梯度单元的计算结果能够迅速收敛于准确解，均匀单元的计算误差不会随着网格细化而消失，且随着裂纹长度和属性梯度的增大而增大；属性梯度和涂层基体厚度比的增大导致涂覆型梯度材料的 SIF 增大；裂纹长度的增加和连接层基体厚度比的减小均导致连接型梯度材料的 SIF 增大。

关键词： 梯度复合材料；有限单元法；应力强度因子；梯度扩展单元；交互能量积分
中图分类号： TB330.1；O343 **文献标志码：** A

Graded extended finite elements for stress intensity factor of gradient composites

CHEN Kang, XU Xiwu*, GUO Shuxiang
(State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, Institute of Structures & Strength, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: Graded extended finite element was proposed for fracture characteristic analysis in graded composites whose varying properties were predicted by micromechanics method. The spatially varying stiffness matrix was calculated through the linear interpolation of displacement field and a continuous gradient finite element model was established. The superiority of graded extended finite element method (XFEM) was verified through comparing the results of graded element, homogeneous element and relevant literatures. Furthermore, the influence of material properties on stress intensity factor (SIF) was discussed in detail. The results of graded XFEM can converge to the exact solutions quickly as increasing mesh density, whereas the calculation error of homogeneous XFEM cannot vanish as increasing mesh density, and it rises with the increase of crack length and property gradient. The increase of property gradient and thickness ratio of coating and substrate enlarge the SIF in coating graded material. The increase of crack length and the decrease of thickness ratio of connecting layer and substrate lead to the raise of SIF in connecting graded material.

Keywords: graded composites; finite element method; stress intensity factor; graded extended element; interaction energy integral

梯度复合材料最早开发应用于极限温度梯度下的热保护涂层领域，由于减小甚至消除了涂层界面处的热失配应力[1]，该类材料能够极大地提高涂层的断裂阻抗[2]。目前，梯度材料由于其优异的热力学性能，逐渐作为一种主承力结构得到愈来愈广泛地应用。因此研究该材料的断裂特性具有重大的工程实际意义。

目前已有大量文献研究了梯度复合材料的裂纹尖端应力强度因子(stress intensity factor, SIF)。假设沿梯度方向材料的杨氏模量具有幂函数或者指数多项式的分布形式，且泊松比保持不变，Delale 和 Erdogan[3]、Konda 和 Erdogan[4]、果立成等[5]、

收到初稿日期： 2012-05-31；**收到修改稿日期：** 2012-09-07；**网络出版时间：** 2013-01-11 10:36:00
网络出版地址： http://www.cnki.net/kcms/detail/11.1801.TB.20130111.1036.005.html
基金项目： 校青年科技创新基金(56XAA12167)；国家自然科学基金(11272146)
通讯作者： 许希武，教授，博士生导师，主要研究方向为复合材料结构力学、飞行器结构完整性评定技术和计算力学
E-mail: xwxu@nuaa.edu.cn.

黄干云等[6]、Erdogan[7]、李春雨等[8]分别采用半解析法研究了梯度材料中的Ⅰ型，Ⅰ-Ⅱ复合型以及Ⅲ型裂纹尖端的SIF，重点讨论了材料的梯度参数对裂纹尖端SIF的影响规律。有限元方面，张幸红等[9]计算了在机械载荷和热载荷作用下，梯度材料裂纹尖端的SIF。Anlas等[10]的研究表明，对于梯度材料，传统的J积分不再具有路径无关性，并提出一种修正的J^*积分，计算了裂纹尖端的SIF。Kim和Paulino[11]总结了目前用于计算梯度材料裂纹尖端SIF的有限元方法：位移相关技术(DCT)、修正的裂纹闭合技术(MCC)和J_k^*积分技术，并比较了各种方法的优劣。Kim和Paulino[12-13]采用交互能量积分和梯度有限元方法分别研究了各向同性/正交各向异性梯度复合材料中Ⅰ-Ⅱ复合型裂纹的SIF。Ayhan[14]采用强化有限元方法计算了三维梯度复合材料中裂纹尖端的Ⅰ-型和Ⅰ-Ⅱ复合型SIF。Dolbow和Gosz[15]采用交互能量积分结合扩展有限元方法计算得到了梯度材料中具有任意取向的裂纹尖端的混合型应力强度因子，并讨论了材料参数的影响规律。上述有限元法中主要采用“层合板模型”[9-10]、高斯积分点赋予变化属性[14-15]或者梯度单元[11-13]模拟梯度材料变化的物理属性。已有的研究[16]表明，采用梯度单元是一种准确且高效的有限元数值方法。

近年来，扩展有限元(XFEM)由于其出色的计算性能得到了广泛地关注和应用[17-19]。该类单元在模拟裂纹等不连续特征的扩展时，无需划分精细网格且无需进行网格重构，因此能够极大地提高有限元的计算效率，且已经被应用于梯度材料的裂纹尖端SIF研究中[15]。然而，尚未见关于梯度扩展有限单元的公开报道。本文中推导了一种适用于梯度复合材料断裂特性分析的梯度扩展单元，采用细观力学方法描述材料变化的物理属性，通过线性插值位移场给出了4节点梯度扩展元随空间位置变化的刚度矩阵，并建立了结构的连续梯度有限元模型。通过将本文的计算结果与“层合板模型”的计算结果以及已有的文献结果进行对比，说明了梯度扩展元的优越性，并基于梯度扩展单元进一步讨论了材料参数对裂纹尖端SIF的影响规律。

