第3卷 第2期　　复 合 材 料 学 报　　Vol. 3 No. 2

1986年6月　　ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA　　June 1986

复合材料张量多项式强度准则的实验研究

王 兴 业

（长沙，国防科技大学五系）

摘　要

本文对强度多项式强度准则进行了理論分析，給出了不同F_{12}相互作用系数的层合板强度包絡綫，表明了F_{12}对强度包絡綫的影响，提出了一个确定F_{12}的方法。用两种实验方法对张量多项式理論进行了驗证，結果表明Tsai—Wu多项式准則在拉—剪应力空間与理論值符合得很好，在双向正应力的Ⅰ、Ⅳ象限内实驗值与本文提出的确定F_{12}的方法得到的值相近。

一、引　言

研究复合材料强度理论目前有两种方法，一是在复合材料细观水平上考虑纤维、基体和界面的特性，建立力学模型进行分析计算；一是运用唯象学的研究方法，通过对材料的基本性能测试，建立准则方程，进行强度预测。前者在国外文献尚不多见，是一种研究复合材料强度理论的新的思路[1]，后者由于使用方便，易被设计师们所接受，也是历来研究强度理论的重要手段。

材料的强度是一个较为复杂的问题，它不仅取决于材料本身的固有特性，还和材料所处的外界条件有关。复合材料由于它的多相性和各向异性性，问题显得更为复杂。目前在复合材料的分析和设计中对于刚度特性是可以做到较为准确的估算，但对于强度还不能进行有效的预测，复合材料强度特性的研究，有待于从破坏机理方面进行深入讨论。复合材料强度准则仅仅是对破坏现象的唯象学的描述，是通过测量复合材料的基本强度去预测复合应力状态的强度特性，而并不反映材料的破坏机理。

苏联学者$I.I.Gol'denblat$和$V.A.Kapnov$[2]于六十年代曾提出了作为强度准则必须

本文1985年8月收到，86年2月收到修改稿

满足的几个原则：

a）强度准则不受坐标系变换的影响，当坐标系变换时强度准则仍然成立；

b）强度准则方程在应力空间所决定的曲面（线）必须是有界的；

c）强度准则方程应准确表征强度特性，形式简练，便于应用；

d）强度准则须反映不同材料的各自特性。

目前常用的复合材料强度准则有最大应力准则。最大应变准则，*Tsai—Hill*准则，*Hoffman*准则和*Tsai—Wu*张量多项式准则等。但是，能符合上述原则并适应所有复合材料的强度准则是不存在的，任何一个准则仅能相对地反映出对于某种材料的适用性。有人曾认为纤维增强树脂基复合材料破坏时大多表现为脆性断裂，可以使用最大应力准则，但它仅对单向复合材料在简单载荷下才适用，对于复杂应力状态却有较大偏差。近年来有人建议用最大应力准则优算层合板强度，它的特点在于使用简便，而且还可以根据不同铺层的特征线预测各层的破坏顺序[3]。1913年*Von Mises*提出的各向同性材料在复杂应力状态下进入塑性的屈服条件，在30年后被实验证实[4]。在这个屈服准则的基础上，*R·Hill*引进了各向异性系数，用以处理各向异性材料的强度问题。60年代 *T·W·Tsai* 认为对于纤维增强树脂基复合材料的“破坏”与塑性材料进入“屈服”状态相类似，并以此提出了判定复合材料强度的*Tsai—Hill*准则。但这个准则仅适应于在材料主轴方向上拉伸强度和压缩相等的材料。而*Tsai—Wu*准则考虑了复合材料拉、压强度不等这一实际情况，接近于 *Gol'denblat—Kopnou*原则。本文首先讨论有关*Tsai—Wu*张量多项式强度准则的几个问题，而后给出一些实验研究的结果。

二、張量多項式准則方程

*Tsai—Wu*张量多项式强度准则的数学表达式是：

$$f(\sigma_i)=F_i\sigma_i+F_{ij}\sigma_i\sigma_j+F_{ijk}\sigma_i\sigma_j\sigma_k+\cdots=1 \qquad (1)$$

式中i，j，$k=1$，2，…6，当$f(\sigma_i)\leqslant 1$ 时材料完好，$f(\sigma_i)>1$时材料破坏。对于常见的平面应力状态，通常取到二次项，此时（1）式的展开式为：

$$F_1\sigma_1+F_2\sigma_2+F_6\sigma_6+F_{11}\sigma_1^2+F_{22}\sigma_2^2+2F_{12}\sigma_1\sigma_2$$
$$+2F_{16}\sigma_1\sigma_6+2F_{26}\sigma_1\sigma_6+F_{66}\sigma_6^2=1 \qquad (2)$$

