第3卷 第1期 复合材料学报 Vol. 3 No. 1
1986年3月 ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA March 1986

复合材料层合板的灵敏度分析和最优设計

程耿东

（大連工学院工程力学研究所）

摘 要

本文給出了对称鋪設的复合材料层合板的結构反应（静載下結构的柔韌性*、自振频率及屈曲載荷）对各层纤維鋪設角的灵敏度，并給出了最优鋪設角应滿足的准則。对最优化准則的分析表明，在很一般的条件下，任一最优层合板最多只有四个不同的鋪設角度。本文还对静載下矩形板的柔韌性作了大量数值計算，結果有明柔韌性是鋪設角的非凸函数；最后本文建議了将数学规划法和准則法結合的一混合优化方法。用它对鋪設角进行优化，数值例子說明这种方法是成功的。

一、引 言

众所周知，通过适当安排复合材料纤维的鋪设角，复合材料板的特性可以得到优化。对于对称铺设层合板的频率最大化、屈曲荷载最大化及柔韧性最小化设计，文献中均有所研究

由于复合材料板的结构分析已很复杂，多数工作中采取不用导数（或灵敏度）的数学规划方式去进行优化，而且多数工作是针对四边简支板的，因为在这种情况下才可以得到闭和的解析解或级数 。本文指出，求得复合材料层合板的结构反应对各层鋪设角的灵敏度不困难的。根据这些灵敏度信息可以建立最优鋪设角应滿足的准则，它们是最优鋪设角的一个准四次方程，由比可推出在很一般的条件下，不论一个复合材料层合板有多少层数，其最优鋪设角不同值的个数不会超过四个。

利用离散的克希霍夫假定下的三角形板单元，我们对静力载荷下复合材料层合板的柔韧

本文1985年6月27日收到。本文是中国科学基金会資助課題

*柔韌性是*Compliance*的中文譯名，反映結构柔度。

性作了大量数值计算，并进行了不同边长比、不同边界条件及不同材料时最优铺设角的计算。数值结果表明，柔韧性是铺设角的非凸函数；计算还表明混合法——将数学规划中的导数类算法和准则法结合，是一种很有效的数值方法。

二、問題提法

本文将考虑对称铺设的复合材料层合板，并且采用忽略剪切变形的小挠度板理论。虽然近年来的研究表明，很多情况下复合材料层合板的计算应当考虑剪切变形甚至大挠度的影响，但是应用经典理论对层合板的最优化进行研究，仍然可提供很有意义的信息。由于铺层是对称的，层合板的面内和面外反应是不耦合的，本文将只考虑面外反应。在对层合板优化时，认为板的形状，板的边界条件、各层厚度及层数、各层材料性质均已给定，受到静载时外载也是给定的，设计变量是各层的铺设角，优化的目标将包括最小化在静力载荷下的柔韧性、最大化结构自振频率，最大化屈曲载荷。

1、 最小化柔韧性問題

采用定义在中面的OXY坐标系，在静载下复合材料层合板的挠度 w（x，y）满足下列微分方程：

$$
\begin{aligned}
L(D,\ w)=&(D_{11}w_{,xx})_{,xx}+(D_{12}w_{,xx})_{,yy}+(D_{12}w_{,yy})_{,xx}\\
&+(D_{22}w_{,yy})_{,yy}+2(D_{16}w_{,xx})_{,yx}+2D_{26}w_{,yy})_{,xy}\\
&+2D_{16}w_{,xy})_{,xx}+2(D_{26}w_{,xy})_{,yy}+(D_{66}w_{,xy})_{,xy}\\
=&q(x,y)\\
&\qquad\qquad (x,y)\in\Omega
\end{aligned}
\tag{1}
$$

及适当的边界条件。式（1）中的下标“，”表示对其后的量求偏导数，Ω是板中面所占的平面区域。$D_{ij}(i,j=1,2,6)$是板的弯曲刚度。对N层对称铺设层合板有：

$$D_{ij}=\sum_{k=1}^{N}\bar{Q}_{ijk}(t_k\bar{Z}_k^2+t_k^3/12)\qquad i,j=1,2,6 \tag{2}$$