1　材料等效性能

梯度材料的组分体积分数和宏观等效性能沿梯度方向均呈现连续的变化。如图1所示，对于两相梯度材料，采用下面的组分体积分布形式：

$$\begin{cases} V_2 = 0 & (-W \leqslant x < x_1) \\ V_2 = V_1 + (V_r - V_1)\left(\dfrac{x - x_1}{x_r - x_1}\right)^N & (x_1 \leqslant x \leqslant x_r) \\ V_2 = 1 & (x_r < x \leqslant W) \end{cases} \tag{1}$$

$$V_1 = 1 - V_2 \tag{2}$$

其中：下标1和2分别代表两种不同的材料组分，V_1和V_2分别是各组分体积分数；N是组分的体积分布系数。从上式得到，当$x = x_1$时，$V_2 = V_1$；当$x = x_r$时，$V_2 = V_r$。$x = -W$，$x = x_1$，$x = x_r$和$x = W$的具体位置如图1所示。其中，下标l和r分别表示左侧组分1和右侧组分2与中间梯度层的分界。

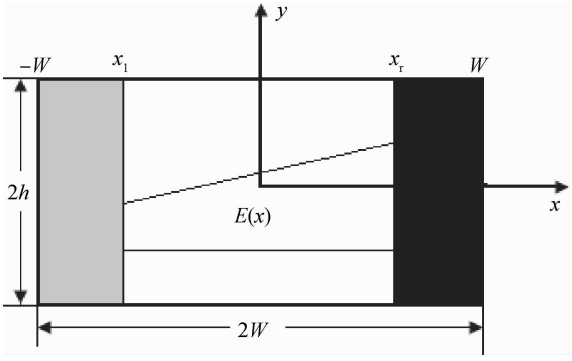

图1　梯度材料板示意图

Fig. 1　Schematic diagram of gradient plate

本文中采用Mori-Tanaka方法描述沿梯度方向材料的等效体积模量、剪切模量、杨氏模量和泊松比：

$$\mu = \mu_1 + \frac{V_2(\mu_2 - \mu_1)}{\left[1 + \dfrac{V_1(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_1 + \dfrac{\mu_1(9\kappa_1 + 8\mu_1)}{6(\kappa_1 + 2\mu_1)}}\right]} \tag{3}$$

$$\kappa = \kappa_1 + \frac{V_2(\kappa_2 - \kappa_1)}{\left(1 + V_1\dfrac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_1 + 4\mu_1/3}\right)} \tag{4}$$

$$E = \frac{9\kappa\mu}{\mu + 3\kappa},\ \nu = \frac{3\kappa - 2\mu}{2(\mu + 3\kappa)} \tag{5}$$

其中：κ、μ、E和ν分别是材料的等效体积模量、剪切模量、杨氏模量和泊松比。下标1和2代表两种不同的组分；κ_1和κ_2分别表示两种组分的体积模量；μ_1和μ_2分别表示两种组分的剪切模量。

2　梯度扩展有限单元

假设含有裂纹的梯度材料各向同性、线弹性、

小变形，且裂纹表面不受到拉力的作用。通过虚位移原理得到其控制方程的弱形式为

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}) : \delta\boldsymbol{\varepsilon} \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{b} \cdot \delta\boldsymbol{u} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\boldsymbol{t}} \cdot \delta\boldsymbol{u} \mathrm{d}\Gamma \quad (6)$$

其中：$\boldsymbol{C}$ 是梯度材料的弹性张量；$\boldsymbol{b}$ 和 $\bar{\boldsymbol{t}}$ 分别是体力向量和边界面力向量；$\delta\boldsymbol{u}$ 是虚位移向量(检验位移函数)；$\boldsymbol{\varepsilon}$ 和 $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ 分别是应变张量和虚应变张量，$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_s \boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{u}$ 是真实位移向量(试探位移函数)；Ω 表示体积域；Γ_s 表示应力边界。扩展有限元中采用如下强化位移逼近函数：

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \sum_{I \in \mathbf{N}} N_I(\boldsymbol{x}) \Big[\boldsymbol{u}_I + \underbrace{H_I(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{a}_I}_{I \in \mathbf{N}_\Gamma} + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{4} \Phi_I^\alpha(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{b}_I^\alpha}_{I \in \mathbf{N}_\Lambda} \Big] \quad (7)$$

其中：$\boldsymbol{u}_I$、$\boldsymbol{a}_I$ 和 $\boldsymbol{b}_I^\alpha$ 均为节点位移自由度；N、N_Γ 和 N_Λ 分别表示所有节点集、裂纹段节点集和裂纹尖端节点集；$N_I(\boldsymbol{x})$、$H_I(\boldsymbol{x})$ 和 $\Phi_I^\alpha(\boldsymbol{x})$ 分别是常规位移插值函数、裂纹段插值函数和裂纹尖端插值函数；下标 I 表示节点编号。$H_I(\boldsymbol{x})$ 考虑了裂纹引起的位移突变，$\Phi_I^\alpha(\boldsymbol{x})$ 考虑了裂纹尖端的位移不连续和应力场奇异性。对于 4 节点线性扩展单元分别具有下面的形式：

$$N_I(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4}(1 + \xi_I \xi)(1 + \eta_I \eta) \quad (8)$$

$$H_I(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \text{above crack} \\ -1 & \text{below crack} \end{cases} \quad (9)$$

$$\Phi_I^\alpha(\boldsymbol{x}) = \sqrt{r} \left\{ \sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}, \sin\theta \sin\frac{\theta}{2}, \sin\theta \cos\frac{\theta}{2} \right\} \quad (10)$$

其中：(ξ, η) 是高斯坐标；(r, θ) 是裂纹尖端的极坐标；(ξ_I, η_I) 是节点的高斯坐标。位移试探函数和检验函数均取式(7)的形式，结合几何关系带入到式(6)中，并考虑到节点虚位移的任意性得

