第3卷 第1期 复合材料学报 Vol. 3 No.1
1986年3月 ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA March 1986

复合材料层板层间应力分析的能量法

夏熄 張行

(北京航空学院飞行器設計与应用力学系)

摘 要

本文首先探討了复合材料层板层間应力的問題提法，指出了經典层板理論与层間应力的层板理論的关系；然后本文給出求解层間应力的方法，将每层的面內应力沿厚度方向以完备函数族进行单向展开，沿寬度方向設其为任意函数，利用平衡方程和余能原理可得任意函数所滿足Euler方程，通过求解該方程得到层間应力。本文最后还給出了解决奇異性的方法。計算結果表明，应力分布与奇異項系数的收斂都是迅速的。

层間应力問題提法

复合材料层板的层间应力分析对结构设计是非常重要的，它往往是导致层板脱层破坏的主要因素。对于这个问题，曾有多人进行研究，有限差分法[1]与有限元素法[4、5]等数值方法都曾被用于解决此问题；也有人用过双向级数解法[6]。但到目前为止，还沒有一种公认的令人滿意的方法。本文在文献[7]的基础上，对运用余能原理解决此问题的方法作了进一步的发展。

对于对称鋪层层板，在任意面內对称载荷作用下，运用经典层板理论，即在直法线假设下，可将面內位移場表示如下：

$$u_\alpha = u_\alpha(x_1,\ x_2) \qquad (\alpha=1,\ 2) \tag{2, 1}$$

其中，x_1Ox_2为层中面。由几何方程，可知

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}\right) \tag{2, 2}$$

由直法线假设，以上各量对每层都是相同的。设第s层弹性张量为$C^{(s)}_{\alpha\beta\lambda\mu}$，则该层应力分量为

$$\sigma^{(s)}_{\alpha\beta} = C^{(s)}_{\alpha\beta\lambda\mu}\varepsilon_{\lambda\eta} \qquad (\alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \mu,\ =1,\ 2) \tag{2, 3}$$

本文1985年1月14日收到

在边界处，由平衡条件可得第层外力如下：

$$T_{\alpha}^{(s)}=\sigma_{\alpha\beta}^{(s)}l_{\beta} \tag{2, 4}$$

其中l_{β}为板侧面外法线方向余弦。显然由经典理论，各层的外力是不同的。然而在静力边界上，外力沿板厚是均匀分布的，即

$$\overline{T}_{\alpha}=p_{\alpha}(x_1,\ x_2) \qquad (x_1;\ x_2)\text{属于边界点} \tag{2, 5}$$

因此，经典理论一般不能精确满足力边界条件。

为此，将边界外力分解为如下两部分：

$$\overline{T}_{\alpha}^{(s)}=\overline{T}_{\alpha\mathrm{I}}^{(s)}+\overline{T}_{\alpha\mathrm{II}}^{(s)} \tag{2, 6}$$

其中$\overline{T}_{\alpha\mathrm{I}}^{(s)}=\sigma_{\alpha\beta}^{(s)}l_{\beta}$为经典理论所得之结果；$\overline{T}_{\alpha\mathrm{II}}^{(s)}=p_{\alpha}-\sigma_{\alpha\beta}^{(s)}l_{\beta}$是给定外力与经典理论所得结果之差。由于经典理论所得结果能满足合力边界条件，因而$\overline{T}_{\alpha\mathrm{II}}^{(s)}$是一组自相平衡力系，即它沿板厚的积分处处为零。显然，在载荷$\overline{T}_{\alpha\mathrm{I}}^{(s)}$的作用下，层板中无层间应力；而在$\overline{T}_{\alpha\mathrm{II}}^{(s)}$载荷的作用下，层板中有层间应力。

