第4卷第1期　　复合材料学报　　Vol. 4 No.1
1987年3月　　ACTA NATERIAE COMPOSITAE SINICA　　March 1987

# 纤维缠绕弧形管运动方程和线型设计

李先立

（武汉工业大学机械系）

**摘　要**

本文討論了在計算机控制的纤維缠繞机上缠繞弧形管的运动規律，給出了測地綫缠繞和非測地綫稳定缠繞时絲嘴运动方程。文中还分析了弧形管缠繞綫型，給出了相应公式。

## 一、引　言

纤维缠绕是制造高强度复合材料的一种重要工艺方法，它已广泛用于航天、航空、建材、化工等部门，制造火箭发动机壳体、管道、压力容器等。关于弧形管的缠绕，文献[1]作过一些介绍，但没有给出直接可以应用的公式。本文讨论中心角为$2\beta_s$的弧形管绕过其形心的轴迴转、絲咀在平面内运动时，纤维缠绕的运动规律和线型设计，给出了计算公式，为在计算机上实现弧形管缠绕提供了理论依据。

## 二、数学模型

弧形管是圆环面的一部分。当弧管绕过其形心的轴迴转时，形成一复杂曲面。为避免复杂运算，我们不研究该曲面，而把缠绕时，纤维落纱点$M$的运动，看成是该点随弧管一起迴转和它在弧管上相对运动的合成。我们取图1所示，$O-XYZ$坐标系其座标原点$O$通过弧管的形心，$XOZ$面与弧管中心对称面重合，$YOZ$面为弧管二端面的对称面，其与弧管端面夹角$\beta_s$。弧管曲率中心$C$与原点$O$相距为$a$。

设弧管曲率半径$r_0$，弧管半径$R_0$，比值$n=r_0/R_0$，则有：

$$a=\frac{(3n^2+1)R_0\sin\beta_s}{3n\beta_s} \tag{1}$$

本文1986年3月3日收到

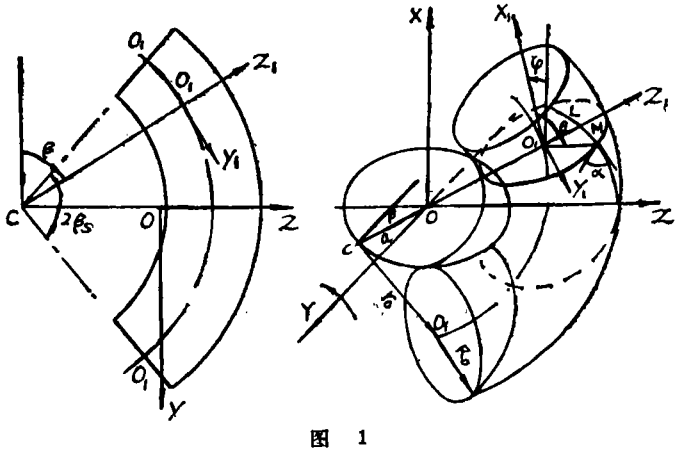


图 1

以下为方便，取无量纲数$R=a/R_0$

在弧管上取动标架$O_1—X_1Y_1Z_1$,其座标原点$O_1$在弧管弯曲中心线$\overset{\frown}{O_1O_1}$上，$O_1Y_1$轴与$\overset{\frown}{O_1O_1}$始终相切，$O_1Z_1$轴在$CO_1$线上。在纤维缠绕过程中，$O_1$一方面沿$\overset{\frown}{O_1O_1}$线移动、一方面与制品一道绕$OY$轴迴转。设初始时，$O_1X_1$与$OX$平行。当弧管绕$OY$轴迴转$\phi$角时，$O_1$运动到$X_1O_1Z_1$面的位置用$\beta$角表示（$\beta$是$CO_1$与$Y$轴负向夹角）。

$O_1$点在$O—XYZ$中座标为：

$$O_1\{(r_0\sin\beta-a)\sin\phi,\ -r_0\cos\beta,\ (r_0\sin\beta-a)\cos\phi\}$$

标架$O—XYZ$与标架$O_1—X_1Y_1Z_1$座标变换关系为：

$$\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}X_1\\Y_1\\Z_1\end{pmatrix}+B \tag{2}$$