其中，下标k指该量属于第k层，t_k是k层厚度，$\bar{Z}_k$是k层形心到板中面距离，由于是对称铺设，N应是偶数。变换后的约化刚度系数$\bar{Q}_{ijk}$依赖于 θ_k（k层材料主轴和坐标系ox轴的夹角）：

$$
\begin{aligned}
\bar{Q}_{11k}&=U_{1k}+U_{2k}\cos2\theta_k+2U_{6k}\sin2\theta_k+U_{3k}\cos4\theta_k+U_{7k}\sin4\theta_k\\
\bar{Q}_{22k}&=U_{1k}-U_{2k}\cos2\theta_k-2U_{6k}\sin2\theta_k+U_{3k}\cos4\theta_k+U_{7k}\sin4\theta_k\\
\bar{Q}_{12k}&=U_{4k}-U_{3k}\cos4\theta_k-U_{7k}\sin4\theta_k\\
\bar{Q}_{66k}&=U_{5k}-U_{3k}\cos4\theta_k-U_{7k}\sin4\theta_k\\
\bar{Q}_{16k}&=U_{6k}\cos2\theta_k-\frac{1}{2}U_{2k}\sin2\theta_k+U_{7k}\cos4\theta_k-U_{3k}\sin4\theta_k\\
\bar{Q}_{26k}&=U_{6k}\cos2\theta_k-\frac{1}{2}U_{2k}\sin2\theta_k-U_{7k}\cos4\theta_k+U_{3k}\sin4\theta_k
\end{aligned}
\tag{3}
$$

其中U_{1k}，U_{2k}……，U_{7k}是第k层材料性质的不变量。最小化结构柔韧性的最优化设计问題可提成：

求θ_k，$k=1,2,\cdots\cdots,N$

$$min \quad c=\iint_{\Omega} q(x,y)w(x,y)dxdy \tag{4}$$

$$s.t. \quad \theta_1=\theta_N,\ \theta_2=\theta_{N-1},\ \cdots\cdots$$

及$w(x,y)$是通过(1)式和$q(x,y)$相联系的。

2. 最大化基频问题

复合材料层和板自由振动时板的振型$w(x,y)$函数及频率ω满足：

$$L(D,w)=\rho\omega^2 w(x,y) \tag{5}$$

$$(x,y)\in\Omega$$

及适当的边界条件。对于固定、简支及自由等齐次边界条件，利用瑞雷商原理频率ω^2可表成：

$$\omega^2=\left\{\iint_{\Omega}\left[D_{11}w_{,xx}^2+2D_{12}w_{,xx}w_{,yy}+D_{22}w_{,yy}^2+4D_{16}w_{,xx}w_{,xy}\right.\right.$$

$$\left.\left.+4D_{26}w_{,yy}w_{,xy}+4D_{66}w_{,xy}^2\right]dxdy\right\}\Big/\iint_{\Omega}\rho w^2dxdy$$

$$=E(D,w)\Big/\iint_{\Omega}\rho w_2dxdy \tag{6}$$

其中$w(x,y)$是振型，ρ是板单位面积质量。最大化基频问题可表成：

求θ_k，$k=1,2,\cdots\cdots,N$

$$max \quad \omega^2 \tag{7}$$

$$s.t. \quad \theta_1=\theta_N,\ \theta_2=\theta_{N-1}\ \cdots\cdots$$

其中ω^2是(5)的解或根据振型由(6)求得。

3. 最大化屈曲临界荷载

设复合材料层合板在其中面内受到沿x方向的膜力λN_x、沿y方向的膜力λN_y及剪力λN_{xy}按比例增长，临界载荷λ_{cr}是下列控制微分方程的特征值：

$$L(D,w)+\lambda_{cr}(N_x w_{,xx}+N_y w_{,yy}+2N_{xy}w_{,xy})=0 \tag{8}$$

及适当的边条件。对于固定、简支及自由齐次边条件。利用瑞雷商原理λ_{cr}可表成：

$$\lambda_{cr}=E(D,w)\Big/\iint_{\Omega}\left[N_x w_{,x}^2+N_y w_{,y}^2+2N_{xy}w_{,x}w_{,y}\right]dxdy \tag{9}$$