综上所述，复合材料层板的层间应力问题归结为求解在一组自相平衡力系作用下层板的应力场。

对于图1所示单向受拉板条，通过以上的分析，可得自由边上的$\overline{T}_{\alpha\mathrm{II}}^{(s)}$如下：

$$p_0=\frac{P}{\theta lh}\left\{\frac{E_2\nu_{12}(E_1-E_2)}{(E_1+E_2)^2-(2\nu_{12}E_2)^2}\right\}=\varepsilon_z\left\{\frac{E_1E_2\nu_{12}(E_1-E_2)}{(E_1-E_2)(E_1-E_2\nu_{12})^2}\right\} \tag{2, 7}$$

其中E_1为纤维方向拉压弹性模量，E_2为垂直于纤维方向拉压弹性模量，ε_z为z方向正应变。自由面外力与层间应力分别示于图2与3图。

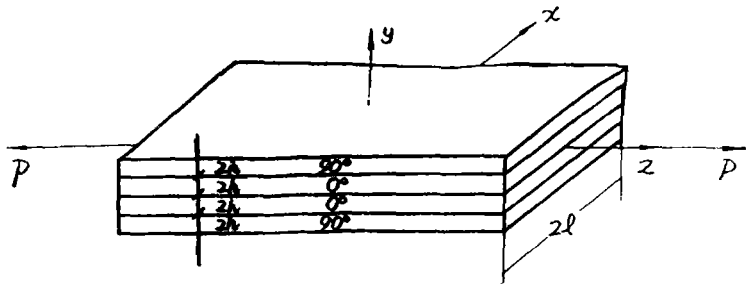

图1　单向受拉正交层板

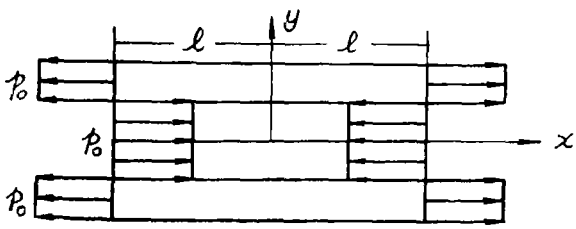

图2　层板自由端面外力

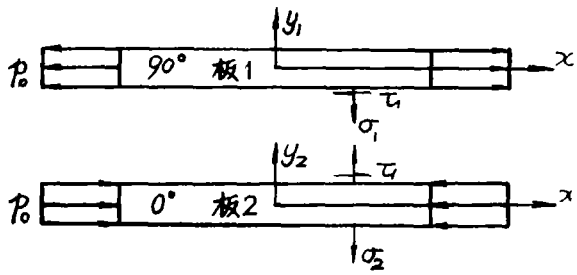

图3　层板内层間应力

簡单层板层間应力解法

对图 1 所示之层板，可设板 1 与板 2（图 3）面内正应力分布分别为

$$\sigma_{x1}=\sum_{n=0}^{M}P_n(y_1)g_n(x);\qquad \sigma_{x2}=\sum_{n=0}^{N}P_n(y_2)f_n(x) \tag{3, 1}$$

其中，$P_n(y)$为区间$[-h, h]$上的完备函数族。这里，我们取其为$Legendre$多项式。$g_n(x)$与$f_n(x)$是待定函数。

利用平衡方程、本构关系与余能原理，可得到$g_n(x)$、$f_n(x)$所满足的方程，进而求得层间应力分布。可以证明：当 $n\geqslant 2$ 时，$f_n(x)$与$g_n(x)$不产生层间应力。

对板 1，由（3，1）式中第一式，利用平衡方程

$$\frac{\partial\sigma_{xy1}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy1}}{\partial y_1}=0;\qquad \frac{\partial\sigma_{xy1}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{y1}}{\partial y_1}=0 \tag{3, 2}$$

以及板 1 表面力的边界条件

$$\sigma_{y1}\big|_{y_2=h}=0;\qquad \sigma_{xy1}\big|_{y_1=h}=0 \tag{3, 3}$$

可得板 1 内应力分布如下：

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{y1}=\sum_{n=0}^{N}P_n(y_1)g_n(x);\qquad \sigma_{y1}=\sum_{n=0}^{N}{}_nR_n(y_1)g_n''(x)\\&\sigma_{xy1}=\sum_{n=0}^{N}Q_n(y_1)g_n'(x)\end{aligned}\right\} \tag{3, 4}$$

