第3卷 第3期 复合材料学报 Vol.3 No.3
1986年9月 ACTA MATERIAE COMPOSITAF SINICA September 1986

两种材料界面裂纹的应力强度因子

顾志芬

(北京航空学院飞行器設計与应用力学系)

摘 要

选用复变函数的幂級数作为应力函数，分析在两种材料界面上存在裂紋的情况。利用裂紋自由表面力的边界条件及材料界面上的連續条件求得特征值及待定系数之間的关系式，从而求得应力、位移及应力強度因子表达式。本文修改了 Lin[1] 和 Mar[2] 的应力函数表达式，使所得应力、位移表达式与 $Williams$[6] 及 Sih—$Rice$[3,4] 結果一致。基于上述解析解建立了裂紋尖端的奇異元。并以含有界面中心裂紋平板拉伸情况作为計算实例。

前 言

研究两种材料结合面上存有裂纹的条件下材料中的应力分布、位移分布、应力强度因子值等问题,是研究复合材料破坏特性的基础之一.$Rice-Sih$[3,4]和$Erdogan$[5]等人推导了两块半无限大板在结合面上存在裂纹时应力强度因子的表达式；Lin等人分别用带有奇应力项的杂交元解有限尺寸板的问题。在 Lin[1,2] 的文章中，应力函数的选取上存在一些错误，本文作了修改,所得解包含了 $Willams$ 解[6] 与 $Rice$—Sih[3,4]、$Erdogan$[5]解，具有更为普遍的意义，但推导方法较为简单。并采用带有奇异元的有限元方法，得到了计算有限宽板应力强度因子的较为简便且具有一定精确度的方法。

应力函数的选取及解析解

求解弹性力学平面问题时，若选用复变函数的应力函数

$$U(r,\theta)=Re[\bar{z}\phi(z)+\int^{z}\psi(z)dz]$$

则其应力、位移可表示为

本文1985年6月收到

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_x+\sigma_y=4Re[\phi'(z)]\\&\sigma_y-\sigma_x+i2\tau_{xy}=2[\bar{z}\phi''(z)+\psi'(z)]\\&u+iv=\frac{1}{2\mu}[\eta\phi(z)-z\overline{\phi'(z)}-\overline{\psi(z)}]\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

式中μ为材料的剪切弹性模数，

$$\eta=\begin{cases}\dfrac{3-\nu}{1+\nu} & (\text{平面应力})\\ 3-4\nu & (\text{平面应变})\end{cases}$$

在两种材料界面上的裂纹情况（图1），材料1、材料2应力函数分别用$\phi_1(z)$、$\psi_1(z)$及$\phi_2(z)$，$\psi_2(z)$表示。用这些函数表示的应力及位移必需满足边界条件及材料界面上的连续条件。其边界条件是在裂纹表面上应力为零，即

$$\sigma_{y_1}+i\tau_{xy_1}=\phi_1'(z)+\overline{\phi_1'(z)}+\bar{z}\phi_1''(z)+\psi_1'(z)=0\qquad(\theta=\pi)\qquad(2)$$

$$\sigma_{y_2}+i\tau_{xy_2}=\phi_2'(z)+\overline{\phi_2'(z)}+\bar{z}\phi_2''(z)+\psi_2'(z)=0\qquad(\theta=-\pi)\qquad(3)$$

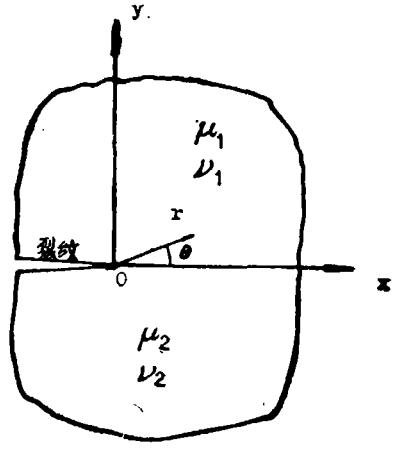

图1　两种介质交界面上的裂纹

在结合面上应力及位移保持连续，即

$$\phi_1'(z)+\overline{\phi_1'(z)}+\bar{z}\phi_1''(z)+\psi_1'(z)=\phi_2'(z)+\overline{\phi_2'(z)}+\bar{z}\phi_2''(z)+\psi_2'(z)\qquad(\theta=0)\qquad(4)$$

$$\frac{1}{2\mu_1}[\eta_1\phi_1(z)-z\overline{\phi_1'(z)}-\overline{\psi_1(z)}]=\frac{1}{2\mu_2}[\eta_2\phi_2(z)-z\overline{\phi_2'(z)}-\overline{\psi_2(z)}]\qquad(\theta=0)\qquad(5)$$