其中：

$$A=\begin{pmatrix}\cos\phi & 0 & \sin\phi\\ \sin\phi\cos\beta & \sin\beta & -\cos\phi\cos\beta\\ -\sin\phi\sin\beta & \cos\beta & \cos\phi\sin\beta\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}(r_0\sin\beta-a)\sin\phi\\ -r_0\cos\beta\\ (r_0\sin\beta-a)\cos\phi\end{pmatrix}$$

为方便矩阵运算，采用下面表示法，记

$$\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\\1\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}X_1\\Y_1\\Z_1\\1\end{pmatrix} \tag{3}$$

其中：

$$C=\begin{pmatrix}\cos\phi & 0 & \sin\phi & (r_0\sin\beta-a)\sin\phi\\ \sin\phi\cos\beta & \sin\beta & -\cos\phi\cos\beta & -r_0\cos\beta\\ -\sin\phi\sin\beta & \cos\beta & \cos\phi\sin\beta & (r_0\sin\beta-a)\cos\phi\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

## 三、絲嘴运动方程

设絲嘴$P$的座标为（$X_P$，$Y_P$，$Z_P$），纤维在制品表面上的落纱点$M$的座标为（$X_M$，$Y_M$，$Z_M$）。联线$\overline{MP}$必是纤维在制品表面上曲线$L$在$M$点的切线，切线矢设为$\vec{T}$。过$M$点作弧管在$X_1O_1Z_1$面上截形（以$O_1$为圆心，$R_0$为半径的圆）的切线$\overline{MN}$，则$\overline{MN}$与$\overline{MP}$夹角即为缠绕角，记为$\alpha$（见图2）。设$M$点在$O_1$—$X_1Y_1Z_1$中座标为：

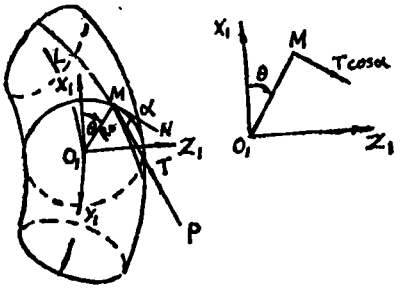


图 2

$$(R_0\cos\theta,\ 0,\ R_0\sin\theta)$$

则它在$O$—$XYZ$中座标为：

$$\begin{pmatrix} X_M \\ Y_M \\ Z_M \\ 1 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} R_0\cos\theta \\ 0 \\ R_0\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

式中 $\theta$ 为矢量$\overrightarrow{O_1M}$与$\overrightarrow{O_1X_1}$之间夹角，它表示$M$点在弧管截面中的位置。

矢量$\vec{T}$在$O_1$—$X_1Y_1Z_1$中座标为：

$$(-\sin\theta\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ \cos\theta\cos\alpha)$$

它在$O$—$XYZ$中座标为：

$$\begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\alpha \\ \sin\alpha \\ \cos\theta\cos\alpha \end{pmatrix} \tag{5}$$

由空间曲线切线方程：

$$\frac{X_P - X_M}{T_X} = \frac{Y_P - Y_M}{T_Y} = \frac{Z_P - Z_M}{T_Z}$$

得

$$\begin{aligned} X_P &= X_P \\ Y_P &= Y_M + (X_P - X_M)\cdot T_Y/T_X \\ Z_P &= Z_M + (X_P - X_M)\cdot T_Z/T_X \end{aligned} \tag{6}$$

(6) 式即为絲嘴作平面运动时运动方程。

要使其具体化，需要建立弧管绕$Y$轴迴转的微量$d\phi$与落纱点$M$微量变化对应的$d\theta$之间的关系。取图3所示微元，其中$O'MM_2$面与$YY$轴垂直，$M'$与$M$分别距$YY$轴为$r_m$，$r_m+dr_m$，由微元几何关系得：