其中，$Q_n(y_1)$与$R_n(y_1)$系由（3,2）式与（3, 3）式决定。N为使应力解收敛所需之项数。

设 $\{\sigma_1\}=\{\sigma_1, \sigma_{y1}, \sigma_{xy1}\}$*则可将（3，4）式写成如下形式：

$$\{\sigma_1\}=[S_1]\{g''\}+[S_2]\{g'\}+[S_3]\{g\} \tag{3, 5}$$

这里，$\{g\}$是x的函数，它等于

$$\{g\}=\{g_0, g_1, g_2, \cdots, g_N\} \tag{3, 6}$$

而$[S_i](i=1, 2, 3)$是y_1的函数，它是以P_n、Q_n与R_n为元素的$3\times N$的矩阵。

同理，对板 2，通过类似步骤，可以得到

$$\{\sigma_2\}=[T_1]\{f''\}+[T_2]\{f'\}+[T_3]\{f\}+[W_1]\{g''\}+[W_2]\{g'\} \tag{3, 7}$$

其中，$\{f\}$是x的函数，它等于

$$\{f\}=\{f_0, f_1, \cdots, f_N\} \tag{3, 8}$$

由总体平衡条件，还可得到

$$f_0(x)=-g_0(x) \tag{3, 9}$$

为了方便，引入一个新的广义向量如下：

$$\{\xi\}=\{g_0, g_1, f_1, g_2, f_2, \cdots, g_N, f_N\} \tag{3,10}$$

于是，（3，5）式（3，7）与式可重新表示为为

$$\{\sigma_i\}=[\sigma_{i1}]\{\xi''\}+[\sigma_3]\{\xi'\}+[\sigma_3]\{\xi\}\qquad (i=1, 2) \tag{3,11}$$

---

* 为节省篇幅我们采用列阵横写的表达方式

应当指出，（3,11）式所给出的应力表达式是满足平衡方程的。

设$\{\varepsilon_i\}=\{\varepsilon_{xi},\varepsilon_{yi},\varepsilon_{xyi}\}$并以$[C_i]$表示第$i$板材料柔度矩阵，则可将各层的本构方程写成

$$\{\varepsilon_i\}=[C_i]\{\delta_i\} \qquad (i=1,2) \tag{3,12}$$

根据余能原理，协调方程与移边界条件可由以下泛函极值条件保证

$$\delta\Pi_c=\int_V \varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij}dV-\int_{S_{11}}\bar{u}_i\delta p_i dS=0 \tag{3,13}$$

在本问题中，位移边界条件是齐次的，从而，上式可以改写如下：

$$\int_0^l\int_{-h}^h\left\{\varepsilon_1\right\}^T\left\{\delta\sigma_1\right\}dy_1dx+\int_0^l\int_{-h}^h\left\{\varepsilon_2\right\}^T\left\{\delta\sigma_2\right\}dy_2dx=0 \tag{3,14}$$

将（3,11）式与（3,12）式代入上式，经过沿板厚积分及分部积分运算并注意到$\{\delta\xi\}$的任意性，可得如下$Euler$方程

$$[K_1]\{\xi^{IV}\}+[K_2]\{\xi''\}+[K_3]\{\xi\} \tag{3,15}$$

其中，$[K_1]$、$[K_2]$与$[K_3]$均为实对称矩阵

这是一个齐次联立四阶微分方程组。求解这样一个方程组的问题是一个四阶广义特征值问题，经过一定的变换，我们可将此四阶特征转化为一阶广义特征值问题或一阶特征值问题。为此，我们令

$$\{\xi'\}=\{\xi_1\},\ \{\xi_1'\}=\{\xi_2\},\ \{\xi_2'\}=[\xi_3] \tag{3,16}$$

同时定义

$$\{q\}=\{\{\xi\},\{\xi_1\},\{\xi_2\},\{\xi_3\}\} \tag{3,17}$$

则可将（3,15）式转化为一阶微分方程组如下：

$$[A]\{q'\}+[B]\{q\}=0 \tag{3,18}$$

其中，

$$[A]=\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [K_1] \end{pmatrix},\quad [B]=\begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \\ [K_3] & 0 & [K_2] & 0 \end{pmatrix} \tag{3,19}$$