式中σ_1、σ_2、σ_6分别为正应力和剪应力；F_i、F_{ij}称为强度参数，它们分别是二阶张量和四阶张量。对于所研究的复合材料，如果能设法确定出各强度参数，则可以按式（2）判定在特定应力条件下的安全或破损状态。利用标准试件的简单实验，可以容易地确定出（2）式中的五个参数，即

$$F_1=\frac{1}{X_t}-\frac{1}{X_c} \qquad F_{11}=\frac{1}{X_tX_c}$$
$$F_2=\frac{1}{Y_t}-\frac{1}{Y_c} \qquad F_{22}=\frac{1}{Y_tY_c} \qquad (3)$$
$$F_{66}=\frac{1}{S^2}$$

X_t、X_c、Y_t、Y_c、S分别是单向复合材料的基本强度值。对于单向复合材料在正向剪切和负向剪切载荷作用时，其强度特性不变，从而有

$$F_{16}=F_{26}=F_{6}=0 \qquad (4)$$

式（2）中的法向应力乘积项系数F_{12}称为相互作用参数，对于张量多项式准则，它是个很重要且有待于解决的问题。

三、相互作用参数F_{12}分析

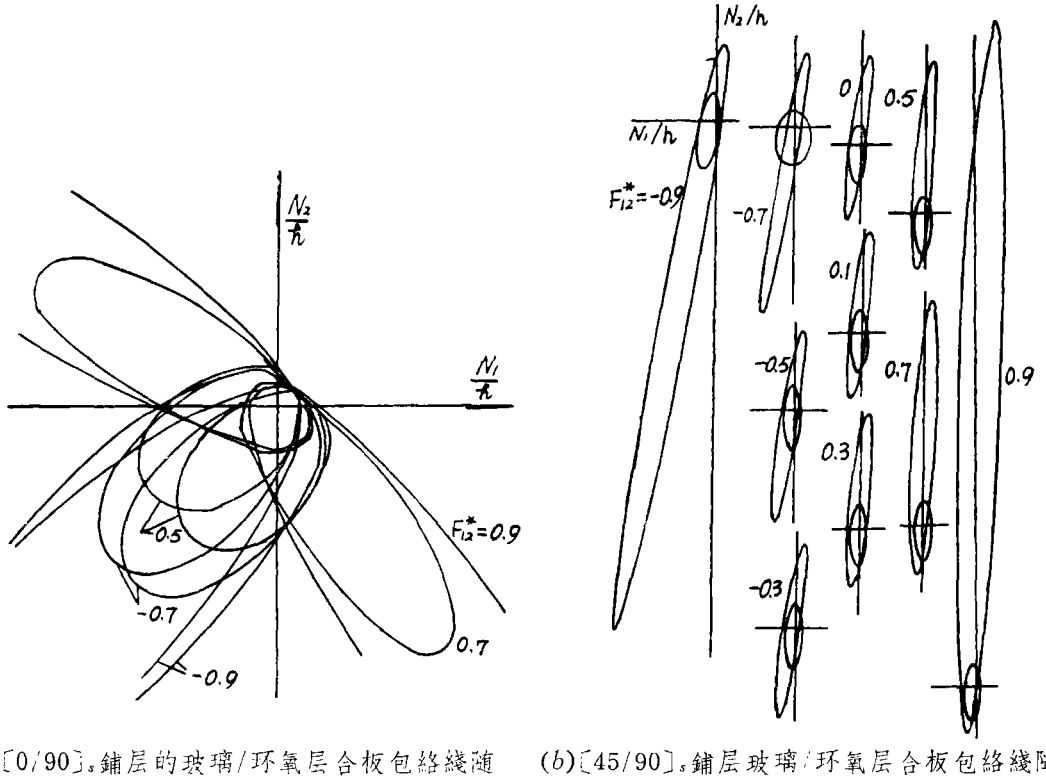
平面应力状态下的张量多项式公式（2）乃是一个二次方程，如果仅取法向应力不为零的双向应力状态（或剪应力是常数），此方程是σ_1、σ_2坐标平面上的二次曲线。根据*Gol'denblat—Kopnov*原则，表征材料强度的二次曲线即强度包络线应是有界曲线，因此公式（2）应满足如下判别式：