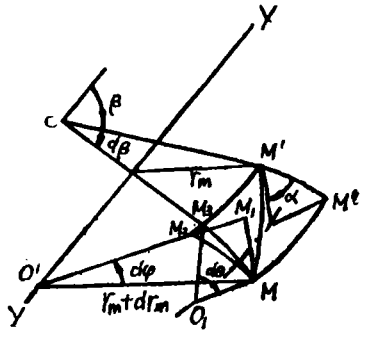


图 3

$$\widehat{MM}_3 = \widehat{MM}_2\sin\beta = R_0 d\theta$$

$$\widehat{MM}_2 = (\widehat{MM}_1^2 + \overline{M_1M_2}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\widehat{MM_1}=(r_M+dr_M)d\phi$$

$$\overline{M_1M_2}=dr_M \tag{7}$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\widehat{MM''}}{\widehat{M'M''}}=\frac{(n+\sin\theta)d\beta}{d\theta}$$

经变换并略去微量得：

$$\frac{d\theta}{d\phi}=\frac{-b+(b^2+ac)^{1/2}}{a} \tag{8}$$

式中

$$a=a_1/\sin^2\beta-[a_2\mathrm{tg}\alpha/(n+\sin\theta)+a_3]$$

$$a_1=4\{n\sin\beta-R)^2+2(n\sin\beta-R)[\sin\phi\cos(\phi-\theta)-\cos\phi\sin\beta\sin(\phi-\theta)]$$
$$+\cos^2(\phi-\theta)+\sin^2\beta+\sin^2(\phi-\theta)\}$$

$$a_2=2(n\sin\beta-R)\cos\beta[n-\cos\phi\sin(\phi-\theta)]+2n\cos\beta\cdot[\sin\phi\cos(\phi-\theta)$$
$$-\cos\phi\sin\beta\sin(\phi-\theta)]+\sin2\beta\sin^2(\phi-\theta)$$

$$a_3=2(n\sin\beta-R)[\cos\phi\sin\beta\cos(\phi-\theta)-\sin\phi\sin(\phi-\theta)]+\cos^2\beta\sin2(\phi-\theta)$$

$$b=b_1[a_2\mathrm{tg}\alpha/(n+\sin\theta)+a_3]$$

$$b_1=\cos^2\beta\sin2(\phi-\theta)-2(n\sin\beta-R)(1-\sin\beta)\sin(2\phi-\theta)$$

$$c=b_1^2+a_1^2/4$$

还可得：

$$\frac{d\beta}{d\phi}=\frac{\mathrm{tg}\alpha}{n+\sin\theta}\cdot\frac{d\theta}{d\theta} \tag{9}$$

### 1. 测地线缠绕时丝嘴运动方程

当缠在弧形管上的纤维是弧形管的测地线时，由*clahrant*条件，

$$r\sin\alpha=\cos nt$$

得：

$$r\sin\alpha=r_0\sin\alpha_0$$

式中 $\alpha_0$为$r=r_0$时的缠绕角。

进一步得：

$$\alpha=\sin^{-1}\left(\frac{n\sin\alpha_0}{n+\sin\theta}\right) \tag{10}$$

(6) 与 (8)、(9)、(10) 联立即得测地线缠绕时絲嘴运动方程。用*Runge—Kutt*法可解得：

$$X_P=X(\phi),\ Y_P=Y(\phi),\ Z_P=Z(\phi)$$

图 4 给出了$n=4.34$，$\beta_s=90°$时，$\theta$、$\alpha$、$\beta$、$\phi$ 之间关系曲线。图 5 给出了 $R_0=5$毫米，$X_P=100$毫米，$n=4.34$，$\beta_s=90°$测地线缠绕时絲嘴运动曲线（$Y_P$—$Z_P$曲线）

### 2. 非测地线稳定缠绕时丝嘴运动方程

若$L$不是弧形管的测地线，但在摩擦力作用下位置能稳定，则由[2]得：

$$\frac{d\alpha}{d\theta}=-\frac{\mu(\sin\theta+n\cos^2\alpha)+\cos\theta\sin\alpha}{(n+\sin\theta)\cos\alpha} \tag{11}$$