最大化屈曲临界载荷问题可提成：

求θ_k，$k=1,2,\cdots\cdots,N$

$$max \quad \lambda_{cr} \tag{10}$$

$$s.t. \quad \theta_1=\theta_N,\ \theta_2=\theta_{N-1},\ \cdots\cdots$$

其中λ_{cr}是由(8)式求得或将失稳波形代入(9)式求得。

三、灵敏度分析

考虑第k层（及$N-k$层）的铺设角得到无限小的变分$\delta\theta_k$，而其它各层的铺设角不变，灵敏度分析的任务是给出由此引起的柔韧性C的变分δC，频率ω的变分$\delta\omega$及临界荷载λ_{cr}的变分$\delta\lambda_{cr}$。我们以柔顺性的变分δC为例说明推导方法。

用δw记静力挠度$w(x,y)$得到的变分，由于外载是给定的，对微分方程（1）两侧进行变分得到：

$$
\begin{aligned}
&(\delta D_{11}w_{,xx})_{,xx}+(\delta D_{12}w_{,yy})_{,xx}+2(\delta D_{16}w_{,xx})_{,yx}+(\delta D_{12}w_{,yy})_{,xx}\\
&+(\delta D_{22}w_{,yy})_{,yy}+2(\delta D_{26}w_{,yy})_{,xy}+2(\delta D_{16}w_{,xy})_{,xx}+2(\delta D_{26}w_{,xy})_{,yy}\\
&+4(\delta D_{66}w_{,xy})_{,xy}=-[(D_{11}\delta w_{,xx})_{,xx}(D_{12}\delta w_{1xx})_{,yy}+2(D_{16}\delta w_{,xx})_{,yy}\\
&+2(D_{12}\delta w_{,yy})_{,xx}+(D_{22}\delta w_{,yy})_{,yy}+2(D_{26}\delta w_{,yy})_{,xy}+2(D_{16}\delta w_{,xy})_{,xx}\\
&+2(D_{26}\delta w_{,xy})_{,yy}+4(D_{66}\delta w_{,xy})_{,xy} \qquad (x,\ y)\in\Omega
\end{aligned}
\tag{11}
$$

其中弯曲刚度的变分δD_{11}，δD_{12}，……是

$$
\delta D_{11}=\frac{\partial D_{11}}{\partial\theta_k}\delta\theta_k\ ,\qquad \delta D_{12}=\frac{\partial D_{11}}{\partial\theta_k}\delta\theta_k,\ \cdots\cdots \tag{12}
$$

在方程（11）两侧乘以$w(x,y)$，并且在Ω上积分，然后适当地利用熟知的格林公式及平衡方程和有关的边界条件，可以由此而求得：

$$
\begin{aligned}
\delta C=\iint_\Omega q(x,y)\delta w(x,\ y)dxdy=-\iint_\Omega\Big[&\frac{\partial D_{11}}{\partial\theta_k}w^2_{,xx}+\frac{\partial D_{22}}{\partial\theta_k}w^2_{,yy}\\
&+2\frac{\partial D_{12}}{\partial\theta_k}w_{,xx}w_{,yy}+4\frac{\partial D_{16}}{\partial\theta_k}w_{,xx}w_{,xy}+4\frac{\partial D_{26}}{\partial\theta_k}w_{,yy}w_{,xy}+\\
&4\frac{\partial D_{66}}{\partial\theta_k}w^2_{,xy}\Big]\delta\theta_k dxdy
\end{aligned}
\tag{13}
$$

这就是由θ_k的变分引起的柔顺性的变分δC。特别当板是均匀的情形，即铺层角度θ_k及其变分$\delta\theta_k$在全板是常数而不依赖于点的位置时，（13）可进一步化成：

$$
\begin{aligned}
\delta C=-\Big[&\frac{\partial D_{11}}{\partial\theta_k}R_1+\frac{\partial D_{22}}{\partial\theta_k}R_2+2\frac{\partial D_{12}}{\partial\theta_k}R_3+4\frac{\partial D_{16}}{\partial\theta_k}R_4\\
&+4\frac{\partial D_{26}}{\partial\theta_k}R_5+4\frac{\partial D_{66}}{\partial\theta_k}R_6\Big]\delta\theta_k
\end{aligned}
\tag{14}
$$