$$F_{11}F_{22}-F_{12}^2>0$$

即

$$-\sqrt{F_{11}F_{22}}<F_{12}<\sqrt{F_{11}F_{22}} \qquad (5)$$

此时强度包络线是应力坐标系平面上的椭圆。由圆锥曲线理论可知，σ_1、σ_2乘积项系数之值将确定椭圆的中心位置、椭圆长细比和相对于坐标轴的倾角，也就是说张量多项式中的相互作用参数F_{12}对复合材料的强度包络线的位置、形状有直接影响。图1给出了碳/环氧复合材料按$[0/90]_s$对称铺层和玻璃/环氧酚醛按$[45/90]_s$铺层的层合板强度络线随F_{12}值的变化。从图1a可见层合板强度包络线随F_{12}值不同而发生剧烈变化。在$F_{12}<0$时，层合板双向压缩强度不论是初破坏值还是最终破坏值均大于双向拉伸或拉—压载荷的强度，但当$F_{12}>0$时，则材料的双向压缩强度小于拉—压载荷强度。对于玻璃/环氧酚醛材料（图1b）



(a)$[0/90]_s$铺层的玻璃/环氧层合板包络线随F_{12}不同的变化　　(b)$[45/90]_s$铺层玻璃/环氧层合板包络线随F_{12}不同的变化

图　1

也有类似的情形。从逻辑上说三向受压缩材料其强度可趋于无穷大。对二向受压情形，如果不是屈曲失效其双向压缩强度将大于双向拉伸强度。因此说张量多项式准则方程中的相互作用参数应取负值。

准确的确定某种材料的F_{12}值是困难的。根据（2）式利用不同的双向等值应力组合可以得到F_{12}和各组合应力下破坏值的关系[2]，但实际上实施双轴组合应力实验并得到准确的结果较为困难。实验结果对于同一材料得到的F_{12}值不仅离散度较大，而且还发现它有时并不满足判别式（5）限定的条件，因此还不能用双轴等值加载实验确定张量多项式的F_{12}值。

Tsai[5]将张量多项式方程退化到各向同性的屈服准则形式，与*Von.Misces*准则比较，得到$F_{12}=\frac{-1}{2}\sqrt{F_{11}F_{22}}$，也有人提出令$F_{12}=0$，从形式上取消了法向应力的相互作用[6]，这两种对F_{12}的处理方法都不令人满意，*Hoffman*[7]准则则简单的把$F_{12}=-\frac{1}{2}\sqrt{F_{11}}$等等。如何确定$F_{12}$是研究强度准则的一个重要问题。

四、确定F_{12}的一个方法

因F_{12}仅是双向正应力的相互作用参数，与σ_6无关。为简化分析，令$\sigma_6=0$，此时张量多项式方程为：

$$F_{11}\sigma_1^2+2F_{12}\sigma_1\sigma_2+F_{22}\sigma_2^2+F_1\sigma_1+F_2\sigma_2=1 \tag{6}$$

若（6）式满足（5）式的限制条件，此时强度包络椭圆的长轴相对σ_1轴的倾角

$$\theta=\frac{1}{2}\,arc\,ctg\,\frac{F_{11}-F_{22}}{2F_{12}} \tag{7}$$

椭圆中心沿σ_1轴的移距：

$$\eta=\frac{-F_{12}F_2+F_{22}F_1}{2(F_{12}^2-F_{11}F_{22})} \tag{8}$$

椭圆中心沿σ_2轴的移距：

$$\chi=\frac{F_{12}F_2+F_{22}F_1}{2(F_{11}F_{22}-F_{12}^2)} \tag{9}$$

按（7）、（8）、（9）式对常用的几种纤维增强复合材料计算的包络线椭圆的长轴倾角、椭圆中心在纵横两个方向的移距列于表1。由表可见所列几种材料的包络圆倾角均未大于5°，并且椭圆沿纵向（σ_2轴）的移距远小于其横轴（σ_1轴）的移距，包络椭圆好象仅沿横轴偏移（图2），由此可发现有下列几何关系：

表1

材料	0°	$\eta(MPa)$	$\chi(MPa)$
碳/环氧	3.78	-6.89	-0.51
硼/环氧	3.58	-7.62	-0.49
石墨/环氧	4.08	-5.12	-0.4
Kevlar/环氧	2.52	-1.238	0
玻璃/环氧	4.92	-5.57	-0.14
玻璃/环氧*	4.16	-3.28	-0.31