这里，I为$(2N-1)$阶单位矩阵。至此，问题已转化为一阶广义特征值问题。求解此特征值问题，可得$4\times(2N-1)$个特征值及相应的特征函数。然后利用边界条件即可得到各板内的应力分布，从而进一步得到层间应力分布。在求解特征值问题时，我们调用的求特征值问题的程序包$EISPACK$[10]。

数值計算結果

为了便于比较，我们取弹性常数与文献[5]一致，即沿弹性主轴的各弹性常数为

$$E_{11}=20.0\times10^6psi,\qquad E_{22}=2.1\times10^6psi,$$

$$\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}=0.21,\qquad G_{12}=G_{13}+G_{23}=0.85\times10^6psi$$

文献[4]所取数据与以上数据基本一致。

图4、图5给出了$[90,0]_s$和$[0,90]_s$情形下，当项数n取不同值时，90°—0°交界面上正应力、剪应力沿x的分布情况。结果表明，当$n=4$、5时，解基本上已经收敛，只是边界处

的应力值还有些跳跃现象。关于这一点，我们将在后面加以讨论。

图 6 给出了 90—0° 交界面上层间剪应力 τ_1的分布，并与文献[5, 8]所示结果进行了比较。由图可知，当$x/l<0.8$时，本文结果与文[5]用有限元法所得结果以及文[8]的结果都吻合得较好。但当$x/l>0.8$时，本文结果与其它两结果有明显的差别，特别是在靠近边界处，本文结果有更大的应力峰值和应力梯度。

图 7 为90°—0° 界面上层间正应力分布图。可以看出，除了非常近边界处外，本文结果与文[4]和文[5]都吻合得较好。特别是与文[5]的有限元计算结果非常接近。