式中，

$$
R_1=\iint_\Omega w^2_{,xx}dxdy,\qquad R_2=\iint_\Omega w^2_{,yy}dxdy
$$

$$
R_3=\iint_\Omega w_{,xx}w_{,yy}dxdy,\quad R_4=\iint_\Omega w_{,xx}w_{,xy}dxdy
$$

$$
R_5=\iint_\Omega w_{,yy}w_{,xy}dxdy,\quad R_6=\iint_\Omega w^2_{,xy}dxdy \tag{15}
$$

而

$$
\frac{\partial D_{ij}}{\partial\theta_k}=2\left(t_k\bar{Z}_k-\frac{t_k^3}{12}\right)\frac{\partial\bar{Q}_{ijk}}{\partial\theta_k} \tag{16}
$$

利用表达式（3）可求出$\frac{\partial \bar{Q}_{ijk}}{\partial \theta_k}$，将它们代入(14)整理后可得：

$$\frac{\partial C}{\partial \theta_k}=-2\left(t_k\bar{Z}_k^2+\frac{t_k^3}{12}\right)\Big\{\cos 4\theta_k[4U_{7k}R_3+4U_{7k}R_5-8U_{7k}R_4-16U_{3k}R_1+16U_{3k}R_2-16U_{7k}R_6]+\sin 4\theta_k[-4U_{3k}R_3-4U_{3k}R_5+8U_{3k}R_4-16U_{7k}R_1+16U_{7k}R_2+16U_{3k}R_6]+\cos 2\theta_k[4U_{6k}R_3-4U_{6k}R_5-4U_{2k}R_1-4U_{2k}R_2+\sin 2\theta_k[-2U_{2k}R_3+2U_{2k}R_5-8U_{6k}R_1-8U_{6k}R_2]\Big\} \tag{17}$$

一旦给出了所有铺设角θ_k，便可从方程（1），（2）等求出D_{ij}、$w(x,y)$与$R_1,R_2,\cdots,R_6$，再利用(15)和(17)式求出当θ_k得到变分$\delta\theta_k$时C的变分δC，计算并不困难。

用类似的方法可导出频率平方ω^2及临界荷载λ_{cr}的变分$\delta\omega^2$及$\delta\lambda_{cr}$，它们具有和(14)，(17)式完全相同的形式，但其中的$w(x,y)$在振动时应理解为归一化的振型，即满足：

$$\iint_\Omega \rho w^2 dxdy=1 \tag{18}$$

在稳定问题中，失稳波形应按下式归一化：

$$\iint_\Omega [N_x w_{,x}^2+N_y w_{,y}^2+2N_{xy}w_{,x}w_{,y}]dxdy=1 \tag{19}$$

需要强调的是虽然δC、$\delta\omega^2$和$\delta\lambda_{cr}$具有相同形式，但其中的w由不同控制微分方程来决定，具体的数值仍将不同。

四、最优化必要条件及討論

仍以最小柔韧性设计为例，最优鋪设角应当使得由$\delta\theta_k$引起的δC变分为零，即

$$\delta C=0 \tag{20}$$

如果θ_k是点位置的函数，$\delta\theta_k$在全板各点可以任意变化，则由变分学基本引理、(20)式及(13)式可知，最优鋪设角$\theta_k(x,y)$，$k=1,2,\cdots,\frac{N}{2}$，应满足：

$$\frac{\partial D_{11}}{\partial \theta_k}w_{,xx}^2+\frac{\partial D_{22}}{\partial \theta_k}w_{,yy}^2+2\frac{\partial D_{12}}{\partial \theta_k}w_{,xx}w_{yy}+4\frac{\partial D_{16}}{\partial \theta_k}w_{,xx}w_{xy}+4\frac{\partial D_{26}}{\partial \theta_k}w_{,yy}w_{,xy}+4\frac{\partial D_{66}}{\partial \theta_k}w_{,xy}^2=0$$

$$(x,y)\in\Omega \tag{21}$$

$$k=1,2,\cdots,\frac{N}{2}$$

(12)式和(1)式一起共$\frac{N}{2}+1$个微分方程组，可由它们解出这$\frac{N}{2}+1$个未知函数w，θ_1，$\theta_2,\cdots,\theta_{N/2}$。