* 按实驗值計算，其余按資料值計算

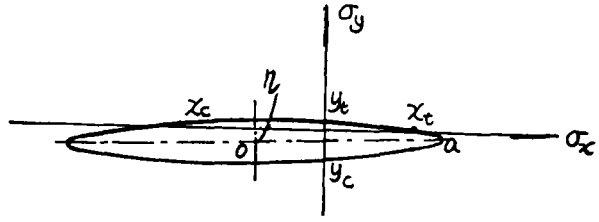


图2　单向复合材料的強度包絡綫椭圆中心移矩χ、η和倾角θ

$$KX_t = a\cos\theta + \eta \tag{10}$$

式中a是椭圆的长半轴，由式（11）给出：

$$a = \sqrt{\frac{4F_{11}F_{12} - 2F_{12}F_1F_2 + F_{22}F_1^2 + F_{11}F_2^2 - 4F_{12}^2}{2(F_{11}F_{22} - F_{12}^2)[F_{11}F_{22} - (F_{11} - F_{22})^2 + 4F_{12}^2]}} \tag{11}$$

由于θ值较小，$\cos\theta$近似等于1，K为修正系数，当取$K=1$时，式（10）的近似式为：

$$X_t = a + \eta \tag{12}$$

式（10）式（12）就是按材料最大纵向拉伸强度确定F_{12}值的基本关系式。按（8）式和(11)式计算出a和η与F_{12}的关系并给出相应关系曲线，由已知的X_t值与之相比较，便可找到满足于（12）式的相应的F_{12}值。图3给出了玻璃/环氧—酚醛复合材料按（12）式所确定的F_{12}值。图4是按本文确定的值和取$F_{12} = -\frac{1}{2}\sqrt{F_{11}F_{22}}$时所做的包络椭圆的比较。

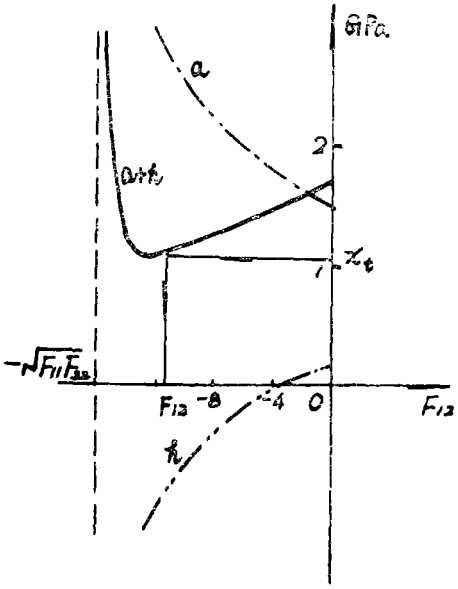


图3　对应于X_t的F_{12}值的确定

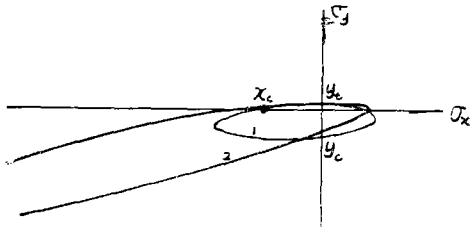


图4　按不同方法确定的F_{12}的强度包络线

1. 按$F_{12} = -\frac{1}{2}\sqrt{F_{11}F_{22}}$的确定的包络椭圆
2. 按本文方法确定的包络椭圆

五、实验研究

在同一试件上同时得到双向正应力和剪应力的平面应力状态还存在一定困难，同时由于相互作用系数仅与两个垂直方向的正应力有关。为此我们的试验由以下两个实验方法进行。一是用管状试件在轴—内压载荷下实现双轴正应力状态，一是在拉伸机上附加一个加载夹具在平板状试件上得到平面拉剪应力状态，图5和图6分别示出了轴内压试验装置和拉剪试验装置的原理。