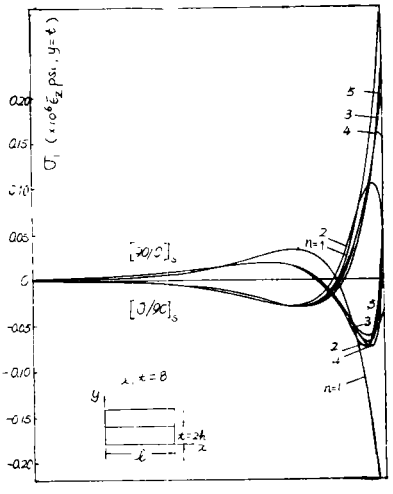

图 4　当 n 取不同值时层間正应力 σ_1沿 x 分布曲线

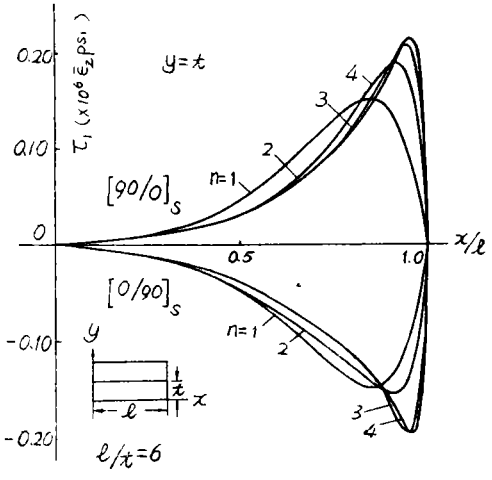

图 5　当 n 取不同值时层間剪应力 τ_1沿 x 分布曲线

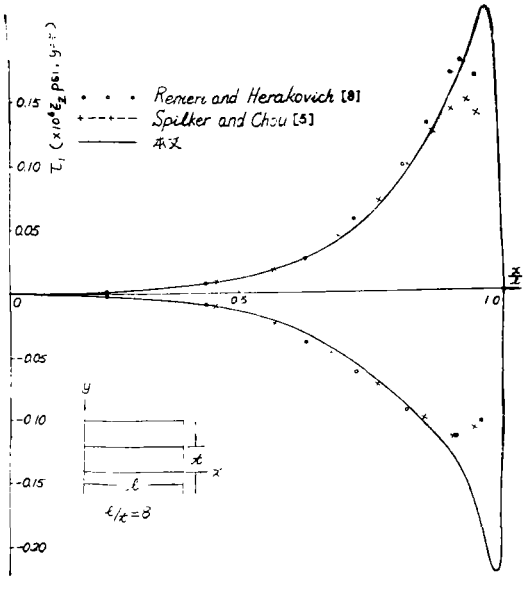

图 6　层間剪应力τ_1的分布与其它文献所給結果比較

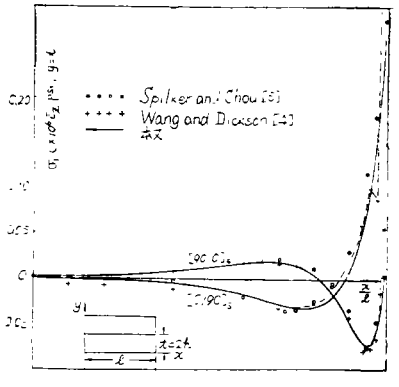

图 7　层間正应力σ_1的分布与其它文献所給結果比較

而文[4]结果在靠近边界处表现出不太合理的振荡现象，相比之下，本文结果没有不合理的应力分布形式。此外，本文结果证实了文[4，5]中表现出的、$(90/0)_s$与$(0/90)_s$铺层层间正应力分布并非鏡面反射这一现象。

在中间对称面($y=0$)上正应力分布图（图8）中，可以看到类似的情形，即只是在靠近边界处的应力峰值与文[4、5]有些差别。然而在中间对称面上，$(90/0)_s$与$(0/90)_s$铺层的应力分布基本上是鏡面反射关系。

此外，本文还计算了当宽厚比l/t不同时的应力分布情况（图9）。由结果可见，无量纲边界层的宽度l/t随的增加而减小，其宽度大致与板厚同量级。文[4]中已经提到了这一现象，本文结果再一次证实了这一点。