实际结构中复合材料层合板的鋪设角θ_k在全板是一个常数（各层不同）。板是均匀的，比时最优鋪设角θ_k，$k=1, 2, \cdots, \frac{N}{2}$，应满足

$$\frac{\partial C}{\partial \theta_k}=0 \qquad k=1, 2, \cdots, \frac{N}{2} \tag{22}$$

为了较好地理解方程(22)，我们引入变换

$$\chi_k=tan\theta_k \tag{23}$$

并完成必要运算后可得χ_k满足：

$$a_k\chi_k^4+b_k\chi_k^3+c_k\chi_k^2+d_k\chi_k+e_k=0 \tag{24}$$

$$k=1, 2, \cdots, \frac{N}{2}$$

其中系数a_k，b_k，c_k，d_k，e_k为：

$$\begin{aligned}
a_k=&R_4(U_{2k}-4U_{3k})+R_5(U_{2k}+4U_{3k})+R_1(U_{7k}-U_{6k})\\
&-2R_3U_{7k}+R_2(U_{6k}+U_{7k})-4R_6U_{7k}\\
b_k=&-R_4(4U_{6k}-8U_{7k})+R_5(4U_{6k}+8U_{7k})+R_1(2U_{3k}-U_{2k})\\
&-4R_3U_{3k}+R_2(U_{2k}+2U_{3k})-8R_6U_{3k}\\
c_k=&24(R_4U_{3k}-R_5U_{3k}-\frac{R_1}{4}U_{7k}+\frac{R_3}{2}U_{7k}-\frac{R_2}{4}U_{7k}+R_6U_{7k})\\
d_k=&-R_4(U_{6k}+8U_{7k})+R_5(4U_{6k}-8U_{7k})-R_1(U_{2k}+2U_{3k})\\
&+2R_3U_{3k}+R_2(U_{2k}-2U_{3k})+8R_6U_{3k}\\
e_k=&-R_4(U_{2k}+4U_{3k})-R_5(U_{2k}-4U_{3k})+R_1(U_{6k}-U_{7k})\\
&-2R_3U_{7k}+R_2(U_{7k}-U_{6k})-4R_6U_{7k}
\end{aligned} \tag{25}$$

如果复合材料层合板的各层采用相同的材料，U_{2k}等量与k无关，a_k，b_k，c_k，d_k，与e_k亦与k无关，可略去下标k，(24)中的$\frac{N}{2}$个方程式实质上只是一个。如设想已求得最优鋪层层合板的挠度w，便可求得(24)式的系数，而无论N多大，最多只有四个不同的χ_k值满足该方程。

文献[5]最近指出，对称鋪层且每层上有等量的按$+\theta$及$-\theta$鋪设纤维的层合板，在最大频率设计时，各层鋪设角均相等。这个结论大大地简化了寻求最优鋪设角的工作。这里的结果说明在十分一般的条件下（各种板的边界条件、边界形状、外载分布、板的层数、各层可以有不同厚度），各层材料相同的最优鋪层的对称鋪设层合板，不同的鋪设角度不超过四个。

五、柔韧性是鋪設角的非凸函数

在优化设计时了解目标及约束函数的凸性是十分重要的，为比我们对复合材料层合板在均布荷载下的柔韧性作了大量计算。计算的层合板均为各层性质相同的四层组成，每层性质为：

$$E_1/E_2=25, \qquad G_{12}/E_2=0.5, \qquad \nu_{12}=0.25$$

其它计算条件列出在表1中，采用了以离散克希霍夫假定为基础的三角形板单元进行有限无

表1　柔韧性計算的四种情形

情　　形	边　界　条　件	边去比a/b	鋪　层　厚　度
A	*S.S.S.S.*	1	1/1/1/1
B	*S.S.S.S.*	7.2/5.5	1/1/1/1
C	*S.C.S.C.*	7.2/5.0	1/1/1/1
D	*S.C.S.C.*	7.2/5.0	3/1/1/3