1. 试件可靠性分析

管状试件由纤维缠绕制成。为了检验在此试件上是否存在均匀应力区，用有限元分析法计算了应力应变沿管状试件的轴线分布，并用轴向拉伸和在内压载荷作用下，对管状件和应

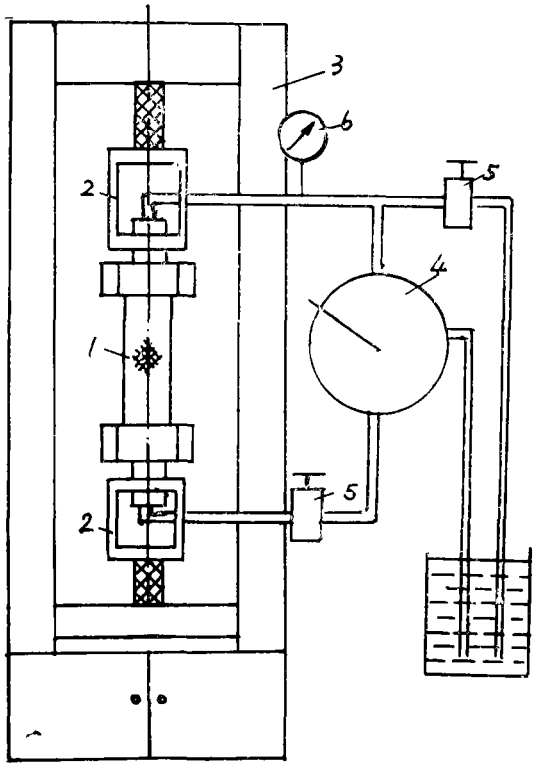


图5　軸內压試驗裝置原理图
1. 試件　2. 加載框　3. 試驗机
4. 泵　5. 閥門　6. 压力表

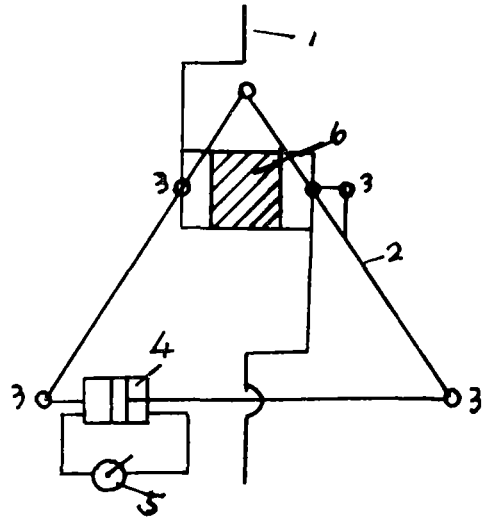


图6　施加拉剪載荷的夹具
1. 剪力臂　2. 拉力臂　3. 鉸鏈
4. 作动筒　5. 泵　6. 試件

变值进行了实验测量。分析和实验表明，在双轴载荷下，所用的管状试件存在足够的均匀应力区，端部夹头的影响可以不计[8]。图7给出了这一试件的结构与沿该试件轴向上的应力和应变的分布。

平板状试件如图8a，附图对平板试件除进行计算分析并用光弹试验考察了试件上的均匀应力区，图8a，b是应力在试件上分布的计算结果，图8c，d是光弹试验得到和应力分布，数值计算和光弹实验结果趋势基本一致，表明在平板状试件上存在着均匀应力区[8]。

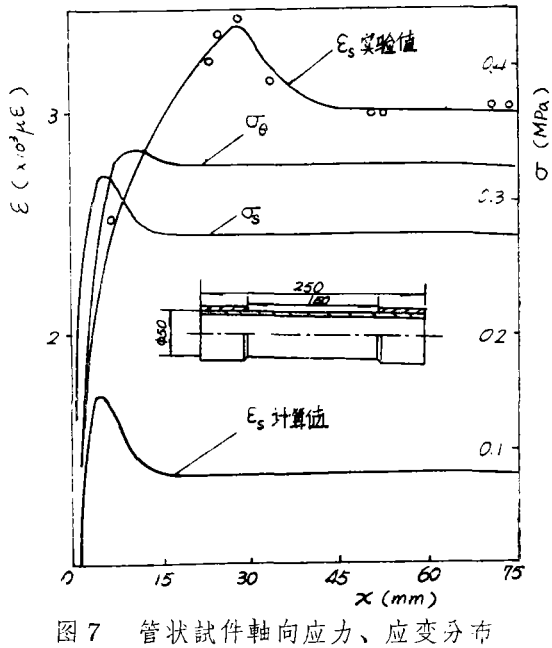
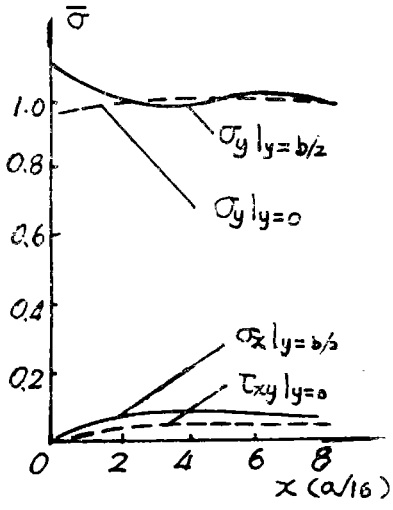