图4～图9的计算结果表明：

1. 当$n=5$时，解基本上已经收欲敛

2. 所得结果在远离边界处与[4，5，6，8]基本一致。

3. 自由边处正应力不收敛并与上述文献所列结果互相分歧，这表明自由边是应力奇异点。

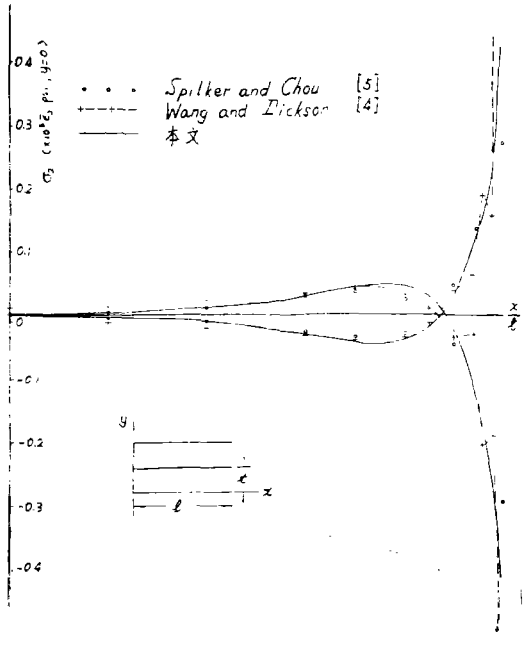

图8　对称面正应力σ_2的分布

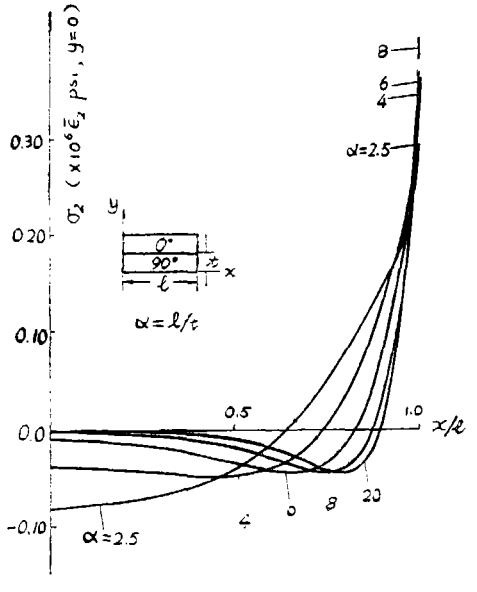

图9　宽厚比l/t对层間应力分布的影响

应力奇異性的討論

关于复合材料层板在自由边的应力奇异性问题，文献[11]进行了详细的讨论，对于准三维问题，ε_{ij}和σ_{ij}与x_3无关，可设位移分量如下：

$$u_i=\sum_{n=1}^{N} v_{in} f_n(z)-\sum_{n=1}^{N} v_{in}\bar{f}(\bar{z})+U_i \qquad (5,1)$$

式中 $$z=\sum_{k=1}^{3} p_k x_k,\ p_1=1, p_2=p,\ p_3=0 \tag{5, 2}$$

p 为特征值，v_{in}为相应特征向量，U_i则为满足非齐次静力边界条件的特解，将（5，1）代入几何方程并进而代入物性方程，可得应力分量如下：

$$\sigma_{ij}=\sum_{m=1}^{N}\tau_{ijn}f_n(z)+\sum_{n=1}^{N}\overline{\tau_{ijn}}\ \overline{f_n(z)}+T_{ij} \tag{5, 3}$$

式中，T_{ij}是与U_i相关的应力分量，而τ_{ijn}等于

$$\tau_{ijn}=\frac{1}{2}C_{ijkl}(v_{kn}p_l+v_{ln}p_k) \tag{5, 4}$$

这里，C_{ijkl}为弹性张量分量，将（5，3）代入平衡方程并考虑到V_{ij}满足平衡方程，可得

$$\tau_{ijn}=p_i=0 \tag{5, 5}$$

将（5，4）代入（5，5）并考虑到（5，2），我们有

$$D_{ik}v_{kn}=0 \tag{5, 6}$$

其中， $$D_{ik}=Q_{ik}+p(R_{ik}+R_{ki})+p^2S_{ik} \tag{5, 7}$$

而且 $$Q_{ik}C_{i1k1},\ R_{ik}=C_{i1k2},\ S_{ik}=C_{i2k2} \tag{5, 8}$$

由v_{kn}有非零解的条件，D_{ik}的行列式为零，从而可得的六次代数方程，可以证明：p不是实数，故有三对复特征根p_l($l=1$，2，3以及相应特征向量v_{inl}与特征张量τ_{ijnl}。