注：边界条件是依次对1.2.3.4边給出的（见图1），*S*为簡支，*C*为固定。

计算，其计算网格见图1，板受均布荷载。鋪设角θ_1和θ_2依次取0°，7.5°，15°，22.5°，…进行了计算。利用对称性，对表中列出的每一种情形均进行了312个有限元模型计算。计算求得的不同鋪设角下板的柔韧性结果在图2*a*，2*b*，2*c*和2*d*中，以等高线及柔韧性函数曲面形的式给出。图中左部为等高线，右部为柔韧性曲面。图中*MX*表示极大，*NN*表示极小。

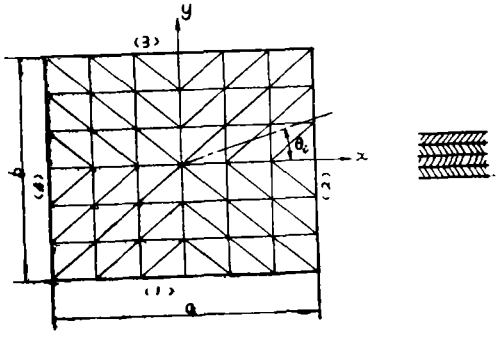
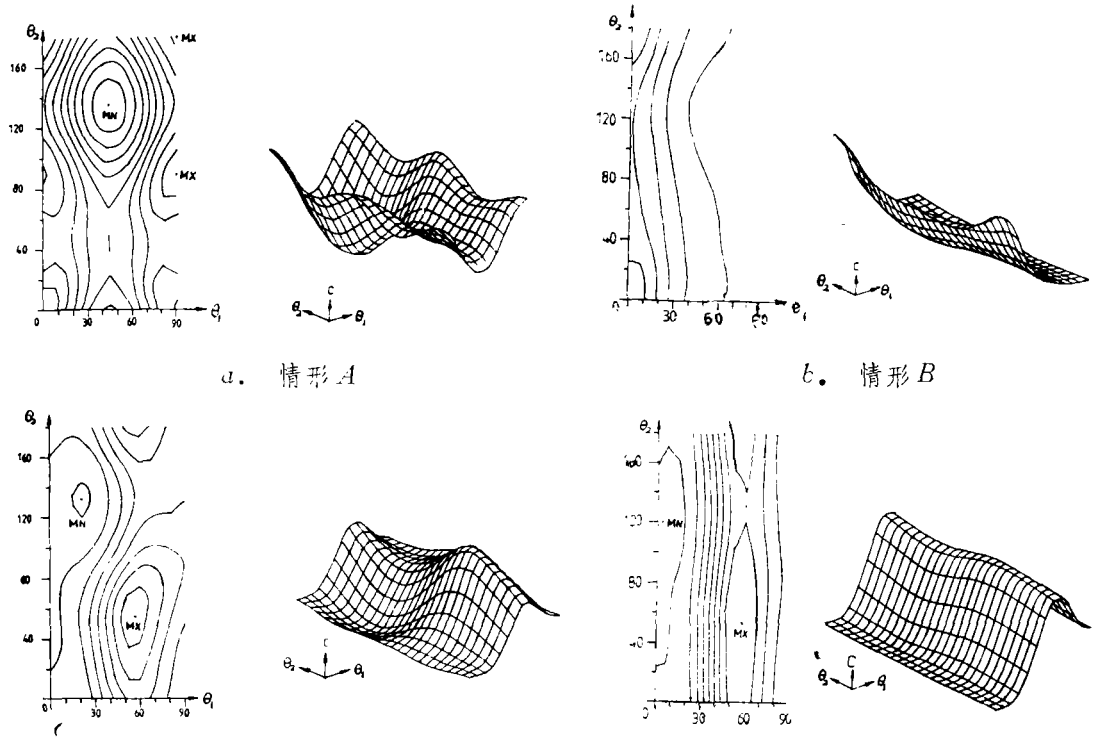