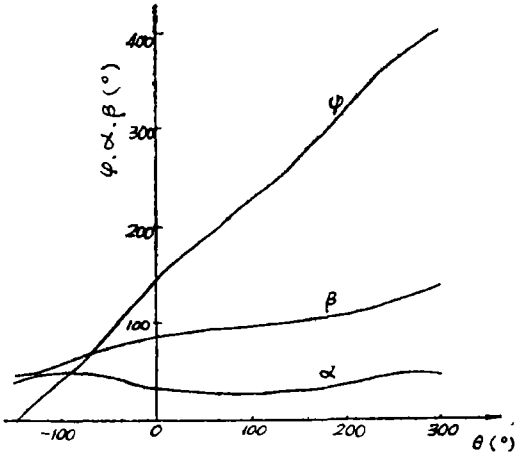


图 4

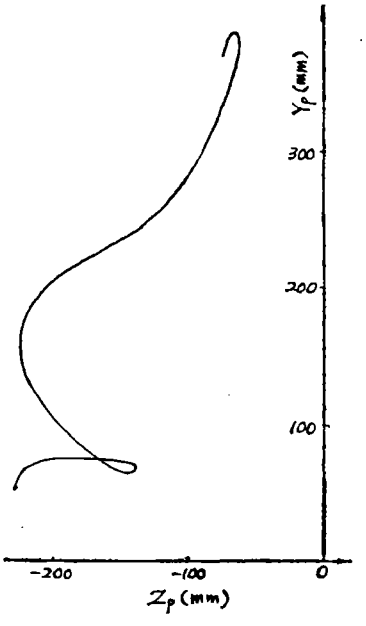


图 5

式中$\mu$是纤维与芯模或纤维与纤维之间的摩擦系数

(6) 与 (8)、(9)、(11) 联立即得非测地线稳定缠绕时絲嘴运动方程。用$Runge—Kutta$法得：

$$X_p=X(\phi),\ Y_p=Y(\phi),\ Z_p=Z(\phi)$$

图 6 给出了$\mu=0.2$时，非测地线稳定缠绕$\theta$、$\beta$、$\alpha$、$\phi$之间关系。从图可看出，在一定范围内，$\phi$增大、$\beta$减小，$\alpha$逐渐由正值变为负值，纤维开始实现回缠，这个过程十分平缓。因此，非测地线稳定缠绕适于弧管端部缠绕。

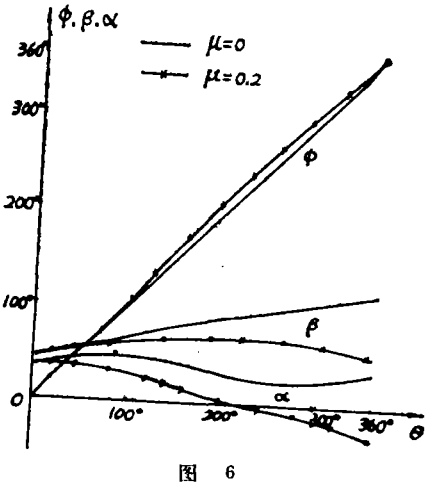


图 6

## 四、綫 性 設 計

根据运动方程，我们能在弧管表面上缠出一条满足纤维位置稳定条件的标准线。然而，要使纤维均匀布满芯模表面，还要进行线型设计。

### 1. 丝嘴往返一次、芯模转角$\Phi$的计算

通常弧管中部采用测地线缠绕，弧管端部采用非测地线稳定缠绕（以考虑回程）。由于$\Phi=\Phi(\alpha,\ \beta,\ \theta)$，函数关系复杂，一般进程时芯模转角$\Phi_f$与回程时芯模转角$\Phi_b$不相等。絲嘴往返一次芯模转角$\Phi$为：

$$\Phi=\Phi_f+\Phi_b \tag{12}$$

式中$\Phi_f=\Phi_G+\Phi_N$；

$\Phi_b=\Phi'_G\Phi'_N$；

$\Phi_G$，$\Phi'_G$分别为进程与回程测地线缠绕时芯模转角；

$\Phi_N$，$\Phi'_N$分别为进程与回程非测地线缠绕时芯模转角。

设$\beta_G$、$\beta'_G$，$\beta_N$、$\beta'_N$分别为$\Phi_G$、$\Phi'_G$、$\Phi_N$、$\Phi'_N$对应的弧管中心角，则弧管中心角$2\beta_s$为：