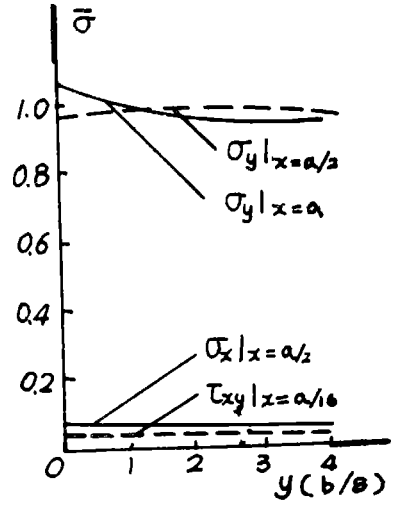
图7　管状試件軸向应力、应变分布

2. 平板试件拉剪试验结果

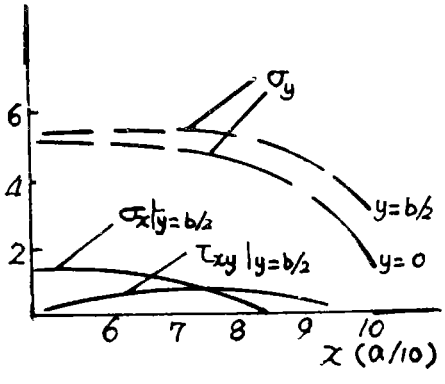
用两种材料制成的平板试件进行拉剪试验。一是碳纤维/环氧酚醛，一是玻璃纤维/环氧酚醛。实验时对试件分级加载，先施以单向拉伸破坏载荷的1/4、1/2和3/4，然后



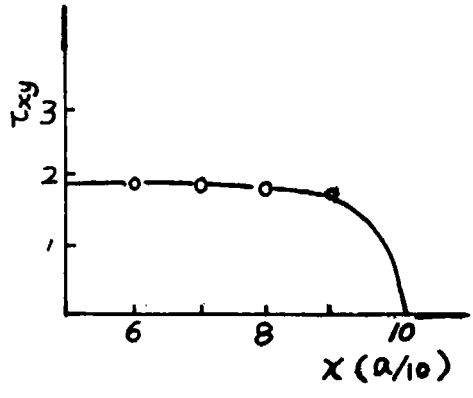
a) 垂直于加载方向的应力分布計算值



b) 沿加载方向应力分布計算值



c) 拉伸載荷下应力分布光弹試驗結果



d) 剪切載荷下应力分布光弹試驗結果

图 8 应力分布計算值与实驗值比較

施加剪切载荷到试件破坏，随着剪切载荷的增加，试件出现三个破坏阶段：

a）在纤维方向上出现一条或几条裂纹；

b）裂纹沿整个试件均匀分布；

c）纤维在加强片部位破坏。

在试件出现第一阶段破坏后，还可继续加载，玻璃/环氧试件在出现第二阶段破坏后仍可承受一定的载荷，但碳/环氧试件在表面裂纹均布到整个试件以后便不能承受载荷了。两种材料的试验结果列于表 2 。通过拉剪双向试验，我们认为对于复合材料在实际工程结构中是不能加到第三级破坏状态，载荷仅能施加到使试件保持在一级或二级破坏的范围。按一级破坏荷载作出的强度包络线如图9所示，图中虚线是按$Tsai—Wu$张量多

表 2

材料	拉伸应力水平 (MPa)	剪应力(MPa)		
		Ⅰ級	Ⅱ級	Ⅲ級
碳/环氧酚醛	293	42.7	46.2	
	225.7	38.9		
	187.7	35.7	41.8	
玻璃/环氧酚醛	618	42.7	52.8	84.0
	520	61.3	65.9	85.5
	232.5	59.4	62.9	85.2

