第3卷 第3期　　复 合 材 料 学 报　　Vol. 3 No.3
1986年9月　　ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA　　September 1686

复合矩形薄板交界面上的Ⅲ型双边裂纹

張 孝 思

（北京建筑工程学院基礎部）

摘　要

本文借助富立叶变換与富立叶級数的基本理論，对四种介质所組成的复合矩形薄板在介质交界面处內含Ⅲ型双边裂縫的問題，找到了它的一般分析解。令人感兴趣的是：分析还发現本問題的应力強度因子与复合板的材料性质无关。这个結論无疑将对設計工作者和实驗工作者是很重要的，因为根据它可以避免多余的試驗。

一、基本关系式与方程

由四种介质所组成的复合矩形薄板，在介质交界面上有一对边裂縫，每个裂縫长 a 并穿透板厚，如图1所示。采用一对坐标系 (x_1, y_1, z_1)、(x_2, y_2, z_2) 来处理这一問題极为方便。沿每条边裂縫线分别取为轴 x_1 与 x_2 并和复合板的中线重合，沿矩形板的两边分别取为轴 y_1 与 y_2，并和每条边裂縫垂直。未标出的 z_1 与 z_2 两轴同时垂直于板面。为此，我们考虑图1所示矩形裂縫板 $(2h\times 2b)$ 是由四块矩形板 $(h\times b)$ 所组成，并将它们分别限制在坐标系 (x_1, y_1, z_1) 与 (x_2, y_2, z_2) 之內。令 μ_1、μ_2、μ_3 及 μ_4 代表四种不同介质 $0\leqslant x_1\leqslant b$，$0\leqslant y_1\leqslant h$；$0\leqslant x_2\leqslant b$，$0\leqslant y_2\leqslant h$；$0\leqslant x_2\leqslant b$；$0\geqslant y_2\geqslant -h$；和 $0\geqslant y_1\geqslant -h$ 的剪切模数。设想此复合矩形薄板中每一介质均是属于匀质同性，同时还假定在每个边裂縫上均承受任意而相同的反平面剪应力，即 $\tau(x_1)$ 与 $\tau(x_2)$ 相等。它们在 z_1 与 z_2 方向均构成自相平衡的系统。

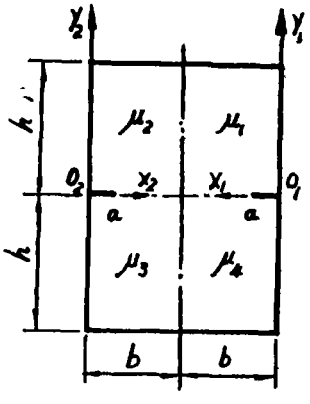

图　1

在此情况下，边界条件可以如下给出：在每条边裂縫线上

$$\tau_{1y_1z_1}(x_1, 0) = -\tau(x_1); \qquad 0\leqslant x_1\leqslant a \qquad (1.1)$$

本文1986年1月1日收到

$$\tau_{2y_2z_2}(x_2,\ 0)=-\tau(x_2);\qquad 0\leqslant x_2<a \tag{1.2}$$

$$u_{1z_1}(x_1,\ 0)=u_{4z_1}(x_1,\ 0);\qquad b\geqslant x_1>a \tag{1.3}$$

$$u_{2z_2}(x_2,\ 0)=u_{3z_2}(x_2,\ 0).\qquad b\geqslant x_2>a \tag{1.4}$$

在裂縫板的周边上

$$\tau_{1y_1z_1}(x_1,\ h)=0;\qquad 0\leqslant x_1\leqslant b \tag{1.5}$$

$$\tau_{2y_2z_2}(x_2,\ h)=0;\qquad 0\leqslant x_2\leqslant b \tag{1.6}$$

$$\tau_{4y_1z_1}(x_1,\ -h)=0;\qquad 0\leqslant x_1\leqslant b \tag{1.7}$$

$$\tau_{3y_2z_2}(x_2,\ -h)=0;\qquad 0\leqslant x_2\leqslant b \tag{1.8}$$

$$\tau_{1x_1z_1}(0,\ y_1)=0;\qquad 0\leqslant y_1\leqslant h \tag{1.9}$$

$$\tau_{2x_2z_2}(0,\ y_2)=0;\qquad 0\leqslant y_2\leqslant h \tag{1.10}$$

$$\tau_{4x_1z_1}(0,\ y_1)=0;\qquad 0\geqslant y_1\geqslant -h \tag{1.11}$$

$$\tau_{3x_2z_2}(0,\ y_2)=0;\qquad 0\geqslant y_2\geqslant -h \tag{1.12}$$

另外，还必须考虑连续条件**：

在交界面$y_1=y_2=0$上

$$\tau_{1y_1z_1}(x_1,\ 0)=\tau_{4y_1z_1}(x_1,\ 0);\qquad 0\leqslant x_1\leqslant b \tag{1.13}$$

$$\tau_{2y_2z_2}(x_2,\ 0)=\tau_{3y_2z_2}(x_2,\ 0).\qquad 0\leqslant x_2\leqslant b \tag{1.14}$$