为了考察应力奇异性，取坐标如图10，且设

$$f(z)=\frac{z^{1+\delta}}{1+\delta} \tag{5, 9}$$

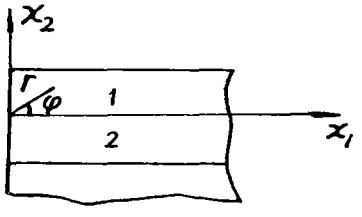

图10 自由面边界条件与交界面交界条件

其中，δ为一常数，现在，由于存在三对复特征根，故位移与应力的表达式(5,1)与(5,3)与可以改写如下：

$$u_i=\sum_{l=1}^{3}\frac{A_l}{1+\delta}v_{il}z_l^{1+\delta}+\sum_{l=1}^{3}\frac{\overline{A_l}}{1+\delta}\overline{v_{il}}\ \overline{z_l^{1+\delta}} \tag{5,10}$$

$$\sigma_{ij}=\sum_{l=1}^{3}A_l\tau_{ijl}z^{\delta}+\sum_{l=1}^{3}\overline{A_l}\ \overline{\tau_{ijl}}z^{\delta} \tag{5,11}$$

引入极坐标（r，φ），可将变量z写作如下形式：

$$z=x_1+px_2=r\zeta,\ \zeta=\cos\varphi+p\sin\varphi \tag{5,12}$$

将（5,12）代入（5,10）与（5,11），我们有

$$u_i=2Re\left\{\frac{r^{1+\delta}}{1+\delta}\sum_{l=1}^{3}A_lv_{il}\zeta_l^{1+\delta}\right\} \tag{5,13}$$

$$\sigma_{ij}=2Re\left\{r^{\delta}\sum_{l=1}^{3}A_lv_{il}\zeta_l^{l+\delta}\right\} \tag{5,14}$$

利用板1与2在$\varphi=0$处的连续条件以及$\varphi=\pm\pi/2$处的自由边界条件，可得$A_l^{(1)}$，$A_l^{(2)}$ $\overline{A}_l^{(1)}$，$\overline{A}_l^{(2)}$($l=1$，2，3)的12个齐次线性方程如下：

$$[K]\{q\}=0 \tag{5,15}$$

其中，$[K]$为方阵，$\{q\}$为由 $A_l^{(1)}$，$A_l^{(2)}$，$\bar{A}_l^{(1)}$，$\bar{A}_l^{(2)}$ 组成之列向量，由以上方程组的非零解条件，可得

$$|K|=0 \tag{5,16}$$

展开以上行列式，可得δ的超越方程，如δ的一根有负实部，则由 (5,14) σ_{ij}在$r=0$有奇异性，对本文所取材料，当鋪层方式为$[90/0]_s$或$[0/90]_s$，文[11]算出奇异性阶次 $\delta=-3.338\times10^{-2}$。

效仿断裂力学作法，定义奇异项系数K为

$$K=\lim_{r\to0}(\delta_1/r^{\delta}) \tag{5,17}$$

根据这个定义，利用本文得到的 $\sigma_1\sim r$ 曲线作出 $\sigma_1/r^{\delta}\sim r$ 曲线（图11），由埃特金插值法外推上述曲线，可得K值。由计算可知，当 $n=5$ 时，所得是收敛的。收敛性亦可从图看出。

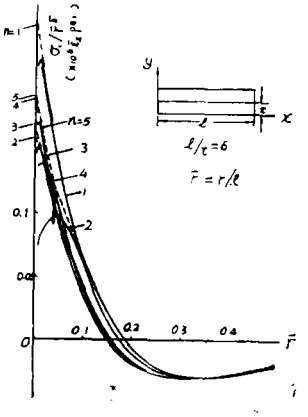

图11 奇異項系数随項数的收敛情况

結　論

1. 本文所给层间应力分析方法简单合理；
2. 本文方法所得结果的收敛性相当好；
3. 本文方法可以处理应力奇异性问题；
4. 本文方法可推广到任意鋪层层板。

参 考 文 献

[1] R.B.Pipes and N.J.Pagano, "Interlaminar Stresses in Composite Laminacts Under Axial Extesnion", J.Comp.Materials, Vol.4(1970), P538.

[2] N.J.Pagano, "On the Calculation of Interlamnar Normal Stresses in Composite Laminates", J.Comp.Materials, Vol.8 (1974), P65.

[3] R.B.Pipes and N.J.Pagano, "Interlaminar Stresses in Composite Laminates —— An Approximate Elasticity Solution", J.App.Machanics, Vol.41(1974), P668.