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \quad (11)$$

其中：$\boldsymbol{u}$ 是节点位移向量；$\boldsymbol{f}$ 是节点外力向量；$\boldsymbol{K}$ 是总体刚度矩阵：

$$\boldsymbol{k}_{ij}^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{ij}^{\mathrm{uu}} & \boldsymbol{k}_{ij}^{\mathrm{ua}} & \boldsymbol{k}_{ij}^{\mathrm{ub}} \\ \boldsymbol{k}_{ij}^{\mathrm{au}} & \boldsymbol{k}_{ij}^{\mathrm{aa}} & \boldsymbol{k}_{ij}^{\mathrm{ab}} \\ \boldsymbol{k}_{ij}^{\mathrm{bu}} & \boldsymbol{k}_{ij}^{\mathrm{ba}} & \boldsymbol{k}_{ij}^{\mathrm{bb}} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{e}} = \{u_i, a_i, b_i^1, b_i^2, b_i^3, b_i^4\}^{\mathrm{T}} \quad (13)$$

$$\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{e}} = \{f_i^{\mathrm{u}}, f_i^{\mathrm{a}}, f_i^{\mathrm{b}1}, f_i^{\mathrm{b}2}, f_i^{\mathrm{b}3}, f_i^{\mathrm{b}4}\}^{\mathrm{T}} \quad (14)$$

$$\boldsymbol{k}_{ij}^{\mathrm{rs}}(x) = \int_{\Omega^{\mathrm{e}}} (B_i^{\mathrm{r}})^{\mathrm{T}} C(x) B_j^{\mathrm{s}} \mathrm{d}\Omega \quad (\mathrm{r}, \mathrm{s} = \mathrm{u}, \mathrm{a}, \mathrm{b}) \quad (15)$$

其中：$\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{e}}$，$\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{e}}$ 和 $\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{r}}$ 的具体形式见文献[18]。式(15)即为梯度扩展单元的刚度矩阵。对于梯度材料，由于弹性张量 $C(x)$ 是位置坐标的连续函数，因此梯度扩展元的刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 随空间位置连续变化。当然，本文中提出的梯度扩展单元中材料属性的描述方法并不仅仅局限于 Mori-Tanaka 法，也可以适用于其他的细观力学方法(如自洽模型、三相模型等)和规则函数法(如幂函数和指数函数)。

3　应力强度因子的计算

采用交互能量积分计算梯度材料裂纹尖端的应力强度因子。如图 2 所示，假设裂纹表面没有拉力作用，则裂纹尖端的围线积分为

$$J = -\lim_{\Gamma_s \to 0} \oint_{\Gamma_s} P_{1j} n_j \mathrm{d}\Gamma \quad (16)$$

其中：$P_{1j} = \sigma_{ij} u_{i,1} - W\delta_{1j}$，$W$ 是应变能密度，δ_{1j} 是 Kronecker 符号，σ_{ij} 是应力场，$u_{i,1}$ 表示位移场对裂尖局部坐标 x 的导数。为了便于有限元数值计算，将上式改写为区域积分形式：

$$J = \int_{\Omega} P_{1j} q_{,j} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega} P_{1j,j} q \mathrm{d}\Omega \quad (17)$$

其中，权函数 q 在裂纹尖端围线 Γ_s 处等于 1.0，在外部围线 Γ_0 处等于 0，区域 Ω 内光滑过渡。

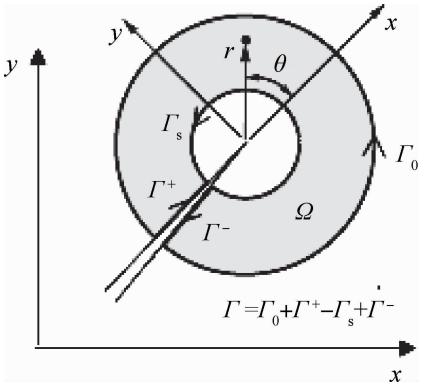

图 2　裂纹尖端围线积分示意图

Fig. 2　Schematic diagram of contour integral at crack-tip

与常规的 J 积分不同，交互能量积分中需要引入辅助的应力、应变场($\sigma_{ij}^{\mathrm{aux}}$，$\varepsilon_{ij}^{\mathrm{aux}}$)和位移场($u_i^{\mathrm{aux}}$)，具体的选取方式参考文献[12]。将真实场和辅助场的叠加场带入到式(17)中，推导得

$$J^{\mathrm{s}} = J + J^{\mathrm{aux}} + I \quad (18)$$

其中：J^{aux} 具有和 J 类似的表达式；I 即为交互能量积分，具体形式为

$$I = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} u_{i,1}^{\mathrm{aux}} + \sigma_{ij}^{\mathrm{aux}} u_{i,1} - \sigma_{ik} \varepsilon_{ik}^{\mathrm{aux}} \delta_{1j}) q_{,j} \mathrm{d}\Omega +$$

表 1　梯度板的几何尺寸、性能参数和载荷

Table 1　Geometric dimensions, property parameters and loads of graded plate

a/W	L/W	W/mm	E_1/GPa	ν_1	E_2/GPa	ν_2	σ_t/GPa	σ_b/GPa
0.25, 0.50, 0.75	10	0.5	3.0	0.2	1.0	0.3333	1.0	$-2x$

Note: a—Crack length; W—Half of width; L—Half of height; E_1, ν_1—Young's modulus and Poisson's ratio of component 1; E_2, ν_2—Young's modulus and Poisson's ratio of component 2; σ_t—Tension load; σ_b—Bending load.

$$\int_\Omega \sigma_{ij}(u_{i,1j}^{\text{aux}} - \varepsilon_{ij,1}^{\text{aux}})q\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega C_{ijkl,1}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}^{\text{aux}}q\,\mathrm{d}\Omega \tag{19}$$

交互能量积分与应力强度因子具有如下关系：

$$I = \frac{2}{E_{\text{tip}}}(K_{\text{I}}K_{\text{I}}^{\text{aux}} + K_{\text{II}}K_{\text{II}}^{\text{aux}}) \tag{20}$$

选取 $K_{\text{I}}^{\text{aux}} = 1.0$，$K_{\text{II}}^{\text{aux}} = 0.0$，$K_{\text{I}} = \left(\frac{E_{\text{tip}}}{2}\right)\cdot I$

选取 $K_{\text{I}}^{\text{aux}} = 0.0$，$K_{\text{II}}^{\text{aux}} = 1.0$，$K_{\text{II}} = \left(\frac{E_{\text{tip}}}{2}\right)\cdot I$