$$2\beta_s=\beta_G+\beta_N=\beta'_G+\beta'_N \tag{13}$$

在测地线缠绕和非测地线缠绕交接处，存在有同时满足方程(10)、(11)的$\alpha=\alpha_c$，$\theta=\theta_c$，给定该值，同时给出非测地线缠绕回程时位置角$\alpha=0$，$\theta=\theta_P$，我们可由(7)、(11)联立所得的公式：

$$\frac{d\beta}{d\alpha}=-\frac{\sin\alpha}{\mu(\sin\theta+n\cos^2\alpha)+\cos\theta\sin\alpha} \tag{14}$$

进行数值解，得出一端弧管非测地线缠绕时，弧管中心角$\beta_N^{\mathrm{I}}$，同样可得出另一端弧管非测地线缠绕时弧管中心角$\beta_N^{\mathrm{II}}$（见图7）这时有：

$$\begin{aligned}\beta_N&=\beta_N^{\mathrm{I}}+\beta_N^{\mathrm{II}}\\ \beta_G&=2\beta_s-\beta_N\end{aligned} \tag{15}$$

然后求出相应的$\Phi_N$、$\Phi_G$。

同理，也可求得

$$\begin{aligned}\beta'_N&=\beta_N^{\mathrm{I}\prime}+\beta_N^{\mathrm{II}\prime}\\ \beta'_G&=2\beta_s-\beta'_N\end{aligned} \tag{16}$$

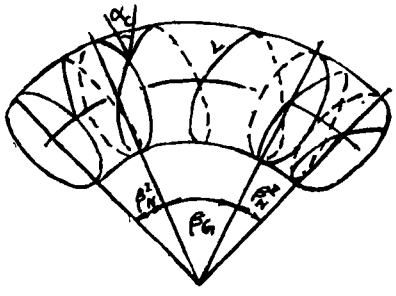

图 7

和相应的$\Phi'_N$、$\Phi'_G$。

若参数选取合适，可使$\beta_N^{\mathrm{I}}=\beta_N^{\mathrm{II}}$，$\beta_N^{\mathrm{I}\prime}=\beta_N^{\mathrm{II}\prime}$。

纤维缠绕弧管时，由于弧管各纬圆曲率半径不同而通过的纤维相等，缠出的弧管壁厚是变化的。为使弧管内、外测壁厚差不致过大，$n$应取较大的值。这时，(14)式可近似取为：

$$d\beta\approx-\frac{\sin\alpha\,d\alpha}{\mu n\cos^2\alpha}$$

两边积分并代入初始条件得：

$$\beta_h\approx\frac{1}{\mu n}\left(\frac{1}{\cos\alpha_c}-\frac{1}{\cos\alpha}\right) \tag{17}$$

回程时，$\alpha=0$回程段角度$\beta_h$为：

$$\beta_h\approx\frac{1}{\mu n}\left(\frac{1}{\cos\alpha_c}-1\right) \tag{18}$$

(18)式可用来近似估算回程段角度，以便选择$\beta_N^{\mathrm{I}}$，$\beta_N^{\mathrm{II}}$，$\beta_N^{\mathrm{I}\prime}$，$\beta_N^{\mathrm{II}\prime}$。

图8、图9分别给出了$n=4.34$，$2\beta_s=100°$，$X_P=100$毫米，纤维缠绕弧管，一条纤维来回时的$\alpha$、$\beta$、$\theta$、$\phi$关系和$Y_P-Z_P$关系。这条纤维初始时用测地线缠绕至离另一端$\beta_N^{\mathrm{II}}\approx30°$时，采用$\mu=0.2$进行非测地线缠绕，然后返回，各段情况为(数据见附录一和附录二)：

