第4卷第2期　　复 合 材 料 学 报　　Vol.4 No.2
1987年6月　　ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA　　June 1987

复合材料层板层间应力的非线性有限元分析

叶　林　杨秉宪

（北京航空学院固体力学研究所）

摘　要

本文针对*Pipes-Pagano*模型建立了基于修正的*Hahn-Tsai*非线性本构关系的准三维非线性有限元模型。分析了由一种具有明显材料非线性的碳/环氧复合材料构成的[45/-45]$_s$角交层板和正交对称层板的层间应力分布。结果表明：和弹性模型结果相比，当承受相同载荷时，材料非线性的存在在一定程度上会引起层间剪应力的降低，但对层间正应力的影响并不明显。

一、引　　言

由于层间应力诱导的分层的产生和扩展会显著地降低复合材料层板的刚度、承载能力和寿命，复合材料层板自由边附近的层间应力问题在过去的十几年里受到了人们广泛的重视[1～3]。强烈的边缘层间应力和较低的层间粘结强度使得这个问题成为复合材料层板结构响应中一个很重要的问题。为了预测复合材料层板的破坏，必须对层间应力的机理有充分的认识。对于受轴向均匀拉伸复合材料对称层板的自由边界效应问题，已提出了各种数值方法和近似计算方法。但在这些模型中，大都采用了材料是线弹性的基本假设。而对于实际复合材料，剪切和垂直纤维方向的性能是基体控制的，其性能大都是非线性的。特别是剪切性能，在较低的剪应变下就出现了明显的非线性。

分析材料的非线性对层间应力分布的影响对于理解复合材料实际结构的破坏过程是十分有意义的。本文在此建立了基于修正的*Hahn-Tsai*非线性本构关系的准三维非线性有限元分析模型，用以分析复合材料层板的层间应力问题。

本文1986年4月收到

二、計算模型与基本方程

当前分析复合材料层板的自由边界效应通常采用 *Pipes-Pagano*[4]模型（图1），层板中的位移場可以表示为：

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_0+\mathbf{U} \tag{1}$$

$$\mathbf{u}^T=\{u,\ v,\ w\},\qquad \mathbf{u}_0^T=\{0,\ 0,\ \varepsilon_0 z\} \tag{2, a, b}$$

$$\mathbf{U}^T=\{U(x,\ y),\ V(x,\ y),\ W(x,\ y)\} \tag{2, c}$$

1. 有限元离散方程

根据有限元的基本理论，方程（2，c）中的未知位移函数U，V，W可以表示为：

$$\mathbf{U}=\mathbf{N}\varphi \tag{3}$$

其中φ是节点位移，而$\mathbf{N}$是位移函数矩阵。由于$\mathbf{N}$只是x和y的函数，与z无关，并且有$\varepsilon_z=\varepsilon_0$，因此几何方程可以写成：

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{B}\varphi \tag{4}$$

其中

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T=\{\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \gamma_{yz},\ \gamma_{xz},\ \gamma_{xy}\} \tag{5}$$

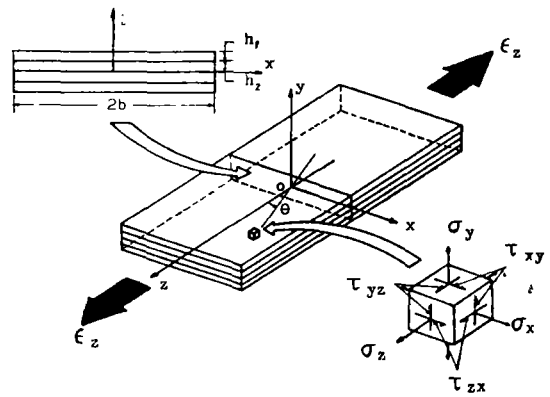

图1 *Pipes-Pagano*模型

$\mathbf{B}$矩阵有以下形式

$$B=[B_i, B_j,\ B_k,\ \cdots,\ B_l] \tag{6, a}$$

而

$$\mathbf{B}_i=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & \dfrac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \end{vmatrix} \tag{6, b}$$