项式准则方程预测的包络线，可见在拉剪空间，实验值和理论曲线吻合好得很。

3. 管状试件的轴内压试验

进行轴向—内压试验的玻璃/环氧酚醛管状试件的材料基本性能如下：

$X_t=1324MPa$　　$X_c=745MPa$

$Y_t=25MPa$　　$Y_c=167MPa$

$S=71MPa$

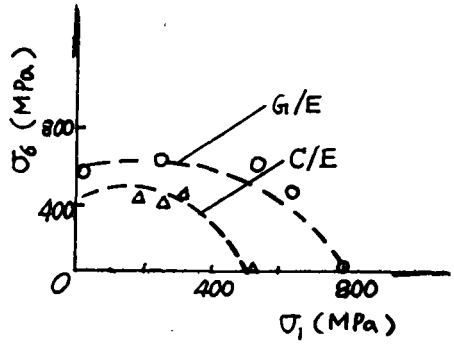


图9　拉剪載荷下的理論包絡綫和实驗結果

如果对管状试件仅施加内压载荷，则在管壁上只能得到两个主方向的应力比为1：2。为了使管壁上两向应力比布满多项式准则包围的应力平面，须在轴向加拉伸或压缩载荷，以调解管壁上的应力比。将试件固定在可施加压缩载荷的反向器上，由于实验设备还不能实现按要求的比例加载，我们选择了轴载和内压载荷分步加载的方式，对于树脂基复合材料，由于直到材料破坏都表现为线弹性，所以这种加载方式并不影响材料的破坏状态。管状试件轴向内压试验结果列于表3，由图10给出了实验结果和几种强度准则预测包络线的比较。

表 3

序号	象限	$\sigma_1(MPa)$	$\sigma_2(MPa)$
1	I	0	25
2		16	23
3		32	26
4		46	27
5		73	30
6		147	26
7		706	31
8		710	32
1	IV	66	-127
2		71	-127
3		108	-118
4		118	-118
5		259	-116
6		306	-87
7		332	-55
8		425	-112
9		474	-54
10		646	-137

注：第Ⅰ象限的实驗值是每組三个試件的平均值
第Ⅳ象限为单个試件的結果

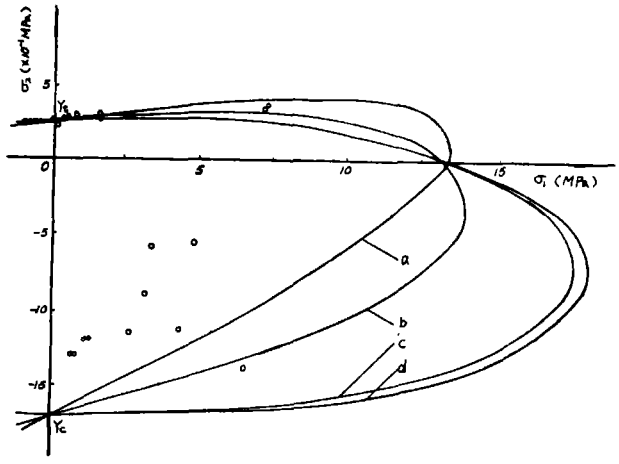


图10　軸—內压双向載荷实驗值与理論值

- 双軸加載实驗值

a　按本文方法确定的F_{12}值的強度包絡綫

b　按$Tsai—Wu$的 $F_{12}=\frac{-1}{2}\sqrt{F_{11}F_{22}}$ 的強度包絡綫

c　$Hoffman$准則強度包絡綫

d　取$F_{12}=0$的強度包絡綫

六、結　　論

张量多项式准則的相互作用参数F_{12}，是一个不能忽视的参数，以层合板为例进行的理论计算结果（图1）充分说明了这个事实。然而对于单向复合材料在拉—拉象限內，选取F_{12}不同值（$F_{12}\leqslant0$）所造成的包络线的差别是很小的（图10）以致在工程应用中可以略去，因而有人令$F_{12}=0$在形式上取消了这个参数的影响。也有人用拉—拉象限的双向加载实验验证其确定F_{12}方法的准确性。事实上F_{12}对包络线的影响在Ⅲ、Ⅳ象限內较大，图4和图10分别画出了不同的F_{12}值对包络线的影响。所以，仅用双向拉伸实验来鉴别所取F_{12}值是否正确是有一定的局限性的。

我们的实验做出了拉—拉象限的结果，也给出了拉—压象限的实验值。在拉—拉象限不仅各种准則的理论值相差不大，而且与实验结果的拟合程度也是令人滿意的。但在第Ⅳ象限內，实验值与理论值还有一定偏差，尽管如此，可以看到用本文给出的按纵向拉伸强度确定F_{12}的包络线，与实验值的差值比其他方法的差值小。从实验结果的趋势分析如果能使F_{12}值的绝对值再大一些，可望有更高的拟合程度。这一点是可以做到的，因为我们在使用公式（10）时略去了K值的影响，如果取一个大于1的K值，所得到的$|F_{12}|$值将会更大些。

