第4卷 第1期 复合材料学报 Vo. 4 No. 1
1987年3月 ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA March 1987

复合材料强度的统计分析

——Ⅰ.总体分布假设

万傳寅

(广州市，华南工学院数力系)

摘 要

适应复合材料视为并联结构的需要，本文提出了一个修正的韦布尔分布函数，用 χ^2 方法检验了它与复合材料强度数据拟合的正确性。建議采用这个函数及未修正的三参数韦布尔分布函数一道来描述复合材料的强度分布。

一、引 言

象石墨/环氧这一类先进复合材料，由于其重量轻、强度高，已被用作为航天、航空的结构材料。但是，由于组分性能和制造工艺方面的原因，复合材料的强度数据常常表现出很大的分散性。因此，为了更好地了解复合材料的强度性能，便于设计应用，用适当的统计分析方法来处理这类问题是很重要的。

在复合材料强度的统计分析中，首先碰到的一个问题是选用怎样的总体分布假设。

朱先生[1]用正态分布和两参数韦布尔分布来拟合由大量试验数据所画出的直方图表明，中强碳纤维和200E玻璃布的试样根数 n 经向断裂力 P_{f1} 用韦布尔分布拟合得好些，而200E玻璃布的纬向断裂力 P_{f2} 用正态分布拟合得好些，如图1。

但是，不可能对所有材料（不同组分和叠层的组合）都做这样大量的试验测定，而必须采取予先“假设”它服从某种分布的做法。目前，已有“预制”好的、适用于描述材料强度的分布函数主要有正态分布和韦布尔（$Weibull$）分布。

韦布尔分布函数可写为

$$F(x)=1-\exp\left\{-\left(\frac{x-A}{B}\right)^{C}\right\} \tag{1}$$

本文1986年10月21日收到

其中，A是位置参数，B为尺度参数，C为形状参数（或韦布尔斜率）。其密度函数如图2。

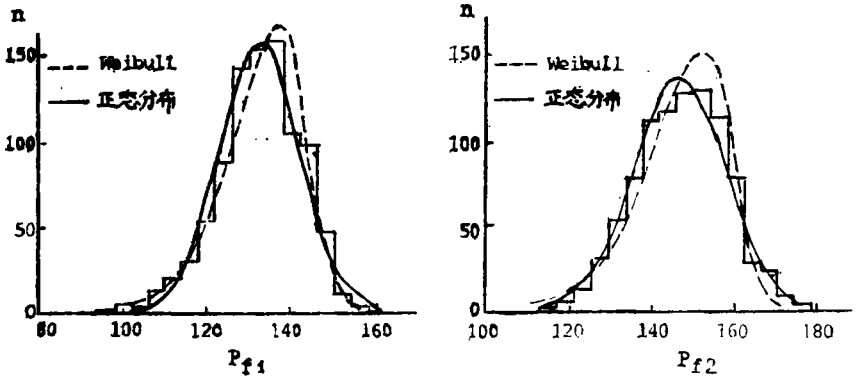
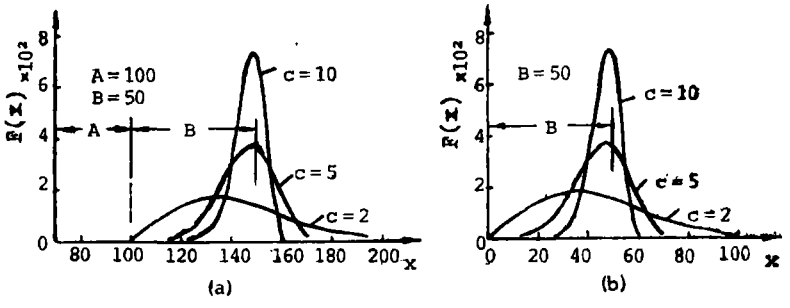


图1 200E玻璃布断裂力直方图



(a) 三参数　　(b) 两参数

图2 韦布尔分布密度函数

从发表的文献[2～4]来看，目前在复合材料强度的统计分析中，最常采用的是两参数韦布尔分布，即假设位置参数$A=0$。

然而，$Talreja$[5] 表明，假设位置参数为零会使尺度参数和形状参数变大，其误差随着位置参数的真实值而线性的增加。这情形看来是很自然的，因为从根本上说，任何一个非对称分布都应该最少用三个数字特征（即分布的形状、离散的程度和分布的绝对位置）来描述，而两参数韦布尔函数既假设位置参数为零，用它描述位置参数不为零的总体时，就不得不用改变形状和尺度参数来将就分布的绝对位置。而且，$Talreja$还表明：在相同样本容量的情况下，形状参数愈大，参数估计的有效性变坏。