其中：E_{tip} 是裂纹尖端的杨氏模量；$K_{\text{I}}^{\text{aux}}$ 和 $K_{\text{II}}^{\text{aux}}$ 分别表示辅助场的Ⅰ型和Ⅱ型应力强度因子。式(19)中第二项来源于梯度材料中辅助场的不相容性，第三项来源于梯度材料属性的非均匀性。

4　结果与讨论

4.1　梯度扩展单元的优越性

采用带有边缘裂纹的梯度板验证梯度扩展单元的优越性。如图 3 所示，算例中采用的数据如表 1 所示，平面应力状态，取式(1)中 $V_1 = 0$，$V_r = 1.0$，$x_1 = -W$，$x_r = W$。板的下边界简支，右下端点固支，上边界施加均布拉伸载荷和弯曲载荷。通过编写用户自定义单元 UEL 子程序，将梯度扩展单元嵌入到有限元软件 ABAQUS 中，并编写交互能量积分后处理子程序求解裂纹尖端的 SIF。

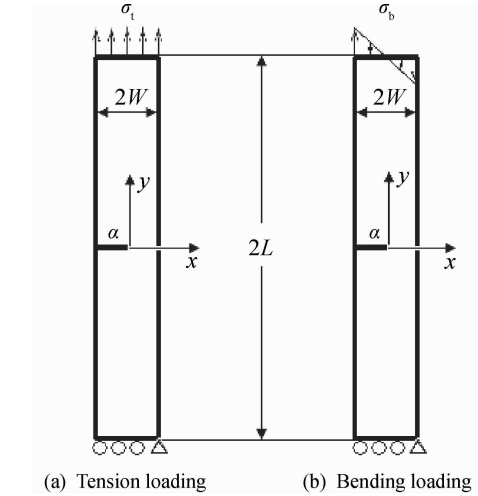

图 3　带有边缘裂纹的梯度板

Fig. 3　Graded plate with edge crack

4.1.1　网格密度的影响

讨论网格密度对梯度扩展单元和常规均匀单元(材料属性取单元中心点处)计算精度的影响，算例中采用 4 节点四边形单元，选取 $a/W = 0.50$ 和 $N = 1.0$ 的情况，采用五种网格密度 5×50，10×100，20×200，30×300，40×400，50×500。计算结果如图 4 所示(图中 Homog XFEM 表示均匀扩展单元，Graded XFEM 表示梯度扩展单元)，随着网格密度的增加，梯度单元的结果能够迅速收敛于准确解，而均匀单元最终的稳定解与准确解存在较大的误差。分析认为，均匀单元由于在单元内部属性均匀分布，因此导致计算 SIF 时忽略了式(19)中的第三项从而产生较大的计算误差。随着网格密度的增加，均匀单元计算得到的物理场精度提高，但是单元内部的属性梯度仍然为零，因此，该误差不会消除。对于梯度单元，由于考虑了单元内部的属性梯度，其误差全部来源于物理场的计算精度，且该精度会随着网格密度的增加而减小，最终梯度扩展单元的计算结果与精确解完全吻合。

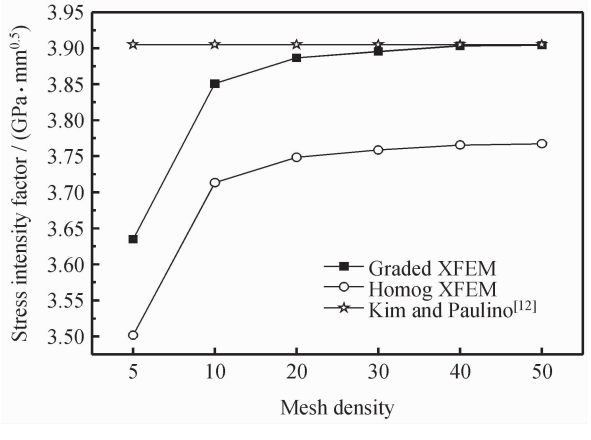

图 4　网格密度对梯度材料中梯度单元和均匀单元的影响

Fig. 4　Influence of mesh density on graded and homogeneous XFEM in graded composites

4.1.2　裂纹长度和载荷情况的影响

讨论裂纹长度和载荷情况对梯度/均匀扩展

单元计算精度的影响，计算中采用 4 节点四边形单元和 20×200 的网格密度，总共讨论了三种裂纹长度：$a/W=0.25$、0.50、0.75，两种载荷情况：拉伸载荷和弯曲载荷，结果列于表 2 中，表中的准确值参考文献[12]。总体而言，梯度单元的计算精度优于均匀单元(梯度单元最大误差为1.86%，均匀单元为 3.28%)；两种载荷情况下，随着裂纹长度的增加，梯度单元的计算误差先减小后增大，而均匀单元的计算误差始终增大；载荷情况对两种单元的计算精度影响很小。由于均匀单元的计算误差可能来源于其属性均匀而导致的式(19)中第三项的 $C_{ijkl,1}=0$。可以预测，该误差会随着梯度材料属性非均匀性的增加而变大(具体见 4.1.3 节)。

4.1.3　组分体积分布系数和属性梯度的影响

目前组分体积分布系数和材料的属性梯度分别对梯度和均匀扩展单元计算精度的影响方面的研究工作尚未见相关文献公开报道，这里采用梯度单元的结果作为参照值，验证均匀单元的计算精度，如图 5 所示。图 5(a)显示当 $a/W=0.25$ 时，梯度单元和均匀单元最大计算偏差出现在 $N=1.0$ 的情况($E_1/E_2=12/1$ 时相对偏差达到 7.03%)，$N=5.0$ 时两者的计算结果吻合很好；图 5(b)显示当 $a/W=0.50$ 时，梯度单元和均匀单元最大计算偏差仍然出现在 $N=1.0$ 的情况($E_1/E_2=1/12$ 时相对偏差达到 6.81%)，$N=0.2$ 时两者的计算偏差最小；图 5(c)显示当 $a/W=0.75$ 时，梯度单元和均匀单元最大计算偏差出现在 $N=5.0$ 的情况($E_1/E_2=1/12$ 时相对偏差达到 15.87%)，$N=0.2$ 时两者的计算结果吻合很好。另外，从图中还可以看出，$a/W=0.25$ 且 $N=5.0$ 时，SIF 随材料属性梯度的增加先增大后减小，最大值出现在 $E_1/E_2=1/6$。