式中下标1及2分别表示对于材料1及2的物理量。

作为裂纹尖端奇异場的漸近解选取应力函数如下

$$\begin{aligned}&\phi_1(z)=a_1z^\lambda\\&\psi_1(z)=c_1z^\lambda+d_1z^{\bar{\lambda}}{**}\\&\phi_2(z)=a_2z^\lambda\\&\psi_2(z)=c_2z^\lambda+d_2z^{\bar{\lambda}}\end{aligned}\qquad(6)$$

式中a_1，a_2，c_1，c_2，d_1，d_2及λ为复常数，而λ可表示为$\lambda=\lambda_1+i\lambda_2$。将式（6）代入式（2）～（5），经简化整理得：

$$\lambda z^{\lambda-1}(a_1\lambda+c_1)+\bar{\lambda}z^{\bar{\lambda}-1}(\overline{a_1}+d_1e^{2\lambda_2\pi}e^{2i\lambda_1\pi})=0\qquad(7)$$

$$\lambda z^{\lambda-1}(a_2\lambda+c_2)-\bar{\lambda}z^{\bar{\lambda}-1}(\overline{a_2}+d_2e^{-2\lambda_2\pi}e^{-2i\lambda_1\pi})=0\qquad(8)$$

**：与Lin的文章[1][2]相比，这里在$\psi_1(z)$及$\psi_2(z)$的表达式中加入了$d_1z^{\bar{\lambda}}$及$d_2z^{\bar{\lambda}}$两项。

$$\lambda z^{\lambda-1}(a_1\lambda+c_1-a_2\lambda-c_2)+\bar{\lambda}z^{\bar{\lambda}-1}(\overline{a_1}+d_1-\overline{a_2}-d_2)=0 \tag{9}$$

$$z^{\lambda}\left[\eta_1 a_1-\overline{d_1}-\frac{\mu_1}{\mu_2}(\eta_2 a_2-\overline{d_2})\right]$$

$$+z^{\bar{\lambda}}\left[-\overline{a_1}\bar{\lambda}-\overline{c_1}+\frac{\mu_1}{\mu_2}(\overline{a_2}\bar{\lambda}-\overline{c_2})\right]=0 \tag{10}$$

由式（7）～（10）得8个齐次方程组，但其中有两个方程为线性相关方程，因而得6个独立方程求解6个待定系数（a_1，a_2，c_1，c_2，d_1，d_2）的关系式，并由齐次方程的系数行列式等于零求得特征值 λ。解式（7）～（10）得

$$\begin{aligned}
a_2&=-a_1e^{-2\lambda_2\pi}e^{2i\lambda_1\pi}\\
c_1&=-a_1\lambda\\
c_2&=-a_2\lambda\\
d_1&=-\overline{a_1}e^{-2\lambda_2\pi}e^{-2i\lambda_1\pi}\\
d_2&=-\overline{a_2}e^{2\lambda_2\pi}e^{2i\lambda_1\pi}
\end{aligned} \tag{11}$$

及

$$\alpha(e^{-2\lambda_2\pi}e^{2i\lambda_1\pi}-1)-\beta(e^{2\lambda_2\pi}e^{-2i\lambda_1\pi}-1)=0 \tag{12}$$

式中

$$\begin{aligned}
\alpha&=1+\eta_2\frac{\mu_1}{\mu_2}\\
\beta&=\eta_1+\frac{\mu_1}{\mu_2}
\end{aligned} \tag{13}$$

式（12）可写成

$$\cos 2\lambda_1\pi[\alpha e^{-2\lambda_2\pi}-\beta e^{2\lambda_2\pi}]+i(\sin 2\lambda_1\pi)\cdot(\alpha e^{-2\lambda_2\pi}+\beta e^{2\lambda_2\pi})=\alpha-\beta \tag{14}$$

由 $\sin 2\lambda_1\pi=0$ 得 $\lambda_1=\frac{1}{2}$，1，$\frac{3}{2}$，2，…把 λ_1 分成两部分，得两组解