除了用玻璃/环氧酚醛试件进行实验，我们还用玻璃/环氧648，$Kevlar$—49/环氧试件进行了试验，其结果是实验值与理论值的偏差均大于前一种材料，但实验结果的趋势是呈一定规律变化的[10]，这里我们不能过分的怀疑实验结果的误差，而说明对于复合材料来讲不论什么情况千篇一律地使用一个准則模式去预测强度是不合适的。这就促使我们对材料强度准則的研究再回到初期的那些形式繁多的各种强度准則的情况中去。但这不是倒退，而是认

识的进一步深化。*M.J.Owen*在1978年曾提出使用张量多项式准则需要按不同材料适当的调整F_{12}的意见[9]，这个观点在我们的实验研究中得到了证实。

拉剪实验是从另一个角度对张量多项式的验证，对于试件出现的三级破坏，玻璃/环氧可取到Ⅰ级或Ⅱ级，而碳/环氧只能取Ⅰ级破坏。这些材料的实验值和拉一剪空间的张量多项式准则理论值吻合得很好，也说明按上述原则取材料强度值是合理的。由于拉剪空间两种应力之间没有相互影响问题，所得结果比较满意，这也从另一方面说明了相互作用项对材料强度特性的影响是不能忽视的。

致谢：参加本项研究工作的还有课题组的王有信和谢仁华同志，研究生姜孔仁、袁龙江等在撰写本文时给予大力协助，谨此致谢。

参 考 文 献

[1] 张汝光，“纤維增強复合材料破坏准則探討”，第六届玻璃鋼/复合材料年会資料，1985.10.

[2] S.W.Tsai and E.M.Mu, "A General Theory of Strength for Anisotropic Materials", J.Composite Materials, Vol.5, 1971, p.58.

[3] T.R.Guess, "Biaxial Testing of Composite Cylinders: Experimental—Theoretical Comparison", Composites, Vol.11, 1980.

[4] P.C.皮薩林科，A.A.列捷，《复合应力状态下的材料变形与強度》(中譯本)，科学出版社，1983.

[5] S.W.Tsai and H.T.Hahn, Introduction to Composite Materials, Technomic Publishing Company, 1980.

[6] R.Narayanaswami and H.M.Adelman, "Evaluation of the Tensor Polynomial and Hoffman Strength Theories for Composite Materials", J.Composite Materials Vol.11, 1977, p.366.

[7] O.Hoffman, "The Brittele Strength of Orthotropic Meterials", J.Composite Materials, Vol.1, 1967, p.200.

[8] 王兴业，“研究复合材料双軸強度特性的两个实驗方法”，国防科技大学資料(85—5023)，1985.7.

[9] M.J.Owen, "Evaluation of Biaxial Stress Failure Surfaces for a Glass Fabric Reinforced Polyester Resin Under Static and Fatigue Loading" J.Materials Science, Vol.13, 1978.

[10] 王兴业，“在双向拉伸載荷下的复合材料強度問題”，航天部結构与強度交流会論文集，1984年8月。

fo: the investigation and their moduli are significantly different from one another. The Pipes–Pagano problem which consists of a symmetric composite laminate under uniform axial strain is studied with quasi–three–dimensional finite element procedure. In order to discuss the stress responses of the composite laminates made of different matrixes under the same loading, a simple formula is developed to keep the laminates to be subjected to the same axial loading at the ends.

The results for an angle–ply $(\pm 45)_s$ and a symmetric cross–ply $(0/90)_s$ laminates are presented. Emphasis is placed on assessing the srress behavior in the regions close to ply–interface and exposed free edge. The solutions indicate that the change of matrix properties may have significant effect on the singular behavior and distributions of interlaminar stresses in the laminates. In the design of laminated composite structures, therefore, if the stacking sequence can not be changed, it is possiple to choose a proper kind of matrix to suppress delamination of composite laminates.

AN EXPERIMENTAL STUDY ON THE TENSOR MULTINOMIAL CRITERION OF COMPOSITE

Wang Xingye

The Fifth Department, National University of Defence Technology

Changsha, Hunan, China

(Received October 1985)

ABSTRACT

A criterion of tensor multinomial of strength is theoretically analysed and the strength envelopes of laminates with different F_{12} are given. The effect of F_{12} on the envelopes is shown and a method to determine interaction coefficient F_{12} is proposed. The criterion is verified with two experiments. The results show that Tsai–Wu criterion of tensor multinomial is in excellent agreement with theoretical values in the tension–shear space. And the values from the experiments are in agreement with the theoretical values from the determination of this paper in quadrant 1 and 4.