4.2　涂覆型梯度材料参数对 SIF 的影响

算例为带有边缘裂纹的梯度涂层结构，选用 SiC/Ti－6Al－4V 材料体系，材料参数：$E_{SiC}=440$ GPa，$\nu_{SiC}=0.17$，$E_{Ti\text{-}6Al\text{-}4V}=115$ GPa，$\nu_{Ti\text{-}6Al\text{-}4V}=0.293$，平面应力状态，施加沿 y 方向均布的位移载荷，下边界简支，右下端点固支，结构网格如图 6 所示。其中网格密集区域为梯度涂层，厚度是 h，网格逐渐稀疏区域为基体，厚度是($H-h$)。坐标原点位于中心点处。

4.2.1　涂层基体厚度比的影响

算例中取涂层厚度 $h=1.0$ mm，通过变化结构总厚度 H 实现不同的涂层基体厚度比，取组分体积分布系数 $N=1.0$，结果如图 7 所示。在不同的裂纹长度下，SIF 随涂层基体厚度比的变化趋势基本一致，均随着厚度比的减小(即结构总厚度的增大)而减小。值得指出的是，对于涂层/基体结构，$N=1.0$ 时随着裂纹长度的增加，SIF 先增大再减小。

4.2.2　组分体积分布系数的影响

算例中取 $h/H=1/50$，组分体积分布系数分别取 $N=(0.1, 0.2, 1.0, 5.0, 10.0)$，结果如图 8 所示，$a/h=0.25$ 时随着组分体积分布系数 N 从 5.0 增大到 10.0，SIF 逐渐减小；$a/h=0.50$ 时随着 N 的增大，SIF 先变大后基本上保持不变；$a/h=0.75$ 时随着 N 的增大，SIF 始终变大。此外，当 $N=0.1$、0.2、5.0、10.0 时，随着裂纹长度的增加 SIF 逐渐变大，当 $N=1.0$ 时随着裂纹长度的增加 SIF 先增大后减小(导致 $a/h=0.75$ 曲线下坠，与另外两条曲线出现交叉点)，与图 7 得到的结论一致。

表 2　不同裂纹长度和载荷情况下梯度单元(GXFEM)和(HXFEM)均匀单元计算的应力强度因子

Table 2　Stress intensity factor of graded XFEM(GXFEM) and homogeneous XFEM(HXFEM) for various crack lengths and loads

a/W	Tension					Bending				
	GXFEM	Error/%	HXFEM	Error/%	Kim[12]	GXFEM	Error/%	HXFEM	Error/%	Kim[12]
0.25	1.411	0.93	1.376	1.57	1.398	1.235	0.82	1.209	1.31	1.225
0.50	3.897	0.20	3.818	2.23	3.905	2.195	0.14	2.153	2.05	2.198
0.75	13.644	1.63	13.415	3.28	13.87	5.637	1.86	5.542	3.25	5.744

Note: GXFEM—Graded XFEM; HXFEM—Homogeneous XFEM.

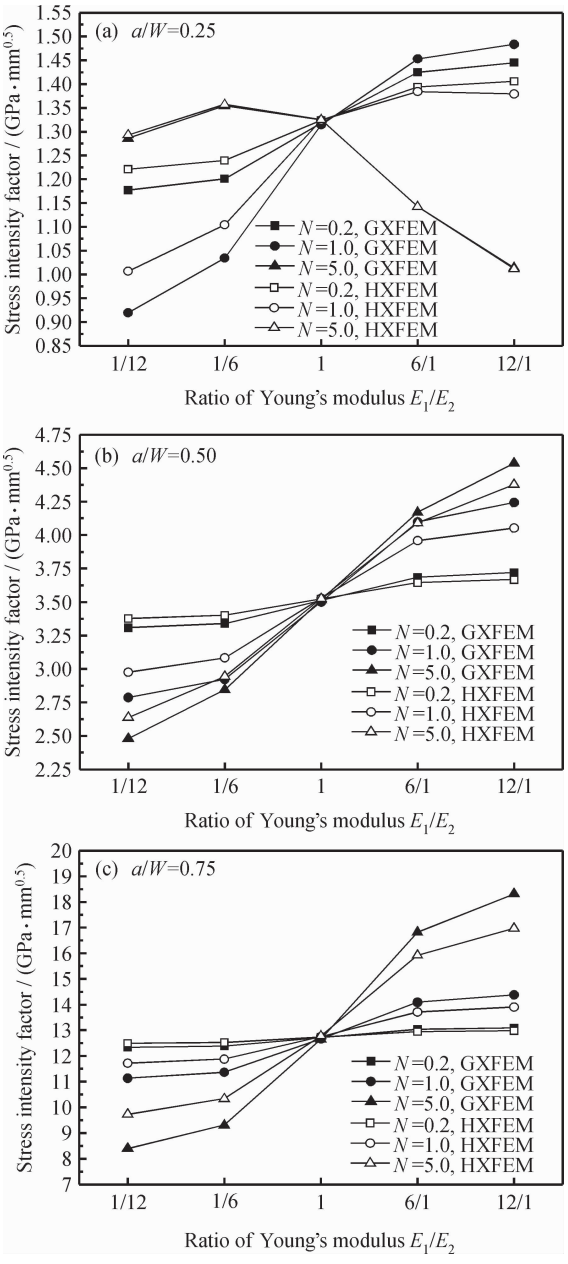

图 5　组分体积分布系数和材料梯度对梯度材料中梯度单元和均匀单元的影响

Fig. 5　Influence of component distribution coefficient and property gradient on graded and homogeneous XFEM in graded composites