解1：

$$\begin{aligned}
\lambda_1&=\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ \cdots\\
\lambda_2&=\frac{1}{2\pi}\log\frac{\frac{1}{\mu_1}+\frac{\eta_2}{\mu_2}}{\frac{\eta_1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}}
\end{aligned} \tag{15}$$

解2：

$$\begin{aligned}
\lambda_1&=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\\
\lambda_2&=0
\end{aligned} \tag{16}$$

对于解1其应力及位移表达式为：

材料1：

$$\begin{aligned}
\sigma_{x1}=\sum_{n=1}^{\infty}Re\{&[(1+e^{-2i\theta})+\lambda_n(1-e^{-2i\theta})]\lambda_n z^{\lambda_n-1}a_n\\
&+[1+e^{-2\lambda_2(\pi-\theta)}e^{-2i(\lambda_1-1)(\pi-\theta)}]\overline{\lambda_n}\,\overline{z^{\lambda_n-1}a_n}\}\\
\sigma_{y_1}=\sum_{n=1}^{\infty}Re\{&[(1-e^{-2i\theta})-\lambda_n(1-e^{-2i\theta})]\lambda_n z^{\lambda_n-1}a_n\\
&+[1-e^{-2\lambda_2(\pi-\theta)}e^{-2i(\lambda_1-1)(\pi-\theta)}]\overline{\lambda_n}\,\overline{z^{\lambda_n-1}a_n}\}
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\tau_{xy_1}=\sum_{n=1}^{\infty} Im\{[-e^{-2i\theta}-\lambda_n(1-e^{-2i\theta})]\lambda_n z^{\lambda_n-1}a_n$$

$$-e^{-2\lambda_2(\pi-\theta)}e^{-2i(\lambda_1-1)(\pi-\theta)}\cdot\overline{\lambda_n}\,\overline{z^{\lambda_n-1}}\,\overline{a_n}\}$$

$$u_1+iv_1=\frac{1}{2\mu_1}\sum_{n=1}^{\infty}\{[\eta_1+e^{-2\lambda_2(\pi-\theta)}e^{2i\lambda_1(\pi-\theta)}]z^{\lambda_n}a_n$$

$$+[1-e^{2i\theta}]\overline{\lambda_n}\,\overline{z^{\lambda_n}}\,\overline{a_n}\}$$

式中 $\lambda_n=\lambda_{1n}+i\lambda_2$， $\lambda_{1n}=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \cdots$

材料 2：

$$\sigma_{x_2}=\frac{1}{T_1}\sigma_{x_1} \qquad u_2=\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{1}{T_1}u_1$$

$$\sigma_{y_2}=\frac{1}{T_1}\sigma_{y_1} \qquad v_2=\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{1}{T_1}v_1 \tag{18}$$

$$\tau_{xy_2}=\frac{1}{T_1}\tau_{xy_1}$$

式中 $$T_1=\frac{\mu_1\eta_2+\mu_2}{\mu_1+\mu_2\eta_1}$$

对于解 2，其应力及位移表达式为

材料 1：

$$\sigma'_{x_1}=\sum_{n=1}^{\infty}Re\{[(1+e^{-2i\theta})+\lambda_n(1-e^{-2i\theta})]b_n\lambda_n z^{\lambda_n-1}$$

$$+[1+e^{2i(\lambda_n-1)\theta}]\overline{b_n}\,\overline{\lambda_n}\,\overline{z^{\lambda_n-1}}\}$$

$$\sigma'_{y_1}=\sum_{n=1}^{\infty}Re\{[(1-e^{-2i\theta})-\lambda_n(1-e^{-2i\theta})]b_n\lambda_n z^{\lambda_n-1} \tag{19}$$

$$+[1-e^{2i(\lambda_n-1)\theta}]\overline{b_n}\,\overline{\lambda_n}\,\overline{z^{\lambda_n-1}}\}$$

$$\tau'_{xy_1}=\sum_{n=1}^{\infty}Im\{[-e^{-2i\theta}-\lambda_n(1-e^{-2i\theta})]b_n\lambda_n z^{\lambda_n-1}$$

$$-e^{2i(\lambda_n-1)\theta}\overline{b_n}\,\overline{\lambda_n}\,\overline{z_n^{\lambda_n-1}}\}$$

$$u'+iv'=\frac{1}{2\mu_1}\sum_{n=1}^{\infty}\{[\eta_1+e^{-2i\lambda_n\theta}]b_n z^{\lambda_n}+[1-e^{2i\theta}]\,\overline{b_n}\,\overline{\lambda_n}\,\overline{z^{\lambda_n}}\}$$