在$x_1=x_2=b$的交界面上

$$-\tau_{1x_1z_1}(b,\ y_1)=\tau_{2x_2z_2}(b,\ y_2);\qquad 0\leqslant y_1=y_2\leqslant h \tag{1.15}$$

$$u_{1z_1}(b,\ y_1)=u_{2z_2}(b,\ y_2);\qquad 0\leqslant y_1=y_2\leqslant h \tag{1.16}$$

$$-\tau_{4x_1z_1}(b,\ y_1)=\tau_{3x_2z_2}(b,\ y_2);\qquad 0\geqslant y_1=y_2\geqslant -h \tag{1.17}$$

$$u_{4z_1}(b,\ y_1)=u_{3z_2}(b,\ y_2).\qquad 0\geqslant y_1=y_2\geqslant -h \tag{1.18}$$

对于反平面问题，板内每种介质唯一不为零的位移分量u_{jz_s}只是x_s与y_s的函数，即

$$u_{jz_s}=u_{jz_s}(x_s,\ y_s), \tag{1.19}$$

其中$s=1$，2；$j=1$，2，3，4。引用应力与位移的关系便得：

$$\tau_{jx_sz_s}(x_s,\ y_s)=\mu_j\frac{\partial}{\partial x_s}u_{jz_s}(x_s,\ y_s); \tag{1.20}$$

$$\tau_{jy_sz_s}(x_s,\ y_s)=\mu_j\frac{\partial}{\partial y_s}u_{jz_s}(x_s,\ y_s). \tag{1.21}$$

将（1.20）与（1.21）代入平衡方程

$$\frac{\partial}{\partial x_s}\tau_{jx_sz_s}(x_s,\ y_s)+\frac{\partial}{\partial y_s}\tau_{jy_sz_s}(x_s,\ y_s)=0 \tag{1.22}$$

可以发现每种介质中不等于零的位移分量$u_{jz_s}(x_s,\ y_s)$应满足偏微分方程

** 1.在$y_s=0$的交界面上不出现$\tau_{jx_sz_s}$。 2.在$x_s=b$的交界面上不出现$\tau_{jy_sz_s}$。 3.由于x_1与x_2反向必然导致$\tau_{2x_2z_2}$、$\tau_{3x_2z_2}$与$\tau_{1x_1z_1}$、$\tau_{4x_1z_1}$反向（$s=1$，2；$j=1$，2，3，4）。

$$\nabla^2 u_{jz_s}(x_s,\ y_s)=0, \tag{1.23}$$

式中未计入体积力，$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x_s^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_s^2}$

根据以上的分析，求解由四种介质所组成的复合矩形薄板内含Ⅰ型双边裂缝的问题，显然我们必需事先寻找每种介质中的位移分量，并满足所有的条件（1.1)—(1.18）以及偏微分方程（1.23）。

二、分 析 解

众所周知，求解偏微分方程（1.23）便能找到矩形裂缝板中每种介质的位移分量。如果我们将每种介质中的位移分量$u_{jz_s}(x_s,\ y_s)$用下面的富立叶余弦变换和富立叶正弦级数

$$\begin{Bmatrix} u_{1z_1}(x_1,\ y_1) \\ u_{2z_2}(x_2,\ y_2) \\ u_{3z_3}(x_2,\ y_2) \\ u_{4z_4}(x_1,\ y_1) \end{Bmatrix} = \int_0^\infty \begin{Bmatrix} A_1(\xi)ch\xi(h-y_1)\cos(\xi x_1) \\ A_2(\xi)ch\xi(h-y_2)\cos(\xi x_2) \\ A_3(\xi)ch\xi(h+y_2)\cos(\xi x_2) \\ A_4(\xi)ch\xi(h+y_1)\cos(\xi x_1) \end{Bmatrix} \frac{d\xi}{ch(\xi h)} + \sum_{n=1,3\cdots}^{\infty} \begin{Bmatrix} B_1(n)ch\frac{n\pi x_1}{2h}\sin\frac{n\pi y_1}{2h} \\ B_2(n)ch\frac{n\pi x_2}{2h}\sin\frac{n\pi y_2}{2h} \\ B_3(n)ch\frac{n\pi x_2}{2h}\sin\frac{n\pi y_2}{2h} \\ B_4(n)ch\frac{n\pi x_1}{2h}\sin\frac{n\pi y_1}{2h} \end{Bmatrix} \tag{2.1}$$