[4] J.T.S.Wang and J.N.Dickson, "Interlaminar Stresses in Symmetric Composite Laminates", J.Comp.Materials, Vol. 12 (1978), P390.

[5] R.L.Spilker and S.C.Chou, "Edge Effects in Symmetric Composite Laminates: Importance of Satisfying the Traction-Free-Edge Condition," J.Comp. Materials Vol. 14, (1980), P2

[6] A.S.D.Wang and F.W.Crosssman, "Some New Results on Edge Effect in Symmetric Composite Laminates" J. Comp. Materials, Vol.11(1977), P.92.

[7] 张稚范，"复合材料拉杆的层間应力"，清华大学討論班，1983.

[8] G.D.Renieri and C.T.Herakovich, "Nonlinear Analyses of Laminated Fibrous Composites." VPI-E-76-10, Virginia Polytechnic Institute (1976).

[9] R.M.Jones, "Mechanics of Composite Materials", McGraw, 1975。

[10] 郭富印、冯国环、石中岳、朱耀祖，“FORTAN算法汇編”，第三分册，国防工业出版社。

[11] T.C.T.Ting and S.C.Chou, “Stress Singularities in Laminated Composites”, Proceedings of Second USA-USSR, Symposium on Fractute of Composite Materials. Martinus, Nijhroff Publishers, 1982.

[12] S.B.Dong and D.B.Goetschel, “Edge Effects in Laminated Composite Plates”, J.App, Mech, Vol. 49 (1982), P129.

（續44頁）

polycarbonate 聚碳酸酯

prestressed concrete 预应力混凝土

PEEK polyethretherketone 聚醚醚酮

PES polyether sulfone 聚醚砜

PET polyethylene terephthalate 聚对苯二甲酸乙二醇酯

peak exothermic temperature 最高放热温度

pH potential of hydrogen 氢离子指数；pH值

PHR(phr) part(s) per hundred parts of resin(or rubber) 份/100份树脂(或橡胶)

PL pot life 活化期

PO peroxide 过氧化物

PP polypropylene 聚丙烯

PPS polyphenylene sulfide 聚苯硫醚

PSF(PSU) polysulfone 聚砜

P/T pultrusion 挤拉成型

PTFE polytetrafluoroethylene 聚四氟乙烯

PVA(L) polyvinyl alcohol 聚乙烯醇

PVA(C) polyvinyl acetate 聚乙（醋）酸乙烯酯

R roving 玻璃粗纱

RC resin content 树脂含量

本期“*FRP*常用縮写詞”摘自中国玻璃鋼工业协会編譯的**《玻璃钢（FRP）手册》**（譯自日文），該手册預計于5月下旬出版，具体訂购方法见本刊下一期通知。

ENERGY METHOD IN INTERLAMINAR STRESS ANALYSIS OF LAMINATES

Xia Kun and Zhang Xing

Department of Flight Vehicle Design and Applied Mechanics
Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics, Beijing, China

(Received Jan. 1985)

Abstract

The governing differential equations of composite laminate are obtained by expanding the in-plane normal stresses into a series along the thickness of plate and applying the complementary energy method. The solution of these equations yields the distribution of interlaminar stresses. Numerical results show that when the number of terms of the series increases, the values of interlaminar stresses in laminate but the vicinity of free edges converge rapidly. And the present results coincide with those of other authors' very well. The singularity of interlaminar stresses at the free edge is discussed and the convergent coefficient K of the singular term is obtained by the use of extrapolation with the stresses distribution according to the singularity analysis by Ting and Chou.

THE MOTION EQUATIONS IN GEODESIC WINDING

He Shoujian

Research Section of Composite Materials
Harbin Architectural and Civil Engineering Institute
Harbin, China

(Received April 1985)

Abstract

In principle, the equations given in the paper can be applied to any kind of windable geometric surface and any determined way of motion of the fiber-