对于一个承受均匀轴向应变$\varepsilon_z=\varepsilon_0$的单层板，应力应变关系可以写成简缩形式：

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}_0) \tag{7}$$

式中

$$\boldsymbol{\sigma}^T=\{\sigma_x,\ \sigma_y,\tau_{yz},\ \tau_{xz},\ \tau_{xy}\} \tag{8, a}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0^T=\{\varepsilon_{oi}\}=\{\varepsilon_{ox},\ \varepsilon_{oy},\ \gamma_{oyz},\ \gamma_{oxz},\ \gamma_{oxy}\} \qquad (8,\ b)$$

而

$$\varepsilon_{oi}=\frac{S_{i3}}{S_{33}}\varepsilon_0 \qquad (9)$$

$$\mathbf{C}=\mathbf{S}^{-1}=\{\overline{S}_{ij}\}_{5\times5} \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6) \qquad (10)$$

$\overline{S}_{ij}$是在结构坐标下对于一个单层板简约了的柔度矩阵

$$\overline{S}_{ij}=S_{ij}-S_{i3}S_{3j}/S_{33} \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6) \qquad (11)$$

而应力分量σ_z，有以下表达式：

$$\sigma_z=(\varepsilon_0-S_{3i}\sigma_i)/S_{33} \qquad (i=1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6) \qquad (12)$$

从方程（7）中可以看到，$\boldsymbol{\varepsilon}_0$ 可以类比为初应变，因此对于一个单元，总位能函数可以写成以下形式：

$$\pi_p=-\frac{1}{2}\iint_{Am}\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}dA-\iint_{Am}\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}_0dA$$

$$+\frac{1}{2}\iint_{Am}\boldsymbol{\varepsilon}_0^T\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}_0dA+\frac{1}{2}\iint_{Am}\frac{\varepsilon_0^2}{S_{33}}dA \qquad (13)$$

根据最小位能原理，就可以得到单元的刚度矩阵和等效结点力：

$$\mathbf{k}=\iint_{Am}\mathbf{B}^T\mathbf{C}\mathbf{B}dA \qquad (14)$$

$$\mathbf{f}=\iint_{Am}\mathbf{B}^T\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}_0dA \qquad (15)$$

对于与ε_0对应的轴向平均应力σ_0，可以表示为：

$$\sigma_0=\frac{1}{A}\iint_A\sigma_zdA \qquad (16)$$

其中A是整个剖面的面积。

2. 非线性本构关系

对于一般的碳/环氧复合材料，一般只有纤维方向的性能可以认为是线弹性的，因此本文将修正的二维*Hahn-Tsai*非线性弹性本构关系[5]推广到三维情况：

$$\varepsilon_i=S_{ij}\sigma_j \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ 6) \qquad (17)$$

$$\{S_{ij}\}=\begin{bmatrix}
\frac{1}{E_{11}}+S_{1111}\sigma_1^2 & -\frac{\gamma_{12}}{E_{22}} & -\frac{\gamma_{13}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0\\
 & \frac{1}{E_{22}}+S_{2222}\sigma_2^2 & -\frac{\gamma_{23}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0\\
 & & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0\\
 & \text{对称} & & \frac{1}{G_{23}}+S_{3333}\tau_{23}^2 & 0 & 0\\
 & & & & \frac{1}{G_{31}}+S_{5555}\tau_{13}^2 & 0\\
 & & & & & \frac{1}{G_{12}}+S_{6666}\tau_{12}^2
\end{bmatrix} \qquad (18)$$