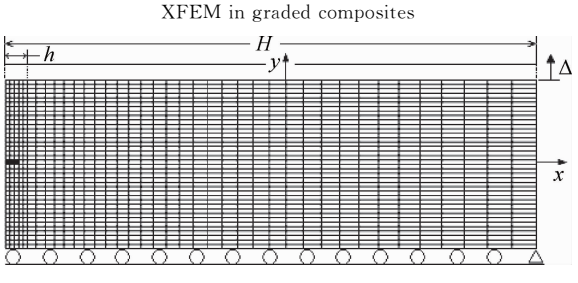

图 6　梯度涂层结构示意图

Fig. 6　Schematic diagram of graded coating structure

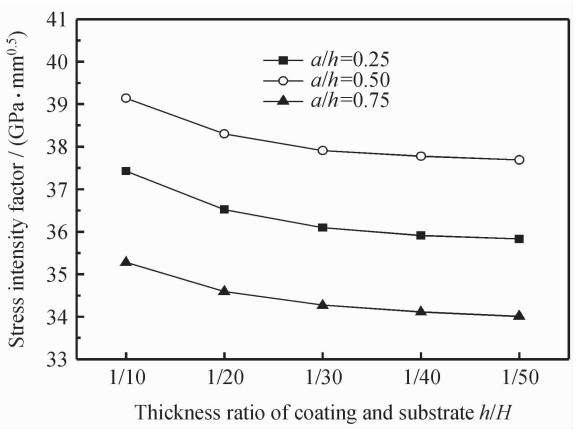

图 7　涂层基体厚度比对涂覆梯度结构中 SIF 的影响

Fig. 7　Influence of thickness ratio of coating and substrate on SIF in coating graded structure

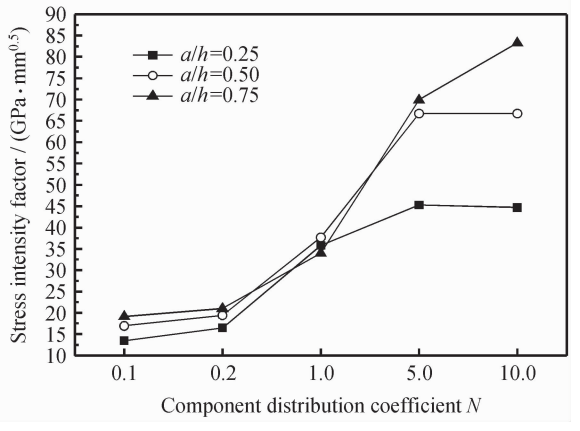

图 8　组分体积分布系数对涂覆梯度结构中 SIF 的影响

Fig. 8　Influence of component distribution coefficient on SIF in coating graded structure

4.2.3　属性梯度的影响

算例中取 $h/H=1/50$、$N=1.0$，组分 2(Ti-6Al-4V)保持不变，通过变化组分 1 的弹性模量实现梯度材料不同的属性梯度，取 $E_1/E_2=(0.1, 0.2, 1.0, 5.0, 10.0)$，结果如图 9 所示，三种裂纹长度下裂纹尖端 SIF 均随着属性梯度的增大而变大。此外，还可以得到：当 $E_1/E_2=0.1, 0.2, 1.0$ 时，随着裂纹长度的增大 SIF 均变大，当 $E_1/E_2=5.0$ 时 SIF 首先基本不变后减小($SIF_{0.25}\approx SIF_{0.50}>SIF_{0.75}$，导致 $a/h=0.75$ 曲线下坠，与另外两条曲线交叉)，当 $E_1/E_2=10.0$ 时始终逐渐减小($SIF_{0.25}>SIF_{0.50}>SIF_{0.75}$，导致 $a/h=0.50$ 曲线下坠，与 $a/h=0.25$ 曲线交叉)。因此属性梯度影响了 SIF 随裂纹长度的变化趋势。

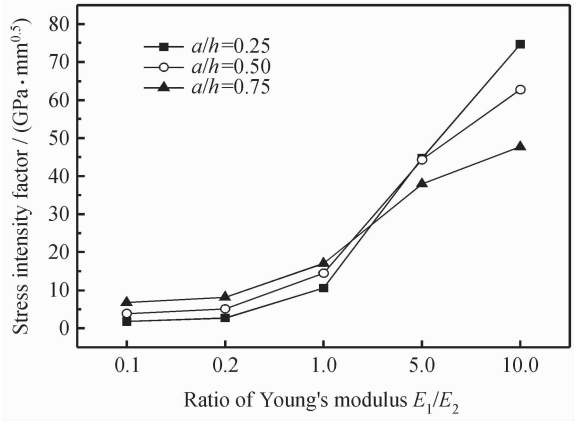

图 9　属性梯度对涂覆梯度结构中 SIF 的影响

Fig. 9　Influence of property gradient on SIF in coating graded structure

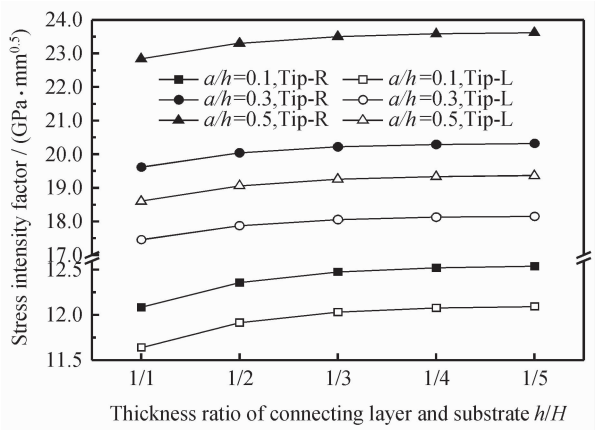

图 11　连接层基体厚度比对连接梯度结构中 SIF 的影响

Fig. 11　Influence of thickness ratio of connecting layer and substrate on SIF in connecting graded structure