看来，不能为了计算简便而不加详察地采取两参数分布。$C.\ Lipson\ \&\ N.J.\ Sheth$[6] 也认为：位置参数为零的假设主要应用于寿命现象，而不能应用于强度和磨损现象。

究竟采用哪种总体假设为宜，看来还是值得研究的。根据$Talreja$的工作可以予期，当总体假设选择适当时，可由相对小的样本容量而获得符合实际的分布描述，反之，如总体假设选择不太适当，则要增大样本容量，这意味着增加试验的工作量。

本文提出一个修正韦布尔分布，建议用它与未修正的三参数韦布尔分布一道来描述复合合材料的强度。

二、修正的韦布尔分布

正如$W.Weibull$[7]在提出著名的韦布尔分布函数时指出的，随机变量的分布函数并无任何理论的基础，唯一可行的方法是选择一个简单的函数，实际地试验它，直到再找不出一个更好的函数。

首先，$Weibull$从串联模型出发，将分布函数写为如下形式

$$F(x)=1-e^{-\varphi(x)} \tag{2}$$

然后按$\varphi(x)$须是正的非递减函数，并在A处为零的条件，取$\varphi(x)=[(x-A)/B]^C$，由此得到（1）式。

的确，（1）式的形式对符合串联模型的问题（任何环节中事件发生，则意味着整个链条中事件发生），带来了极大的方便，当然更由于其广泛的通用性，使韦布尔分布在广泛的工程领域得到了应用。

但是，在复合材料中亦存在许多符合并联模型的情况，例如，纤维与纤维、纤维与基体及叠层中各单层的并联等等。适应于这种情况，我们不妨取分布函数有如下形式，为了区别起见，记为$W(x)$

$$W(x)=\exp[-\psi(x)] \tag{3}$$

相应地取$\psi(x)=[(A-x)/B]^C$，于是得到如下修正的韦布尔分布函数

$$W(x)=\begin{cases}\exp\left\{-\left(\dfrac{A-x}{B}\right)^C\right\} & (x\leqslant A)\\ 1 & (x>A)\end{cases} \tag{4}$$

其密度函数如图3。

当然，这个分布函数是否合适，最终需看它与实验数据拟合的情况而定。

如果说（1）式在描述符合串联模型的问题中发挥了重大作用的话，那么，（4）式将在描述符合并联模型的場合发挥作用。因此，作者相信，用这两种形式的分布函数一道来描述复合材料的强度分布，将有最广的适用性。

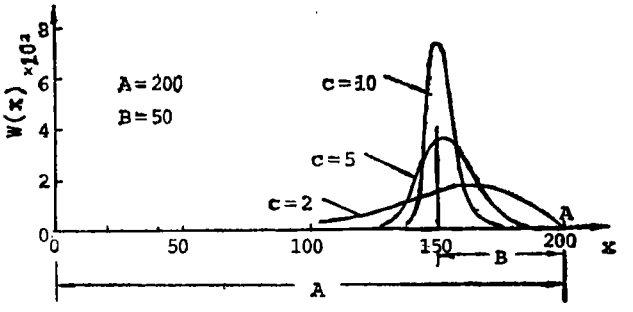


图3 修正的韦布尔分布密度函数

三、由实驗数据檢驗

我们取两组实验数据、用χ^2方法检验（4）式对于描述复合材料强度的适应性。为了比较，按1式的计算结果列在相应数值后面的方括号内。

1) 石墨/环氧单向板軸向拉伸強度[8] 表1给出频数的观察值和计算值。参数是用标准化变量法[5]估计的，假设服从$W(x)$[或$F(x)$]分布时的参数为$A=1886.60[588.14]$，

$B=479.40[941.02]$，$C=2.7[5.9]$。自由度$F_d=3$，由此求得 $x^2=2.91[3.07]$，给出 $p=$ $=0.42[0.39]$。

图 4 给出这种强度的$F(x)$和$W(x)$概率密度和累积概率曲线。

2) 石墨/环氧单层的轴向压缩强度[9] 假设服从$W(x)$[或$F(x)$]分布的参数为 $A=620.72[336.72]$，$B=160.32[156.29]$，$C=3.4[3.3]$，观察和计算的频数如表 2 所示。自由度$F_d=2$。由此算得$x^2=1.19[1.33]$，给出$p=0.56[0.52]$。