进程：　　$\beta_G=70.47°$，　$\Phi_G=337.25°$

回程：

$\beta_N^{\mathrm{I}}=30.28°$，　$\Phi_N=191.15°$

$\beta_N^{\mathrm{I}\prime}=13°$　　$\Phi'_{N\mathrm{I}}=209.16°$

$\beta'_G=59.085°$　$\Phi'_G=315.4°$

$\beta_N^{\mathrm{II}\prime}=28.085°$　$\Phi'_{N\mathrm{II}}=210.5°$

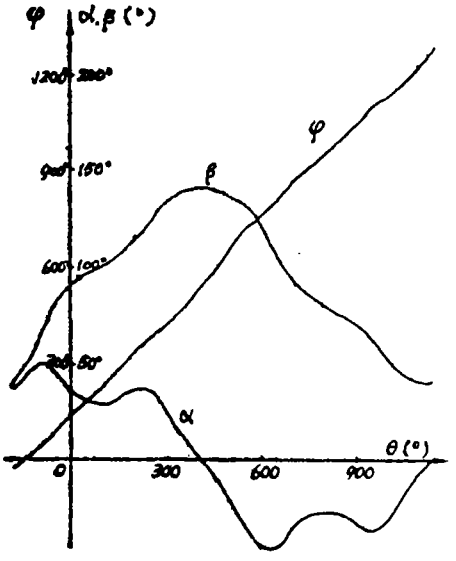


图 8

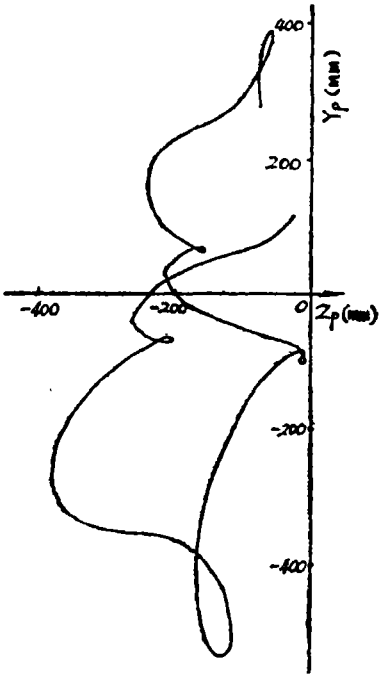


图 9

## 2. 芯模转角增量$\Delta\Phi$的计算

为了覆盖整个弧形管表面，絲嘴完成一个纏绕循环后，落纱点$M$必须偏离原起始点一个覆盖宽度。如图10所示，设纱片宽度$b_m$，则纱片在径向覆盖宽度$b$为：

$b=b_m/\sin\alpha$，

相应地：

$$\Delta\theta=\frac{b}{R_0}=\frac{b_m}{R_0\sin\alpha} \tag{19}$$

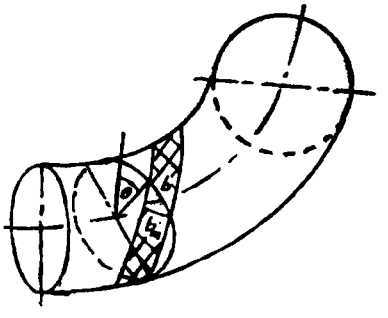


图 10

由前所述，各纬圆曲率半径不同而通过纤维量相同，我们以曲率半径最大的外侧为基准来讨论纤维覆盖问题，以该圆纤维布满为原则（这时，其它纬圆纤维有重迭现象）（19）式变为：

$$\Delta\theta=\frac{(n+1)b_m}{nR_0\sin\alpha_0} \tag{20}$$

然后，求出与（20）式相应的芯模转角$\Delta\Phi$。于是芯模在一个纏绕环循中总转角$\Phi_1$为

$$\Phi_1=\Phi\pm\Delta\Phi \tag{21}$$

式中±号系指落纱点偏离时，超前和滞后两种情况。

这样，重复上述程序，可使纤维纏满整个芯模。

**编者注：**附录一$\theta$、$\alpha$、$\beta$、$\phi$、关系，附录二$Y_P \sim Z_P$关系因版面限制未予排印，感兴趣的读者請与作者直接联系。

## 参 考 文 献


[1] G. Menges, and E.A.Hille, "GRP-Pipe Fittings Produced on a Computer Controlled Filament Winding Machine", 35th Annual Technical, Conference, SPI. (1980).

[2] 李先立，"环面上非測地线缠绕方程"，《复合材料学报》，1986年第3期.