表示，则方程（1.23）便能明显地得到满足（读者可以自行验证）。按（1.20）与（1.21）两式，相应的应力分量为：

$$\begin{Bmatrix} \tau_{1x_1z_1}(x_1,\ y_1) \\ \tau_{2x_2z_2}(x_2,\ y_2) \\ \tau_{3x_2z_2}(x_2,\ y_2) \\ \tau_{4x_1z_1}(x_1,\ y_1) \end{Bmatrix} = -\int_0^\infty \begin{Bmatrix} \mu_1A_1(\xi)ch\xi(h-y_1)\sin(\xi x_1) \\ \mu_2A_2(\xi)ch\xi(h-y_2)\sin(\xi x_2) \\ \mu_3A_3(\xi)ch\xi(h+y_2)\sin(\xi x_2) \\ \mu_4A_4(\xi)ch\xi(h+y_1)\sin(\xi x_1) \end{Bmatrix} \frac{\xi d\xi}{ch(\xi h)} + \sum_{n=1,3\cdots}^{\infty} \begin{Bmatrix} \mu_1B_1(n)sh\frac{n\pi x_1}{2h}\sin\frac{n\pi y_1}{2h} \\ \mu_2B_2(n)sh\frac{n\pi x_2}{2h}\sin\frac{n\pi y_2}{2h} \\ \mu_3B_3(n)sh\frac{n\pi x_2}{2h}\sin\frac{n\pi y_2}{2h} \\ \mu_4B_4(n)sh\frac{n\pi x_1}{2h}\sin\frac{n\pi y_1}{2h} \end{Bmatrix} \frac{n\pi}{2h}; \tag{2.2}$$

$$\begin{Bmatrix}\tau_{1y_1z_1}(x_1,\ y_1)\\ \tau_{2y_2z_2}(x_2,\ y_2)\\ \tau_{3y_2z_2}(x_2,\ y_2)\\ \tau_{4y_1z_1}(x_1,\ y_1)\end{Bmatrix}$$

$$=\int_0^\infty \begin{Bmatrix}-\mu_1 A_1(\xi)sh\xi(h-y_1)cos(\xi x_1)\\ -\mu_2 A_2(\xi)sh\xi(h-y_2)cos(\xi x_2)\\ \mu_3 A_3(\xi)sh\xi(h+y_2)cos(\xi x_2)\\ \mu_4 A_4(\xi)sh\xi(h+y_1)cos(\xi x_1)\end{Bmatrix}\frac{\xi d\xi}{ch(\xi h)}+\sum_{n=1,3\cdots}^{\infty}\begin{Bmatrix}\mu_1 B_1(n)ch\frac{n\pi x_1}{2h}cos\frac{n\pi y_1}{2h}\\ \mu_2 B_2(n)ch\frac{n\pi x_2}{2h}cos\frac{n\pi y_2}{2h}\\ \mu_3 B_3(n)ch\frac{n\pi x_2}{2h}cos\frac{n\pi y_2}{2h}\\ \mu_4 B_4(n)ch\frac{n\pi x_1}{2h}cos\frac{n\pi y_1}{2h}\end{Bmatrix}\frac{n\pi}{2h}. \tag{2.3}$$

利用 (2.2) 与 (2.3),边界条件 (1.5)—(1.12) 均能明显地满足。将 (2.3) 中的头两式与 (2.1) 中的各式分别代入边界条件 (1.1)—(1.4) 可以得到下面两组对偶积分方程:

$$\mu_1\left[\int_0^\infty \xi A_1(\xi)th(\xi h)cos(\xi x_1)\,d\xi-\sum_{n=1,3\cdots}^{\infty}\frac{n\pi}{2h}B_1(n)\,ch\frac{n\pi x_1}{2h}\right]=\tau(x_1);\ 0\leqslant x_1<a \tag{2.4}$$

$$\int_0^\infty\left[A_1(\xi)-A_4(\xi)\right]cos(\xi x_1)d\xi=0,\qquad b\geqslant x_1>a \tag{2.5}$$

$$\mu_2\left[\int_0^\infty \xi A_2(\xi)th(\xi h)cos(\xi x_2)d\xi-\sum_{n=1,3\cdots}^{\infty}\frac{n\pi}{2h}B_2(n)ch\frac{n\pi x_2}{2h}\right]=\tau(x_2);\ 0\leqslant x_2<a \tag{2.6}$$

$$\int_0^\infty[A_2(\xi)-A_3(\xi)]cos(\xi x_2)d\xi=0.\qquad b\geqslant x_2>a \tag{2.7}$$