式中 $\lambda_n=1, 2, 3, \cdots$

材料 2：

$$\sigma'_{x2}=\frac{1}{T'}\sigma'_{x1} \qquad u'_2=\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{1}{T'}u'_1$$

$$\sigma'_{y2}=\frac{1}{T'}\sigma'_{y1} \qquad v'_2=\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{1}{T'}v'_1 \tag{20}$$

$$\tau'_{xy_2}=\frac{1}{T'}\tau'_{xy_1}$$

式中 $$T'=\frac{\mu_1(1+\eta_2)}{\mu_2(1+\eta_1)}$$

问题的完全解为解 1 与解 2 之和。

当材料 1 及 2 性能相同时，由式（15）得$\lambda_2=0$,此时由式(17)，(19) 所得应力、位移場之和与$Williams$公式一致。当材料 1 与 2 性能不同时，由式(17)所得应力及位移公式与$Rice—Sih$[3]，$Erdogan$[5] 公式完全一致，从而证明了所选应力函数及应力、位移解的正确性。由于式（17)，(19) 综合了$Williams$和$Rice—Sih$解的情况，具有更为普遍的意义。

由于第二组解在应力表达式中以r^0，r^1，r^2，…的形式出现，对应力强度因子k_1，k_2影响不大，在本计算中只选用了第一组解。

若把a_n写成$a_n=a_{nR}+ia_{nI}$可得应力及位移表达式

$$\sigma_{x_1}=\sum_{n=1}^{\infty}(F_1a_{nR}+F_2a_{nI})$$

$$\sigma_{y_1}=\sum_{n=1}^{\infty}(F_3a_{nR}+F_4a_{nI})$$

$$\tau_{xy_1}=\sum_{n=1}^{\infty}(F_5a_{nR}+F_6a_{nI}) \tag{21}$$

$$u_1=\sum_{n=1}^{\infty}(F_7a_{nR}+F_8a_{nI})$$

$$v_1=\sum_{n=1}^{\infty}(F_9a_{nR}+F_{10}a_{nI})$$

式中F_i为r及θ的函数[参见式（17)]

应力强度因子

由式（19）知，当$n=1$时，应力表达式中存在$r^{-\frac{1}{2}}$项，使应力产生奇异性，式（19）表明当$r\to0$时，a_1值将决定裂纹尖端附近的应力状态及应力强度因子值。根据 $Rice—Sih$[4] 的公式，应力强度因子表达式为：

$$\begin{aligned}K&=K_1+iK_2\\&=2\sqrt{2}e^{\varepsilon\pi}\lim_{z\to0}z^{\frac{1}{2}+i\varepsilon}\phi_1'(z)\end{aligned} \tag{22}$$

式中 $$\varepsilon=\frac{1}{2\pi}\log\frac{\left(\frac{3-\nu_1}{1+\nu_1}\right)\frac{1}{G_1}+\frac{1}{G_2}}{\left(\frac{3-\nu_2}{1+\nu_2}\right)\frac{1}{G_2}+\frac{1}{G_1}} \tag{23}$$

比较式（15）及（23）得

$$\lambda_2=-\varepsilon \tag{24}$$

将式（6）（24）代入式（22）得

$$K=K_1+iK_2=2\sqrt{2}e^{-\lambda_2\pi}\left(-\frac{1}{2}+i\lambda_2\right)(a_{1R}+ia_{1I})$$

即

$$K_1=2\sqrt{2}e^{-\lambda_2\pi}\left(\frac{1}{2}a_{1R}-\lambda_2 a_{1I}\right)$$
$$K_2=2\sqrt{2}e^{-\lambda_2\pi}\left(\lambda_2 a_{1R}+\frac{1}{2}a_{1I}\right) \tag{25}$$

裂纹尖端奇异元

本文选内嵌裂纹尖端的特殊单元奇应变元。为了适应两种不同材料的结构情况，整个奇异元由两个单元组成，它们分别位于裂纹上、下表面，包含在两种不同材料之中（图2），每个奇应变元为矩形，其长宽比为3：1，8个节点等距离地沿单元边界排列，节点7，8及7′，8′分别为裂纹上、下表面的点，点1与1′及2与2′重合。