# 从ICAS会议看先进复合材料的发展动向

筆者有幸随中国航空学会代表团参加1986年9月7日至12日在英国伦敦举行的第十五届国际航空科研理事会（*The International Council of the Aeronautical Science*—15）。*ICAS*是航空界最高水平的学术会議，每两年举行一次，討論航空科研領域內人們所关心的問題。

本届年会对先进复合材料的研究开发給予很大的重視。会議把先进复合材料列为五个中心議題之一，*ICAS*討論复合材料是从航空应用角度出发，围繞当前航空复合材料存在的問題而进行，这是与专业的复合材料国际会議的区别。会上报告的21篇复合材料論文（占全部报告的14%）涉及到航空复合材料用的基体树脂、复合材料的設計計算与基本性能、复合材料构件的制造技术以及修补工艺等。这里介紹若干文章的要点，以試图从一个側面描述先进复合材料的发展动向。

基体在复合材料中的作用已逐漸被人們所认識，正是基体的固定纤維的作用与传递应力的作用才使复合材料获得实际的应用；也由于目前基体的某些性能存在的不足而使复合材料的使用条件、使用載荷受到限制，影响了增強剂性能的充分发揮。因而开发新型树脂受到人們的重視。对树脂的基本要求是：应有較好耐湿热性、有較高的断裂韌性、在环境条件下有良好的性能稳定性，目前热固性树脂仍然是主要基体品种，即低交联密度的耐热环氧和改性的聚酰亚胺。与此同时热塑性树脂也有了新的发展，基于存放条件不受限制、成型周期短、易于修补与便于回收等特点有可能取代热固性树脂而成为先进复合材料的主要基体。最有希望的热塑性树脂是聚醚醚酮、聚醚砜和聚酰亚胺。在成型方法方面，大多数适用于热固性树脂的都可以延用：模压法、缠繞法、挤出法，只是在工艺参数与輔助材料选用上需要作新的調整。

在复合材料設計計算方面。复合材料的各向異性而导致的众多数目的工程常数給使用者带来了頗多麻煩与心理的負担，因此力求寻找一种簡易快速的計算方法，蔡为伦博士建立的簡便設計法受到与会者的欢迎。他編制的若干程序，可以在个人用計算机（如*IBM PC*和*Apple Macintosh*）上操作，能迅速地求解出复合材料的固化应力、湿热状态下的強度刚度降解、多載荷条件下的应力应变以及迭层板的第一拐点和最終破坏。

用先进复合材料制作飞机的机翼已有許多成熟的經驗，会上有三篇涉及复合材料机翼設計的报告，主要討論气动弹性剪裁設計、稳定性設計与試驗驗证。

复合材料构件的損伤預报与修补措施是人們所关心的。这是复合材料的缺陷分析、損伤

（下轉第91頁）

Experimental results show that the investigation method is suitable for FRP laminates with different lay-up, hole diameter and thickness. The designed fixtures according to the loaded manner can be freely chosen for better accuracy and convenience.

# KINEMATIC EQUATIONS OF FILAMENT WINDING ON A CURVED TUBE AND WINDING PATTERN DESIGN

*Li Xianli*

Centre for Composite Materials

Wuhan University of Technology, Wuhan, China

(Received March 3, 1986)

## ABSTRACT

Filament winding is one significant technological method for making high-strength composite materials and it can be widely employed for making rocket generators, tubes and pressure vessels etc. in various industrial field (e.g. spacecraft, aviation, building materials, chemical ). The moving regularity of winding curved tube on a computer controlled filament winding machine is discussed in this paper. A curved tube represents a section of a torus. If point P (Fig.2) shows a position of the filament control and point M is a corresponding payout yarn point on the products, the line MP is the tangent to the curve LM on the products at M, of which the tangents vectors is T. In consideration of geometric relations of the differential element on the curved tube and change of the coordinate axes, we obtain the kinematic equations of the filament control for geodesic winding and non-geodesic stable winding. The equations can be solved with the Runge-Kuttta method. The winding pattern design of the winding curved tube is analyzed and the base for winding curved tube (for example 45 pipe, 90 pipe, ···) on a computer controlled filament winding machine is discussed.