借用位移的连续条件 (1.16) 与 (1.18) ，由 (2.1) 中的各式可发现

$$A_1(\xi)=A_2(\xi);\quad B_1(n)=B_2(n), \tag{2.8}$$

$$A_4(\xi)=A_3(\xi);\quad B_4(n)=B_3(n). \tag{2.9}$$

将 (2.2) 中的各式分别代入 (1.15) 、(1.17) 两式，并注意 (2.8) 与 (2.9) 的结果，然后应用富立叶正弦反演便不难得到[1—3]:

$$\begin{Bmatrix}B_1(n)\\ B_2(n)\\ B_3(n)\\ B_4(n)\end{Bmatrix}=\frac{2}{hsh\frac{n\pi b}{2h}}\int_0^\infty\begin{Bmatrix}A_1(\xi)\\ A_2(\xi)\\ A_3(\xi)\\ A_4(\xi)\end{Bmatrix}\frac{\xi}{\xi^2+\left(\frac{n\pi}{2h}\right)^2}sin(\xi b)d\xi. \tag{2.10}$$

考虑 (1.13) 与 (1.14) ，按 (2.3) 中的各式得:

$$A_4(\xi)=-\frac{\mu_1}{\mu_4}A_1(\xi);\quad B_4(\xi)=\frac{\mu_1}{\mu_4}B_1(n),\tag{2.11}$$

$$A_3(\xi)=-\frac{\mu_2}{\mu_3}A_2(\xi);\quad B_3(\xi)=\frac{\mu_2}{\mu_3}B_2(n).\tag{2.12}$$

引用以上所有的结果 (2.8)—(2.12)，两组对偶方程 (2.4)—(2.7) 可改为：

$$\mu_1\frac{d}{dx_1}\int_0^\infty A_1(\xi)\sin(\xi x_1)d\xi+\int_0^\infty \xi[th(\xi h)-1]\mu_1A_1(\xi)\cos(\xi x_1)d\xi$$

$$-\sum_{n=1,3\cdots}^{\infty}\mu_1\left[\frac{2\left(\frac{n\pi}{2h}\right)}{hsh\frac{n\pi b}{2h}}\int_0^\infty\frac{\xi}{\xi^2+\left(\frac{n\pi}{2h}\right)^2}A_1(\xi)\sin(\xi b)\,d\xi\right]ch\frac{n\pi x_1}{2h}=\tau(x_1);\ 0\leqslant x_1<a\tag{2.13}$$

$$\int_0^\infty A_1(\xi)\cos(\xi x_1)d\xi=0,\qquad b\geqslant x_1>a\tag{2.14}$$

$$\mu_2\frac{d}{dx_2}\int_0^\infty A_2(\xi)\sin(\xi x_2)d\xi+\int_0^\infty \xi[th(\xi h)-1]\mu_2A_2\cos(\xi x_2)d\xi$$

$$-\sum_{n=1,3\cdots}^{\infty}\mu_2\left[\frac{2\left(\frac{n\pi}{2h}\right)}{hsh\frac{n\pi b}{2h}}\int_0^\infty\frac{\xi}{\xi^2+\left(\frac{n\pi}{2h}\right)^2}A_2(\xi)\sin(\xi b)\,d\xi\right]ch\frac{n\pi x_2}{2h}=\tau(x_2);\ 0\leqslant x_2<a\tag{2.15}$$

$$\int_0^\infty A_2(\xi)\cos(\xi x_2)d\xi=0.\qquad b\geqslant x_2>a\tag{2.16}$$

采用相同的办法，我们还可以得到矩形薄板中有关下半平面的另外两组对偶积分方程。不过无需在此列出，因为它们的结果和现有的这些方程 (2.13)—(2.16) 的解是一致的。