图1　有限元网格及鋪层角示意图



a.　情形*A*　　*b*.　情形*B*

c.　情形*C*　　*d*.　情形*D*

图2　表1所示四种情况下柔韧性与鋪設角关系，

从图 2 的等高线可以清楚地看出柔韧性是铺设角的非凸函数，具有多个极大值和极小值，还可看出，外层的铺设角比内层铺设角对结构的柔韧性影响更大，由于柔韧性的非凸特点，前面导出的最优化必要条件(12)和(22)只是必要的而不充分。在用数学规划法求最优铺设角时，不同的初始点可能迭代到不同的最优解，需要根据经验来选择较优的初始设计。

六、铺层优化的混合法

上面给出的灵敏度公式为采用数学规划中的梯度类算法提供了基础。但已有的结构优化研究表明，简单地搬用数学规划方法仍然可能导致效率不高的算法，根据最优化准则构造迭代格式进行求解的准则法已经证明是十分有效的。考虑到这些经验，本文建议一个由两阶段组成的混合法，第一阶段沿梯度负方向改进设计，但步长取成使线性化的目标函数得到的降低。在用这个方法求得新设计后便可以准确地算出原目标函数的降低。如果该降低值远小于5%的线性估计值，则转入第二阶段。在第二阶段，我们将最优化必要条件(24)和复合材料合层板控制微分方程(1)作为耦合方程组，迭代地求解它们，直到目标函数的降低小于预先规定的要求为止。这样做法克服了最速下降这类方法在迭代接近最优解时解点会摆动的缺点。迭代算法的具有步骤给出在附录中。

利用上面的算法我们对一系列考题进行试算，说明算法是有效的，收敛到最优解一般只要七、八次。但是，初始值如果选择得不当，也有可能收敛到局部最小值，这是由于目标函数是非凸的引起的。下面给出两个典型算例。

例1： 矩形复合材料层合板，$a/b=6.6/5.0$ 六层，厚度为，0.5/0.5/1/1/0.5/0.5，各层性质相同，性质和柔韧性计算一节相同，板受单位均布载荷，板的四边固定。表 2 给出了 θ 和 C 的迭代历史，从第三次迭代开始，采用了优化准则法。在第八次迭代时与方程式(24)的四个根相应的 θ 值为：

$$56.113^\circ,\ -52.915^\circ,\ 74.60^\circ,\ 5.290^\circ$$

表2 例 1 的迭代历史

迭代次数k	θ_1 (℃)	θ_2 (℃)	θ_3 (℃)	C
0	42.97	-42.97	42.97	0.14552
1	47.45	-45.50	43.21	0.14081
2	51.69	-47.91	43.45	0.13823
3	56.29	-50.99	43.83	0.13708
4	56.18	-52.00	49.71	0.13684
5	56.16	-52.59	53.48	0.13677
6	56.26	-52.83	55.28	0.13676
7	56.15	-52.90	55.93	0.13676
8	56.15	-52.91	56.10	0.13676

例2：矩形复合材料层合板，$a=5.0, b=5.0$，其它数根同例1。迭代时，第一步按梯度负方向前进显然运动太大，得到的设计比初始设计还差（见表3），算法即转入最优准则步，在第八次迭代时，与(24)的四个根相应的θ值为：

$$8.86°,\ 45°,\ -45°,\ 81.14°$$

第五次到第八次迭代，在五位有效数字内未改进目标值，事实上柔韧性在最优点邻近变化很缓慢，但本文给出的最优准则法仍可将设计向理论上的最优点移动。

表3　例2的迭代历史

迭代次数k	θ_1（度）	θ_2（度）	θ_3（度）	C
0	42.97	-42.97	42.97	0.11334
1	65.17	-58.54	44.14	0.13133
2	43.37	-43.38	43.37	0.11325
3	43.90	-43.91	43.90	0.11317
4	44.40	-44.41	44.40	0.11312
5	44.74	-44.75	44.74	0.11310
6	44.91	-44.92	44.91	0.11310
7	44.98	-44.98	44.98	0.11310
8	45.00	-45.00	45.00	0.11310

参 考 文 献

[1] 蒋咏秋，“纤維增強复合材料层合板的优化設計”，《計算結构力学其应用》，1984，No.1，PP. 39～46.

[2] Hirano, Y., AIAA.J. 17 (1979), 9, 1017—1019.