其中1，2，3分别表示横向、厚度方向和纤维方向。

3. 迭代方法

由于应力应变关系出现了非线性，由（14）（15）式可知，由有限元法最终得到的是一个非线性代数方程组：

$$\mathbf{K}(\varphi)\varphi - \mathbf{F}(\varphi)=0 \tag{19}$$

令

$$\Psi(\varphi)=\mathbf{K}(\varphi)\varphi - \mathbf{F}(\varphi) \tag{20}$$

设φ_n是第n次迭代值，一般有：

$$\Psi(\varphi_n)\neq 0 \tag{21}$$

设第$n+1$次迭代值φ_{n+1}满足平衡方程，即

$$\varphi_{n+1}=\varphi_n+\Delta\varphi_n \tag{22}$$

$$\Psi(\varphi_n+\Delta\varphi_n)=0 \tag{23}$$

将Ψ在φ_n附近做一阶展开，有

$$\Psi(\varphi_n)+\nabla\Psi(\varphi_n)\Delta\varphi_n=0 \tag{24}$$

$$\nabla\Psi(\varphi_0)=\mathbf{K}(\varphi_n)+\nabla\mathbf{K}(\varphi_n)\varphi_n+\nabla\mathbf{F}(\varphi_n) \tag{25}$$

在实际计算中，由于$\nabla\mathbf{K}(\varphi_n)$和$\nabla\mathbf{F}(\varphi_n)$的计算相当困难，因此后两项略去不计，即

$$\nabla\Psi(\varphi_n)=\mathbf{K}(\varphi_n) \tag{26}$$

这样每次迭代只需取第一次的值$\mathbf{K}(\varphi_0)$，即按线弹性模型计算的刚度矩阵，此时收敛速度有所降低。最终迭代方程为：

$$\mathbf{K}(\varphi_0)\Delta\varphi_n=-\Psi(\varphi_n) \tag{27}$$

$$\Psi(\varphi_n)=\iint \mathbf{B}^T\mathbf{C}\varepsilon dA-\iint \mathbf{B}^T\mathbf{C}\varepsilon_0 dA \tag{28}$$

$$\varphi_{n+1}=\varphi_n+\Delta\varphi_n$$

当$\dfrac{\|\varphi_{n+1}\|-\|\varphi_n\|}{\|\varphi_n\|}\leqslant Tol$时，即认为计算收敛。

三、材料性能与有限元离散化

本文分析了受均匀轴向拉伸的$[45/-45]_S$和正交对称复合材料层板，层板的几何形状、坐标及载荷状况如图1所示。几何参数取以下形式：$b=20.32\text{cm}$；$h_1=h_2=h=2.54\text{cm}$