借助关系式$A_1(\xi)=A_2(\xi)=A(\xi)$，上面两组对偶方程 (2.13)、(2.14) 与 (2.15)、(2.16) 可以合并为一组：

$$\mu_s\frac{d}{dx_s}\int_0^\infty A(\xi)\sin(\xi x_s)d\xi+\int_0^\infty \xi[th(\xi h)-1]\mu_sA(\xi)\cos(\xi x_s)d\xi$$

$$-\sum_{n=1,3\cdots}^{\infty}\mu_s\left[\frac{2\left(\frac{n\pi}{2h}\right)}{hsh\frac{n\pi b}{2h}}\int_0^\infty\frac{\xi}{\xi^2+\left(\frac{n\pi}{2h}\right)^2}A(\xi)\sin(\xi b)\,d\xi\right]ch\frac{n\pi x_s}{2h}=\tau(x_s);\ 0\leqslant x_s<a\tag{2.17}$$

$$\int_0^\infty A(\xi)\cos(\xi x_s)d\xi=0,\qquad b\geqslant x_s>a\tag{2.18}$$

其中$s=1$，2。解对偶积分方程 (2.17) 与 (2.18) 不言而喻，立即可以决定其中唯一的未知函数$A(\xi)$。从而本课题的所有方程 (1.1)—(1.18) 以及 (1.23) 全部得到满足。

令未知函数

$$A(\xi)=\frac{1}{\mu_s}\int_0^a \zeta\varphi(\zeta)J_0(\xi\zeta)d\zeta, \tag{2.19}$$

并注意到公式

$$\int_0^\infty J_0(\xi\zeta)\cos(\xi x_s)d\xi=\begin{cases}(\zeta^2-x_s^2)^{-1/2}; & |x_s|<\zeta\\ 0, & |x_s|>\zeta\end{cases} \tag{2.20}$$

对偶方程之一即自动满足。将(2.19)代入 (2.17),同时使用已知结果 (請参考文献[1～3])

$$\int_0^\infty J_0(\xi\zeta)\sin(\xi x_s)d\xi=\begin{cases}(x_s^2-\zeta^2)^{-1/2}; & |x_s|>\zeta\\ 0, & |x_s|<\zeta\end{cases} \tag{2.21}$$

$$\int_0^\infty \frac{\xi}{\xi^2+\left(\frac{n\pi}{2h}\right)^2}J_0(\xi\zeta)\sin(\xi b)d\xi=\frac{\pi}{2}e^{-\frac{n\pi b}{2h}}I_0\left(\frac{n\pi\zeta}{2h}\right), \tag{2.22}$$

可以发现一亚贝尔型积分方程如下：

$$\frac{d}{dx_s}\int_0^x\frac{\zeta\varphi(\zeta)d\zeta}{(x_s^2-\zeta^2)^{1/2}}+\int_0^\infty\xi[th(\xi h)-1]\left[\int_0^a\zeta\varphi(\zeta)J_0(\xi\zeta)d\zeta\right]\cos(\xi x_s)d\xi$$

$$-\sum_{n=1,3\cdots}^{\infty}\left[\frac{\pi\left(\frac{n\pi}{2h}\right)e^{-\frac{n\pi b}{2h}}}{hsh\frac{n\pi b}{2h}}\int_0^a\zeta\varphi(\zeta)I_0\left(\frac{n\pi\zeta}{2h}\right)d\zeta\right]ch\frac{n\pi x_s}{2h}=\tau(x_s),\quad |x_s|<a \tag{2.23}$$

式中J_0与I_0代表第一类零级贝塞尔与修正贝塞尔函数。运用亚贝尔积分方程

$$\frac{2}{\pi}\frac{d}{dx_s}\int_0^x\frac{\zeta\varphi(\zeta)d\zeta}{(x_s^2-\zeta^2)^{1/2}}=p(x_s);\quad \varphi(\zeta)=\int_0^\zeta\frac{p(x_s)dx_s}{(\zeta^2-x_s^2)^{1/2}}, \tag{2.24}$$

的反演，同时引用公式

$$\int_0^\infty\begin{Bmatrix}\cos(\xi x_s)\\ ch\frac{n\pi x_s}{2h}\end{Bmatrix}\frac{dx_s}{(\zeta^2-x_s^2)^{1/2}}=\frac{\pi}{2}\begin{Bmatrix}J_0(\xi\zeta)\\ I_0\left(\frac{n\pi\zeta}{2h}\right)\end{Bmatrix}, \tag{2.25}$$