[3] Hirano, Y., J. of Composite Materials, 13 (1979), 329—334.

[4] Tauchert, T.R., Adibhatla, S., “Design of Laminated Plates for Maximum Stiffness”, J. Composite Matdrials, Vol.18, Jan., 1984.

[5] 唐俊，“复合材料层合板的鋪层优化分析及拉伸弯曲耦合刚度的影响”，《計算結构力学及其应用》，1985，No.2，PP.75～84.

[6] 錢令希，《工程結构优化設計》，水利电力出版社，1982.

附　　录

算法的具体步骤为：

1. 令迭代次数 $k=0$，假定计算用参数 η，$0<\alpha_1<1$ 及收敛准则 $\varepsilon>0$，令 $flag=FALSE$，并假定一个较好的初始设计 θ_1^0，θ_2^0，…，$\theta_{\frac{N}{2}}^0$。

2. 分析鋪层为θ_1^k，θ_2^k，…，$\theta_{\frac{N}{2}}^k$的对称鋪层复合材料层合板，求得挠度$w^k(x,y)$及柔韧性C^k。

3. 检查收敛准则 $(C^k-C^{k-1})/C^k<\varepsilon$，如满足则停止迭代，取$\theta_1^k$，$\theta_2^k$，…，$\theta_{\frac{N}{2}}^k$为

最优设计，C^k为最小的柔韧性。如不满足则转入4。

4. 按照式(17)计算柔韧性的梯度$\frac{\partial C^k}{\partial \theta_1}$，$\frac{\partial C^k}{\partial \theta_2}$，…

5. 如$flag=FALSE$及$(C^k-C^{k-1})/C^k \geqslant \alpha_1$则令

$$\theta_j^{k\pm1}=\theta_j^k-\frac{\partial C^k}{\partial \theta_j}-\frac{\eta C^k}{\sum_j\left(\frac{\partial C^k}{\partial \theta_j}\right)^2}, \qquad j=1,2,\cdots,\frac{N}{2}$$

及$k=k+1$，返回2。η在计算中取成5%，α_1取成0.8。

6. 如果$flag=TRUE$或者$(C^k-C^{k-1})/C^k<\alpha_1\eta$则利用当前挠度$w^k$计算式中的系数$a$，$b$，$c$，$d$，$e$，求出该方程式的实根$x$（可能是二个或者四个），再由$x$值求出相应的铺设角$\theta=arctanx$。

7. 依次对层合板的每一层（记为j层），在上面求得的(24)式的根中找出一个和该层当前铺设角θ_j^k接近的根，记作$\tilde{\theta}_j$。将改进的层铺设角取成

$$\theta_j^{k+1}=\theta_j^k+\alpha_2(\tilde{\theta}_j-\theta_j^k), \qquad \alpha_2=0.8$$

令$k=k+1$，$flag=TRUE$，返回步骤2。

※※※

ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA

(Quarterly)

Volume 3 Number 1 March 1986

SENSITIVITY ANALYSIS AND OPTIMUM DESIGN OF LAMINATED PLATES

Cheng Gengdong

Research Institute of Engineering Mechanics
Dalian Institute of Technology, Dalian, China

(Received June 1985)

Abstract

By making use of the variational analysis, the present paper derives the analytical expressions of sensitivity of structural responses such as structural compliance under static loading, natural vibration frequency and buckling load of symmetrically laminated plates with respect to the fiber's orientation of the individual layers. Based on the sensitivity information, the optimality criterion for the optimum fiber's orientation is derived and applied to show that under rather general plate configurtiaon, loading and boundary conditions the number of different angles in an optimum symmetrically laminated plate is no more than 4. For four example problems, a large amount of FEM calculations of static compliance under different combinations of fiber's orientations has been done to obtain the contours and surfaces of compliance, which illustrate that the structural compliance is a non-convex function of the fiber's orientations. Therefore, special care must be taken in order to obtain global optimum design of laminated plates by numerical method. Finally a mixed optimization method combining mathmatical programming and optimality criterion appproach is suggested and applied to minimize the structural compliance of composite plates. Two numerical results are given to show the performance of the new algorithm.