表 1

x (MPa)	观察值 n	期望值 n
1200	1	1.72[1.82]
1300	4	4.28[4.21]
1400	7	8.47[8.21]
1500	15	13.72[13.54]
1600	20	18.70[18.83]
1700	22	22.19[22.35]
1800	24	23.76[23.72]

表 2

x (MPa)	观察值 n	期望值 n
400	2	1.34[1.28]
440	7	5.79[5.85]
480	13	13.68[13.73]
520	20	21.16[21.21]
560	25	25.06[24.99]
600	26	25.97[25.90]

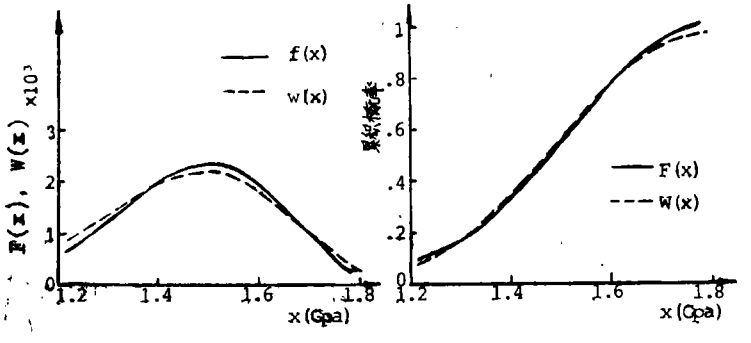


图4 石墨/环氧单向板轴向拉伸强度在两种分布假设下的分布密度和概率曲线

可见，对上述两例情况，无论采用$W(x)$或$F(x)$分布假设都是可行的，其中$W(x)$分布假设略为更好一些。修正或未修正韦布尔分布函数给出的概率和密度函数曲线很接近，它们的主要区别在数字形式。当然，对于作这种检验来说，上述例子的样本容量还不够大。因此，下面我们再通过随机样本作进一步考察。

四、由随机样本考察

为了考察采用不同的分布假设对于通过样本来估计参数会有怎样的影响，我们采取如下做法：从某种总体随机地产生一组随机样本，在不同的分布假设下估计每个样本的参数，然后对这一组参数进行分析。

表 3 给出一部分有代表性的结果。先看表 3 中的A组。这是十个容量为 20、来自总体$F(x;100,50,3)$、分别在分布假设$W(x)$和$F(x)$时估计的参数，从这十组参数的平均值与

表3 在不同分布假设下估计参数

分布假设	W(X;A,B,C)			F(X;A,B,C)		
参 数	A*	B*	C*	A*	B*	C*
由F(x;100,50,3) 产生的随机样本 (N=20)						
A—1	206.16	66.04	4.33	94.71	57.16	3.40
A—2	312.07	171.62	11.54	116.03	36.24	1.81
A—3	228.21	85.55	7.17	122.59	29.02	1.91
A—4	216.91	82.98	5.84	108.00	36.46	2.10
A—5	207.07	68.83	5.78	110.89	36.68	2.60
A—6	192.05	49.28	3.98	110.18	41.69	3.10
A—7	175.69	35.77	3.72	103.56	43.68	4.40
A—8	196.43	49.82	3.19	55.72	102.62	6.90
A—9	201.19	56.99	3.72	81.79	74.12	4.80
A—10	193.42	55.99	3.74	88.60	60.04	3.80
平 均	212.902	72.287	5.301	99.207	51.771	3.482
方 差	1273.28	1307.54	5.752	350.015	457.06	2.247
由W(x;200,50,3) 生产的随机样本 (N=20)						
B—1	195.92	50.40	3.15	39.01	118.59	7.90
B—2	207.77	56.00	4.43	111.74	49.39	3.60
B—3	197.25	42.58	2.76	53.12	112.67	7.90
B—4	194.54	44.47	2.74	15.63	146.23	10.00
B—5	208.76	56.89	3.46	55.19	109.39	6.90
B—6	213.33	60.68	4.01	97.44	66.85	4.30
B—7	188.01	41.84	2.99	77.00	79.35	5.90
B—8	235.53	90.14	5.68	110.49	47.18	2.50
B—9	210.20	62.70	4.51	103.78	54.61	3.60
B—10	204.56	52.30	2.57	-300.79*	467.87	27.00
平 均	205.587	55.800	3.630	36.261	125.200	7.960
方 差	158.765	197.132	0.910	13532	14056	45.328
由W(x;200,50,3) 产生的随机样本 (N=10)						
C—1	185.05	29.95	2.91	26.03	136.97	14.00
C—2	215.77	64.30	3.11	-17.44*	184.98	9.00
C—3	224.37	74.27	4.54	100.27	62.86	3.30
C—4	199.02	38.11	2.55	-325.90*	497.90	37.00
C—5	248.59	107.42	5.18	85.67	72.15	2.90
C—6	197.30	40.67	3.03	48.20	118.73	9.00
C—7	214.74	67.19	4.40	90.40	69.58	4.00
C—8	253.38	99.43	5.00	77.82	92.76	4.10
C—9	227.15	80.82	5.73	109.20	48.69	2.80
C—10	189.85	43.50	2.95	-57.75*	215.27	16.00
平 均	215.522	64.566	3.940	13.648	149.989	10.210
方 差	493.284	633.026	1.180	15453	16133	100.051