然后考虑恒等式

$$\int_0^a\begin{Bmatrix}J_0(\xi\zeta)\\ I_0\left(\frac{n\pi\zeta}{2h}\right)\end{Bmatrix}\zeta\varphi(\zeta)d\zeta\equiv\int_0^a\begin{Bmatrix}J_0(\xi\eta)\\ I_0\left(\frac{n\pi\zeta}{2h}\right)\end{Bmatrix}\eta\varphi(\eta)d\eta, \tag{2.26}$$

我们便能发现亚贝尔方程中的辅助函数$\varphi(\zeta)$必满足下列第二类弗莱得霍姆积分方程：

$$\varphi(\zeta)+\int_0^a\varphi(\eta)[F_1(\eta,\ \zeta,\ h)-F_2(\eta,\ \zeta,\ h,\ b)]d\eta=\frac{2}{\pi}\int_0^\zeta\frac{\tau(x_s)dx_s}{(\zeta^2-x_s^2)^{1/2}}, \tag{2.27}$$

这里

$$F_1=\eta\int_0^\infty\xi[th(\xi h)-1]J_0(\xi\eta)J_0(\xi\zeta)d\xi; \tag{2.28}$$

$$F_2=\eta\sum_{n=1,3\cdots}^{\infty}\frac{\pi\left(\frac{n\pi}{2h}\right)e^{-\frac{n\pi b}{2h}}}{hsh\frac{n\pi b}{2h}}I_0\left(\frac{n\pi\eta}{2h}\right)I_0\left(\frac{n\pi\zeta}{2h}\right). \tag{2.28'}$$

对于第Ⅲ型应力强度因子，可以按常用的公式

$$K_{\text{Ⅲ}}=\lim_{x_s\to a}[2(x_s-a)]^{1/2}\tau_{jy_sz_s}(x_s,\ 0) \tag{2.29}$$

来确定。在（2.29）中的$j=s=1$，2；在一对边裂縫面上的应力分量$\tau_{jy_sz_s}(x_s,\ 0)$，由（2.23）可以给出，即

$$\tau_{jy_sz_s}(x_s,\ 0)=-\frac{d}{dx_s}\int_0^a\frac{\zeta\varphi(\zeta)d\zeta}{(x_s^2-\zeta^2)^{1/2}}-T_2+T_3,\qquad x_s>a \tag{2.30}$$

其中T_2与T_3是（2.23）式左端的二第与第三项。如果注意到T_2与T_3在$x_s=a$时无奇点，便知它们与应力强度因子无关。所以将（2.30）代入（2.29）后，可以得到一个较为简单的计算式：

$$K_{\text{Ⅲ}}=\lim_{x_s\to a}[2(x_s-a)]^{1/2}\left[-\frac{d}{dx_s}\int_0^a\frac{\zeta\varphi(\zeta)d\zeta}{(x_s^2-\zeta^2)^{1/2}}\right]. \tag{2.31}$$

运用分部积分后再取极限，我们即能求出位于复合矩形薄板四种介质交界处的一对边裂縫在任意反平面剪应力作用下的应力强度因子：

$$K_{\text{Ⅲ}}=\varphi(a)a^{1/2}, \tag{2.32}$$

这里$\varphi(a)$代表第二类弗莱德霍姆积分方程（2.27）的解，当$\zeta=a$时的函教值。根据公式（2.32），实际上已证明了本问题的应力强度因子与图示矩形薄板的材料常数无关。但一般的应力分量却与各介质的剪切模量是相关的。另外，我们还可以发现本问题的结果与文献[1～3]中的相同。

三、数值解与討論

由(2.32)式可知Ⅲ型应力强度因子与辅助函数$\varphi(\zeta)$（当$\zeta=a$的值）明显有关。假定在一对边裂縫所承受的反平面剪应力给出后，弗莱德霍姆积分方程（2.27）的解，可以用级数形式来表示：

$$\varphi(\zeta)=\varphi_0(\zeta)+\varphi_1(\zeta)+\varphi_2(\zeta)+\cdots, \tag{3.1}$$