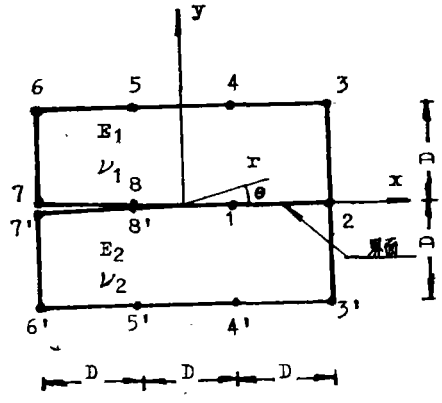

图2　裂纹尖端奇异单元

取式（17），（18）作为奇异元应力、位移表达式。应力及位移在两个元素分界面上是连续的。对于每个8节点奇异元共有16个自由度，选十三个特定常数及三个刚体位移作为元素的广义位移，其表达式为

$$u=\sum_{n=1}^{7}(F_7a_{nR})+\sum_{n=1}^{6}(F_8a_{nI})+u_0-\omega_0 y$$

$$v=\sum_{n=1}^{7}(F_9a_{nR})+\sum_{n=1}^{6}(F_{10}a_{nI})+v_0+\omega_0 x$$

式中u_0，v_0，ω_0代表元素的刚体位移，因而得

$$\{U\}=[C_u]\{A\} \tag{26}$$

式中　$\{U\}$为节点位移矩阵，$\{A\}$为广义位移矩阵

$$\{A\}^T=[a_{1R},\ a_{1I},\ a_{2R},\ a_{2I},\ \cdots\cdots,\ a_{7R},\ u_0,\ v_0,\ \omega_0]$$

由式（17）（18）（21）奇异元中任一点的位移及应力可表示为

$$\begin{aligned}u&=[C_1]\{A\}\\ v&=[C_2]\{A\}\\ \sigma_x&=[C_3]\{A\}\\ \sigma_y&=[C_4]\{A\}\\ \tau_{xy}&=[C_5]\{A\}\end{aligned} \tag{27}$$

根据能量变分原理及高斯定理得元素刚度矩阵

$$[K]=[C_u^{-1}]^T[K_A][C_u^{-1}] \tag{28}$$

式中

$$[K_A]=-\int_{-1.5D}^{1.5D}([C_4]^T[C_2]+[C_5]^T[C_1])dx|_{y=0}$$

$$+\int_0^D([C_3]^T[C_1]+[C_5]^T[C_2])dy|_{x=1.5D} \tag{29}$$

$$+\int_{-1.5D}^{1.5D}([C_4]^T[C_2]+[C_5]^T[C_1])dx|_{y=D}$$

$$-\int_0^D([C_3]^T[C_1]+[C_5]^T[C_2])dy|_{x=-1.5D}$$

矩阵 K_A 中的每个元素都由沿元素边界数值积分而得，积分站的选取要恰当，否则会影响K_A的精度。

平面应力状态計算結果分析

本文采用了裂纹尖端奇异元及常应变三角形元素。算例为具有中心裂纹的平板，板宽为 $2b$，裂纹长为 $2a$，$a/b=0.15$（图 3）。载荷为在x，y方向作用有均布载荷情况，设 $\sigma_x=1$ 磅/吋^2，$\sigma_y=1$ 磅/吋^2。$\nu_1=\nu_2=0.3$，$E_1=1$磅/吋^2，$E_2=0.1\sim1.0$磅/吋^2。考虑结构及载荷的对称条件，只计算 1/2 板。在不同的 E_1/E_2 值下，有限元计算所得各应力强度因子值K_1及K_2列于表 1。

$E_1/E_2=1.0$ 的情况，即均匀材料中心裂纹情况，由手册查得应力强度因子值为 $K_1=1.25$，与表 1 计算值误差为 6.4%，K_2 的理论值为零，计算值为 -0.007，较为满意。