方差值可看出：当假设的分布与总体一致时（A组的右边）估计参数的平均值与真实值接近，方差值比较小，就是说，参数估计是正确、有效的。反之，当假设的分布与总体不符时（A组左边）所估计的参数非但与真实值不一致，而且离散得厉害，就是说，参数估计是无效的。

由B、C组样本可得同样结论。这两组样本都来自总体$W(x;200,50,3)$，但样本容量不同。先看左边，当分布假设与总体一致时，容量从20减少到10，参数估计值变化不太大；但是，如果分布假设与总体不一致（B、C组右边），即使容量从10增至20，方差值减小很少，因而参数估计仍然无效。

最后，我们比较A与B组。当分布假设与总体一致时（A组右边与B组左边），$W(x)$和$F(x)$假设均得到正确、有效的参数估计；但是，当假设与总体不符时（A组左边与B组右边），两种假设下导致参数的方差值差别甚大，$W(x)$假设导致更有效的参数估计。这个结果是出乎意外的，似乎没有理论依据。但最少已证实了如下事实：采用$W(x)$假设不会减低参数估计的有效性。

五、結　　論

在复合材料强度的统计分析中，选用怎样的总体分布假设是事关重要的。如果分布假设不适合，即使由较大量的试验数据也得不到符合实际的分布描述；反之，如果分布假设很适宜，则意味着可减少试验工作量。

本文提出了一个修正的韦布尔分布函数，用χ^2方法检验了它与实验数据拟合的正确性，用随机样本考察了估计参数的有效性。

如果说未修正的韦布尔分布函数在描述符合串联模型的问题中发挥了重大作用的话，那么，修正的韦布尔分布函数将在符合并联模型的場合起作用。因此，作者相信用修正和未修正的韦布尔分布函数一道来描述复合材料的强度分布，将有最广泛的适用性。

参 考 文 献

[1] 朱顾龄，复合材料概率结构设计，复合材料学报，第二卷，第一期，72页，1985.

[2] C.T. Sun and S.E.Yamada, "Strength Distribution of A Unidirectional Fiber Composite," J. Comp. Mater., Vol. 12, P. 169, 1978.

[3] S.E. Yamada and C.T.Sun, "Analysis of Laminate Strength and Its Distribution," J.Comp. Mater., Vol. 12, P.275, 1978.

[4] H. Fukunaga, T.W. Chou, P.W.M. Peters and K. Schulte, "Probabilistic Failure Strength Analyses of Graphite/Epoxy Cross-Ply Laminates," J.Comp. Mater., Vol. 18, P.339, 1984.

[5] R.Talreja, "Estimation of Weibull Parameters for Composite Material Strength and Fatigue Life Data," ASTM STP 723, P.291, 1981.

[6] C.Lipson and N.J.Sheth, Statistical Design and Analysis of Engineering Experiments, McGraw-Hill, New York P.42, (1973).

[7] W. Weibull, "A Statistical Distribution Function of Wide Applicability," J.Appl. Mech., Vol. 18, P.293, 1951.

[8] A.S.D.Wang, P.C. Chou and J. Alper, "Effects of Proof Test on the Strength and Fatigue Life of a Unidirectional Composite," ASTM STP 723, P.116, 1981.

[9] J.T.Ryder and E.D.Black, Composte Materials: Testing and Design, ASTM STP 617, P.107, 1977.