4.3　连接型梯度材料参数对 SIF 的影响

算例为带有中心裂纹的梯度连接结构，选用 Al1100/Ti－6Al－4V 材料体系，参数为：$E_{\mathrm{Al1100}}=69$ GPa，$\nu_{\mathrm{Al1100}}=0.34$，$E_{\mathrm{Ti\text{-}6Al\text{-}4V}}=115$ GPa，$\nu_{\mathrm{Ti\text{-}6Al\text{-}4V}}=0.293$，平面应力状态，沿 y 方向施加均布位移载荷，下边界简支，右下端点固支，结构网格如图 10 所示。其中网格密集区域为梯度连接层，厚度是 h，两侧网格逐渐稀疏区域为基体，厚度是 H。坐标原点位于结构的中心点处，裂纹与 x 轴的夹角为 θ，逆时针为正，图中略去。

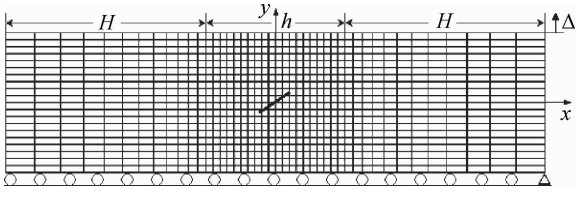

图 10　梯度连接结构示意图

Fig. 10　Schematic diagram of graded connecting structure

4.3.1　连接层基体厚度比的影响

算例中取 $\theta=0$、$N=1.0$、$h=10.0$ mm，通过变化基体厚度 H 实现不同的连接层基体厚度比，算例中选用三种裂纹长度 $a/h=(0.1, 0.3, 0.5)$。结果如图 11 所示，图中 Tip-R 和 Tip-L 分别表示图 10 中裂纹的右端点和左端点。总体而言，随着连接层基体厚度比的减小（基体厚度增加）SIF 变大。裂纹右端点的 SIF 大于左端点，随着裂纹长度的增加两者差异变大，且裂纹长度的增加导致两者均增大。

4.3.2　组分体积分布系数的影响

算例中采取 $\theta=0$，$h/H=1/5$，组分体积分布系数分别取 $N=(0.1, 0.2, 1.0, 5.0, 10.0)$，结果如图 12 所示。随着组分体积分布系数 N 的增大，裂纹右端点 SIF 减小，左端点 SIF 首先减小后基本保持不变，裂纹长度对 SIF 的变化趋势影响很小。整体上，裂纹右端点 SIF 高于左端点；随着裂纹长度的增加，裂纹左端点和右端点 SIF 差异变大；随着 N 的增加，左端点和右端点 SIF 之间的差异首先变大后减小。此外，随着裂纹长度的增加两个端点的 SIF 均增大，与 4.3.1 节结论一致。此外，图中左端点 $a/h=0.5$ 曲线和右端点 $a/h=0.3$ 曲线交叉，其可能来源于：$N<1$ 时，随着 N 的增加，左端点属性变化比右端点剧烈（参考文献[12]中的图 5），

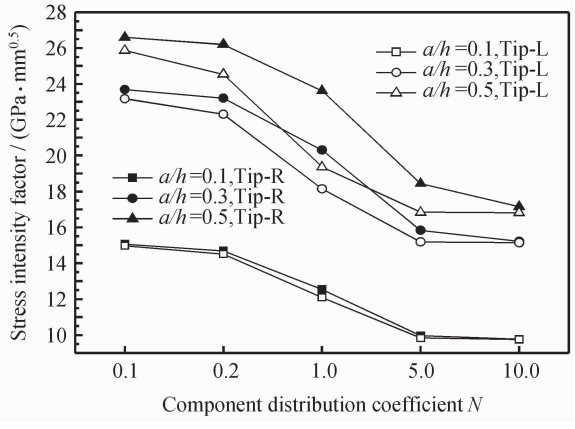

图 12　组分体积分布系数对连接梯度结构中 SIF 的影响

Fig. 12　Influence of component distribution coefficient on SIF in connecting graded structure

导致左端点 $a/h=0.5$ 曲线下坠幅度较大，超过右端点 $a/h=0.3$ 曲线的幅度，两条曲线出现了交叉。

4.3.3　裂纹转角的影响

算例中裂纹转角取 $\theta=(0°, 18°, 36°, 54°, 72°, 90°)$，其余参数取 $h/H=1/5$，$N=1.0$，$a/h=(0.1, 0.3, 0.5)$。得到的Ⅰ型和Ⅱ型 SIF 如图 13 所示。在 0°～90°范围内，Ⅰ型 SIF 随着裂纹转角的增大而减小，Ⅱ型 SIF 随着裂纹转角的增大先增大后减小。裂纹右端点的Ⅰ型和Ⅱ型 SIF 均大于左端点，裂纹长度对Ⅰ型和Ⅱ型 SIF 的变化趋势影响较小。

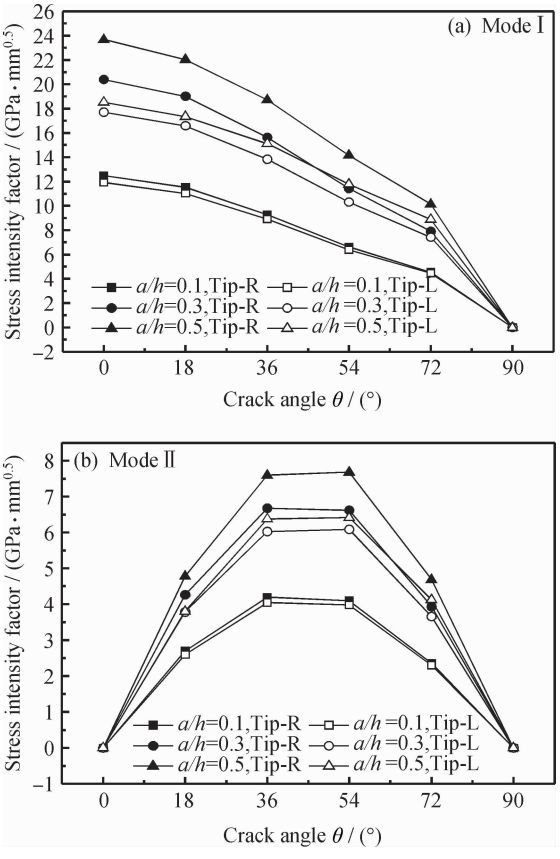

图 13　裂纹转角对连接梯度结构中 SIF 的影响

Fig. 13　Influence of crack angle on SIF in connecting graded structure

5　结　论

（1）随着网格密度的增加，梯度扩展单元的计算结果能迅速收敛于准确解；均匀单元的计算误差较大，且不会随着网格密度的增加而改善。

（2）材料参数的变化对梯度扩展元的计算结果影响较小；裂纹长度的增加导致均匀单元的计算误差进一步增大；不同的组分体积分布系数下，属性梯度的增加导致两种单元的计算偏差变大。