式中

$$\varphi_0(\zeta)=\frac{2}{\pi}\int_0^\zeta\frac{\tau(x_s)dx_s}{(\zeta^2-x_s^2)^{1/2}}\ ; \tag{3.2}$$

$$\varphi_{m+1}(\zeta)=\int_0^a\varphi_m(\eta)(F_2-F_1)d\eta. \tag{3.3}$$

应用双曲函数以及贝塞尔函数的展式得：

$$th(\xi h)=1-2(e^{-2\xi h}-e^{-4\xi h}+\cdots); \tag{3.4}$$

$$J_0(\xi\eta)J_0(\xi\zeta)=1-\frac{\eta^2+\zeta^2}{4}\xi^2+\frac{\eta^4+4\eta^2\zeta^2+\zeta^4}{64}\xi^4-\cdots; \tag{3.5}$$

$$I_0\left(\frac{n\pi\eta}{2h}\right)I_0\left(\frac{n\pi\zeta}{2h}\right)=1+\frac{\eta^2+\zeta^2}{4}\xi^2+\frac{\eta^4+4\eta^2\zeta^2+\zeta^4}{64}\xi^4+\cdots. \tag{3.6}$$

将以上各式代入（2.27）借助已知公式

$$\int_0^\infty \xi^n e^{-\xi h} d\xi = n!/h^{n+1}; \tag{3.7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(-1)^{n-1} = \frac{\pi^2}{12}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}(-1)^{n-1} = \frac{7\pi^4}{720}; \cdots, \tag{3.8}$$

同时设$\tau(x_s)=\tau=$常量，我们便能发现函数$\varphi(a)$的级数形式：

$$\varphi(a)=\varphi(\zeta)|_{\zeta=a}=\tau\left(1+0.2056\frac{a^2}{h^2}-0.0909\frac{a^4}{h^4}\right)$$

$$+\tau\sum_{n=1,3\cdots}^{\infty}\frac{e^{-\frac{n\pi b}{2h}}}{sh\dfrac{n\pi b}{2h}}\left(2.4674\frac{a^2}{h^2}n+1.0146\frac{a^4}{h^4}n+2.2830\frac{a^4}{h^4}n^3\right)$$

$$+\tau\sum_{m=n=1,3\cdots}^{\infty}\sum\frac{mne^{-(m+n)\frac{\pi b}{2h}}}{sh\dfrac{m\pi b}{2h}\,sh\dfrac{n\pi b}{2h}}(6.088)\frac{a^4}{h^4}+0\left(\frac{a^6}{h^6}\right). \quad a<h \tag{3.9}$$

由于级数（3.9）收敛得很快，利用它来计算本问题的数值解是较为方便的。在表1中已给出几个$K_{\text{Ⅲ}}/\tau a^{1/2}$与$a:b:h$相关的数值结果，以供参考。

表1 $K_{\text{Ⅲ}}/\tau a^{1/2}$与a:b:h相关的值

$b:h$ \ $a:b:h$	$1:b:h$	$2:b:h$	$3:b:h$	$4:b:h$	$5:b:h$	$6:b:h$	公式
12:10	1.0032	1.0130	1.0295	1.0533	1.0847	1.1246	(3.9)
10:10	1.0043	1.0176	1.0408	1.0756	1.1241	1.1896	(3.9)
8:10	1.0063	1.0272	1.0645	1.1331	1.2093	1.3313	(3.9)
10:∞	1.0041	1.0169	1.0396	1.0740	1.1229	1.1896	(3.14)

由四种材料组成的无限长板条，其中含有一对边裂缝，在反平面剪应力作用下的应力强度因子，可以利用本文的通解导出。令h趋近无限大并考虑（参看文献[1，2]）

$$\lim_{h\to\infty}[th(\xi h)-1]=0, \tag{3.10}$$

$$\frac{n\pi}{2h}=\xi; \quad \lim_{h\to\infty}\frac{\pi}{h}=d\xi, \tag{3.11}$$

则弗莱德霍姆积分方程将改为

$$\varphi(\zeta)+\int_0^a \varphi(\eta)F_3(\eta,\zeta,b)d\eta=\frac{2}{\pi}\int_0^\zeta\frac{\tau(x_s)dx_s}{(\zeta^2-x_s^2)^{1/2}}, \tag{3.12}$$

其中

$$F_3=\eta\int_0^\infty\xi[1-cth(\xi h)]I_0(\xi\eta)I_0(\xi\zeta)d\xi \tag{3.13}$$

如设$\tau(x_s)=\tau$并注意到$a<b$，函数$\varphi(a)$的级数形式应为

$$\varphi(a)=\tau\left(1+0.4112\frac{a^2}{b^2}+0.3212\frac{a^4}{b^4}\right)+0\left(\frac{a^6}{b^6}\right) \tag{3.14}$$

参 考 文 献

[1] 张孝思，Scientia Sinica (Series A)，1，P86 (1985).

[2] 张孝思，Engng. Frac. Mech.，4，P.709 (1984).