有限元计算结果表明，K_1值随 E_1/E_2 值的增大而减小（图 4）。

裂纹尖端附近正应力 σ_y 沿 x 轴分布计算值列于表 2。正应力随 E_1/E_2 值增加而下降（图 5）。

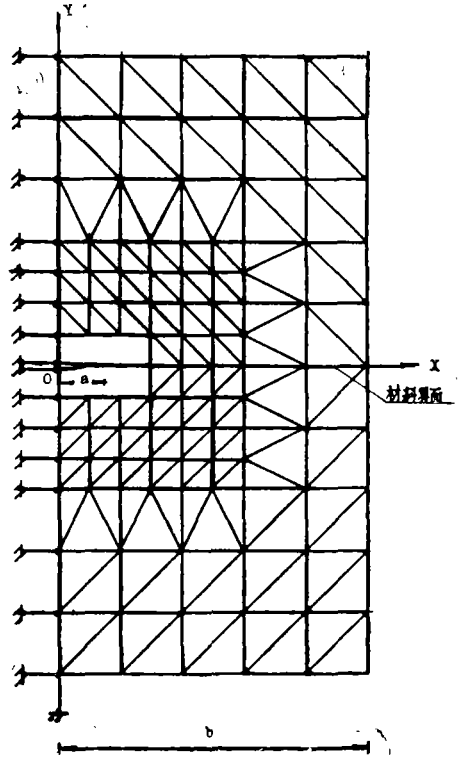

图 3　网格划分

表1　应力强度因子值

E_1/E_2	λ_2	K_1	K_2
1.0	0.0	1.16	−0.007
2.0	0.037	1.10	−0.050
3.0	0.056	1.08	−0.098
4.0	0.068	1.00	−0.179

续　表

E_1/E_2	λ_2	K_1	K_2
5.0	0.076	0.96	-0.226
6.0	0.081	0.94	-0.226
7.0	0.085	0.90	-0.329
8.0	0.089	0.83	-0.352
9.0	0.092	0.86	-0.335
10.0	0.094	0.80	-0.375

表2　应力σ_y沿x轴向分布

$\frac{r}{D}$ \ E_1/E_2	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
0.001	25.88	23.95	23.33	21.97	21.24	20.53	20.55	19.40	19.74	18.78
0.005	11.61	10.86	10.74	10.17	9.88	9.62	9.56	9.02	9.24	8.75
0.010	8.25	7.75	7.69	7.30	7.09	6.93	6.86	6.47	6.64	6.27
0.020	5.88	5.54	5.53	5.25	5.10	5.00	4.93	4.66	4.78	4.51
0.040	4.22	4.00	4.00	3.81	3.71	3.64	3.57	3.38	3.47	3.27
0.060	3.50	3.33	3.33	3.18	3.10	3.05	2.98	2.83	2.90	2.73
0.080	3.08	2.93	2.94	3.82	2.74	2.70	2.63	2.51	2.57	2.43
0.100	2.79	2.67	2.68	2.57	2.50	2.47	2.40	2.30	2.35	2.22
0.200	2.11	2.05	2.06	2.00	1.95	1.94	1.88	1.83	1.86	1.78
0.300	1.83	1.79	1.82	1.78	1.74	1.74	1.70	1.67	1.70	1.64
0.400	1.67	1.66	1.68	1.66	1.64	1.65	1.61	1.60	1.63	1.59
0.500	1.57	1.57	1.60	1.58	1.58	1.60	1.57	1.57	1.60	1.58