（3）涂覆型梯度材料裂纹尖端的 SIF 随着涂层基体厚度比的减小而减小；组分体积分布系数对 SIF 的影响受到裂纹长度的影响；SIF 随着属性梯度的增加而增加；SIF 随着裂纹长度的变化受到组分体积分布系数和属性梯度的影响。

（4）连接型梯度材料裂纹右端点的 SIF 高于左端点，随着裂纹长度的增加两者差异变大；裂纹尖端的 SIF 随着连接层基体厚度比的减小而增大；随着组分体积分布系数的增大，右端点 SIF 减小，左端点 SIF 先减小后保持恒定；在 0°～90°范围内，Ⅰ型 SIF 随着裂纹转角的增大而减小，Ⅱ型 SIF 随着裂纹转角的增大先增大后减小；裂纹长度的增加导致裂纹左端点和右端点的 SIF 均增大。

参考文献：

[1] Lee Y D, Erdogan F. Residual stresses in FGM and laminated thermal barrier coatings [J]. International Journal of Fracture, 1994-1995, 69(2): 145-165.

[2] Jin Z H, Feng Y Z. Thermal fracture resistance of a functionally graded coating with periodic edge cracks [J]. Surface and Coatings Technology, 2008, 202(17): 4189-4197.

[3] Delale F, Erdogan F. The crack problem for a nonhomogeneous plane [J]. Journal of Applied Mechanics, 1983, 50(3): 609-614.

[4] Konda N, Erdogan F. The mixed mode crack problem in a nonhomogeneous elastic medium [J]. Engineering Fracture Mechanics, 1994, 47(4): 533-545.

[5] 果立成，吴林志，杜善义. 含任意方向裂纹功能梯度材料的应力分析研究[J]. 复合材料学报，2004，21(1)：84-89.
Guo Licheng, Wu Linzhi, Du Shanyi. Stress analysis of functionally graded materials with an arbitrarily oriented crack [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2004, 21(1): 84-89.

[6] 黄干云，汪越胜，余寿文. 功能梯度材料的平面断裂力学分析[J]. 力学学报，2005，37(1)：1-8.
Huang Ganyun, Wang Yuesheng, Yu Shouwen. A new multi-layered model for in-plane fracture analysis of functionally graded materials [J]. Acta Mechanica Sinica, 2005, 37(1): 1-8.

[7] Erdogan F. The crack problem for bonded nonhomogeneous materials under antiplane shear loading [J]. Journal of Applied Mechanics, 1985, 52(4): 823-828.

[8] 李春雨，邹振祝，段祝平. 正交各向异性功能梯度材料反平面裂纹尖端应力场[J]. 固体力学学报，2001，22(1)：81-84.
Li Chunyu, Zou Zhenzhu, Duan Zhuping. Stress field around the antiplane crack tip in an orthotropic functionally graded material [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2001, 22(1): 81-84.

[9] 张幸红，李亚辉，韩杰才，等. TiC-Ni 系功能梯度材料的断裂

力学有限元分析[J]. 复合材料学报，2001，18(4)：87-92.
Zhang Xinghong，Li Yahui，Han Jiecai，et al. Cracking problem analysis of TiC－Ni FGM using finite element method [J]. Acta Materiae Compositae Sinica，2001，18(4)：87-92.

[10] Anlas G，Santare M H，Lambros J. Numerical calculation of stress intensity factors in functionally graded materials [J]. International Journal of Fracture，2000，104(2)：131-143.

[11] Kim J-H，Paulino G H. Finite element evaluation of mixed mode stress intensity factors in functionally graded materials [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering，2002，53(8)：1903-1935.

[12] Kim J-H，Paulino G H. An accurate scheme for mixed-mode fracture analysis of functionally graded materials using the interaction integral and micromechanics models [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering，2003，58(10)：1457-1497.

[13] Kim J-H，Paulino G H. The interaction integral for fracture of orthotropic functionally graded materials：Evaluation of stress intensity factors [J]. International Journal of Solids and Structures，2003，40(15)：3967-4001.

[14] Ayhan A O. Three-dimensional mixed-mode stress intensity factors for cracks in functionally graded materials using enriched finite elements [J]. International Journal of Solids and Structures，2009，46(3/4)：796-810.

[15] Dolbow J E，Gosz M. On the computation of mixed-mode stress intensity factors in functionally graded materials [J]. International Journal of Solids and Structures，2002，39(9)：2557-2574.

[16] Kim J-H，Paulino G H. Isoparametric graded finite elements for nonhomogeneous isotropic and orthotropic materials [J]. Journal of Applied Mechanics，2002，69(4)：502-514.

[17] Moës N，Dolbow J，Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering，1999，46(1)：131-150.

[18] Sukumar N，Prevost J-H. Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method：Part I－Computer implementation [J]. International Journal of Solids and Structures，2003，40(26)：7513-7537.

[19] 李录贤，王铁军. 扩展有限元法(XFEM)及其应用[J]. 力学进展，2005，35(1)：5-20.
Li Luxian，Wang Tiejun. The extended finite element method and its applications－A review [J]. Advances in Mechanics，2005，35(1)：5-20.