[3] 张孝思，北京建筑工程学院学报，1，P.26 (1985).

[4] 张孝思，上海力学，3.P.27 (1985).

[消息]

日立化成工业（株）将举办

住宅与环境技术交流及展覽

本刊讯：日本日立化成工业株式会社将于今年10月20～24日主办住宅与环境技术交流及展览。交流及展览由中国建筑材料及设备进出口公司承办，协助单位有：国家建材局、城乡建筑环保部、中国建筑技术发展中心、中国FRP工业协会及日本明和产业。

交流及展览地点在北京市百万庄国家建材工业展览馆B厅。前三天为交流，主办及承办单位将邀請200人参加；展览为后两天，参观办法由主办及承办单位通知。

日立化成由横山亮次社长为团长，率领公司一流专家5～6人、国际事业部及宣传部若干人前来参加，交流讲演将用投影、幻灯、录象等形式，每讲半天，讲座2小时，提问及解答1小时。交流内容是：

第一天：浴室及厨房设备（浴盆、宾馆及家用浴室单元、家用锅炉、梳妆台、厨房单元）

第二天：污水处理及利用技术（净化槽、中水利用，家畜及工厂污水处理、农业灌溉装置）

第三天：太阳能利用及成型技术（工厂、体育馆及宾馆等太阳能利用；浴槽喷射成型、SMC成型技术、FW管成型技术、发泡成型技术等）

展出展品有：浴室单元、防水板、家用锅炉、梳妆台、净化槽、厨房、板式组合贮水库、FW管、太阳能利用系统等。

THE PREDICTION OF MATRIX CRACKS IN CROSS-PLY LAMINATES

Li Chongan

Department of Mechanical Engineering
Lanzhou Railway Institute, Lanzhou, China

A.S.D. Wang

Department of Mechanical Engineering and Mechanics
Drexel University, Philadelphia, PA19104, USA
(Received December 1985)

ABSTRACT

The concept of energy release rate and the analysis method developed by A.S.D.Wang in the case of transverse cracks are used to predict three types of matrix cracking in cross-ply laminate family at the late stage of uniaxial tensile loading. Cracking events analysed include longitudinal splitting in 0°-ply, 0/90° interface localized delamination emanating from the intersection of the transverse crack and the coupon free edge, and similar delamination around the cross point of the transverse and longitudinal splitting cracks. A 3-D finite element analysis is performed to simulate those crack development procedures and the corresponding energy release rate curves, as functions of crack size a, are obtained on the basis of Irwin's crack closure technique. After determining the effective inherent flaw sizes, the values of critical loading for considered cracking are then pridicted and found to agree well with the experimental results.

DOUBLE EDGE CRACKS AT THE INTERFACES OF FOUR DIFFERENT MEDIA IN A RECTANGULAR SHEET UNDER ANTI-PLANE SHEAR STRESS

Zhang Xiaosi

Department of Applied Mathematics
Beijing Institute of Civil Engineering, Beijing, China
(Received Jan. 1986)

ABSTRACT

With the aid of the basic theorems of Fourier transformation and Fourier series, the general solution of a pair of edge cracks at the interfaces of four different media in a rectangular sheet under longitudinal shear stress is found in this paper. It is of interest to note that the stress intensity factor of this problem is independent of the material constants of the composite rectangular sheet. The conclusion is no doubt of great importance to designers and experimenters because there is no need to carry out unnecessary tests.

STRESS INTENSITY FACTOR OF A CRACK AT THE BI-MATERIAL INTERFACE

Gu Zhifen

Department of Flight Vehicle Design and Applied Mechanics
Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics, Beijing, China

(Received June 1985)

ABSTRACT

An analysis using complex exponential series is developed for the problem of a crack on the boundary between two dissimilar materials. The eigenvalues and the relations among the complex constants are determined by the use of crack face boundary conditions and the continuity conditions at the interface. From these results the stress and displacement fields and the stress intensity factors have been determined. the stress function used by Lin[1] and by Lin and Mar [2] are modified and the solution reduces to results obtained by Williams [6] and by Sih and Rice [3, 4]. A singular element based on the results is used to develop a finite element analysis of finite tension sheet with a central crack on a straight interface boundary.

APPROXIMATE ANALYSIS OF THE BENDING AND VIBRATION OF LAMINATES

He Jifan, Chen Yi and Duan Jicheng

Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing, China

(Received Sept. 1985)

ABSTRACT

Transverse shear effects are important for the bending and vibration of laminated