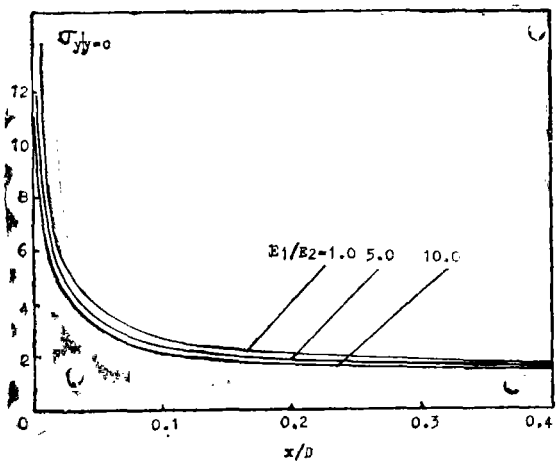

图 4　应力強度因子随E_1/E_2变化曲綫

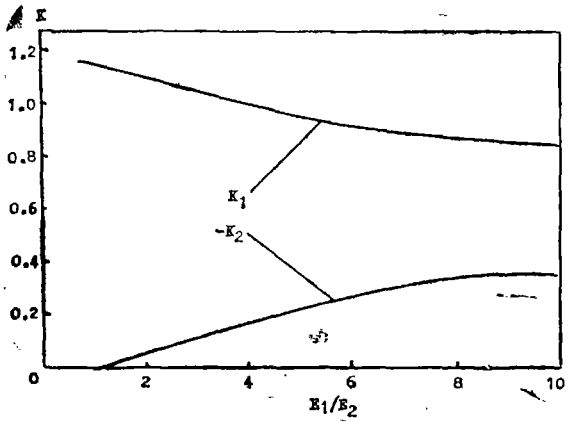

图 5　裂紋尖端应力随E_1/E_2变化曲綫

根据$Sih-Rice$[4]应力公式，取第一项，在$\theta=0$条件下，得σ_y沿轴分布表达式，即

$$\sigma_y|_{y=0}=(c_1K_1-c_2K_2)\frac{1+e^{-2\lambda_2\pi}}{2} \tag{30}$$

式中

$$c_1=\frac{e^{\lambda_2\pi}\cos(-\lambda_2\log r)}{(2r)^{1/2}}$$

$$c_2=\frac{e^{\lambda_2\pi}\sin(-\lambda_2\log r)}{(2r)^{1/2}}$$

在表3中给出在$r/D=0.001$处，有限元计算得σ_y值及由式（30）计算σ_y值。由表3可知，σ_y级数展开式收敛很快，在裂纹尖端附近取第一项已能保证一定的精度，也证明本计算中奇异元的正确性及有限元程序的正确性。

表3　$r/D=0.001$处σ_y值

E_1/E_2	有限元計算值	級数第一項值
1.0	25.89	25.86
5.0	21.23	22.03
10.0	18.78	20.11

本文所采用的裂纹尖端奇异元是以裂纹尖端漸近解为基础建立的，可用以计算有限宽板问题，并且该奇异元具有概念简单明确的优点。但该奇异元在计算K值及应力值时都有振蕩问题，影响计算精度，还需进一步改进。

致谢：在理论分析方面$R.L.Carlson$教授及匡震邦教授提出了宝贵建议，作者在此表示感谢。

参考文献

[1] K.Y.Lin, "The Stiess Intensity of a Crack at an Interface between two Materials", M.I.T.ASRL TR 162-5(June 1973).

[2] K.Y.Lin and J.W.Mar, "Finite element analysis of stress intensity factor for crack at a bi-material interface", Int.J.Fracture, Vol.12, No.4 (1976)

[3] J.Rice and G.C.Sih, "Plane Problem of Cracks in Dissimilar midia", J.Appl. Mech. (June 1965).

[4] G.C.Sih and J.R.Rice, "The Bending of Plates of Dissimilar Material with Cracks", J.Appl.Mech.Vol.31.1964.

[5] F.Erdogan, "Stress distribution in a nonhomogeneous elastic plane with cracks", J.Appl.Mech.June 1966.

[6] M.L.Williams, "The stress arround a fault or crack in dissimilar media", Bulletin of Seismological Society of America, Vol.94, 1959.

[7] 董平，J.N. 瑞赛托斯著，熊昌炳等譯校，《有限元素法》，北京航空学院（1979）.

ABSTRACT

With the aid of the basic theorems of Fourier transformation and Fourier series, the general solution of a pair of edge cracks at the interfaces of four different media in a rectangular sheet under longitudinal shear stress is found in this paper. It is of interest to note that the stress intensity factor of this problem is independent of the material constants of the composite rectangular sheet. The conclusion is no doubt of great importance to designers and experimenters because there is no need to carry out unnecessary tests.

STRESS INTENSITY FACTOR OF A CRACK AT THE BI-MATERIAL INTERFACE

Gu Zhifen

Department of Flight Vehicle Design and Applied Mechanics
Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics, Beijing, China

(Received June 1985)

ABSTRACT

An analysis using complex exponential series is developed for the problem of a crack on the boundary between two dissimilar materials. The eigenvalues and the relations among the complex constants are determined by the use of crack face boundary conditions and the continuity conditions at the interface. From these results the stress and displacement fields and the stress intensity factors have been determined. the stress function used by Lin[1] and by Lin and Mar [2] are modified and the solution reduces to results obtained by Williams [6] and by Sih and Rice [3, 4]. A singular element based on the results is used to develop a finite element analysis of finite tension sheet with a central crack on a straight interface boundary.

APPROXIMATE ANALYSIS OF THE BENDING AND VIBRATION OF LAMINATES

He Jifan, Chen Yi and Duan Jicheng

Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing, China

(Received Sept. 1985)

ABSTRACT

Transverse shear effects are important for the bending and vibration of laminated