对于材料性能，选取了$T300/634\text{-}DDS$[6]材料体系的性能，通过对实验数据的最小二乘曲线拟合（图2）确定了以下参数：

$$E_{11}=E_{22}=7.68(GPa)\qquad E_{33}=136.8(GPa)$$

$$G_{12}=G_{13}=G_{32}=4.03(GPa)$$

$$\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{32}=0.34$$

$$S_{1111}=S_{2222}=0.656(GPa)^{-3}$$

$$S_{4444}=S_{5555}=S_{6666}=112(GPa)^{-3}$$

根据所选取的坐标，由层板的几何参数和材料的对称性，计算时只需要取其横剖面的

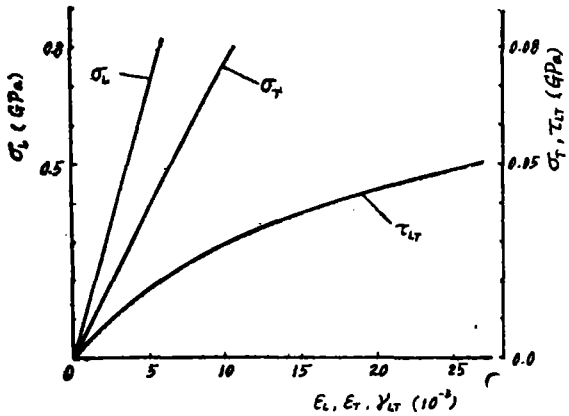

图2 $T300/634$-DDS单向板的材料性能

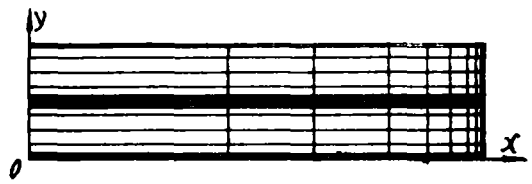

图3 有限元网格划分

1/4 部分。为了获得具有较好精度的位移应力分布值，采用了八节点等参元。单元网格划分如图 3 所示。自由边附近单元最小一维尺度为 $\frac{1}{320}b$。

对于轴向应变，在计算中取$\varepsilon_0=10^{-2}$，迭代收敛参数$Tol=10^{-4}$。对于所分析的三种层板只迭代了一次就已收敛。

四、計算結果分析

为了分析材料非线性性能对层间应力分布的影响，本文同时分析了弹性模型（系数矩阵(18)式中的非线性部分都为零）。并对应力进行了规范化（即$\sigma^*_{ij}=\sigma_{ij}/\sigma_0$），这样就可以比较承受相同载荷（按非线性模型计算的结果）时的应力分布。由于有限元法中应力自由边界条件只是在加权积分下得到满足，因此在紧靠自由边的一、两个单元上应力分布值是不精确的[7]，因而本文将只讨论离开边缘一个单元以外区域的应力分布。

1. [45/-45]$_s$角交层板

在本文给定的ε_0下，非线性模型的平均应力σ_{0n}与弹性模型的平均应力σ_{0e}相差很大，$\sigma_{0n}/\sigma_{0e}=0.59$这表明考虑材料非线性后，整个层板的刚度比弹性模型约降低了41%，可见非线性性能对层板刚度的影响是十分显著的。

图 4 中绘出了两个模型的轴向应力 σ_z 沿层间界面（$y=h^+$）的分布，σ_z 并不是均匀分布的，在自由边附近有明显的应力集中现象。在承受相同的载荷下，两种模型的结果的差别比较明显。考虑材料非线性以后，在自由边附近，σ_z 的应力集中更加严重，在远离自由边处，σ_z比弹性模型结果略为偏低。

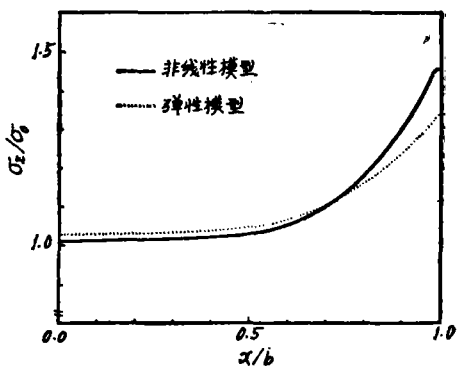

图4 [45/-45]$_s$层板中轴向应力沿层间界面($y=h^+$)的分布

图 5 是层间正应力σ_y沿界面（$y=h^+$)的分

布。对于受拉伸[45/-45]$_s$层板，在靠近自由边附近，呈σ_y压应力。考虑材料非线性以后，σ_y的分布值（绝对值）比相应的弹性模型解略微偏大，但在作图精度中基本上已不能区分差别。图6是层间剪应力τ_{yz}在自由边附近($x/b=0.997$)沿厚度方向的分布。τ_{yz}是引起层间剪切破坏的一个重要因素。考虑材料非线性以后，在层间界面处，仍有十分显著的应力集中现象，但它的分布值比弹性模型解要低一些，其它性质与弹性模型解没有明显差别。

图7是层板横剖面上表面的纵向位移分布，它反映了横剖面变形以后的翘曲程度。可以看到在承受相同的载荷下，考虑材料非线性的剖面翘曲程度比弹性模型解明显增大。这也说明采用弹性模型会过高地确定剖面刚度。

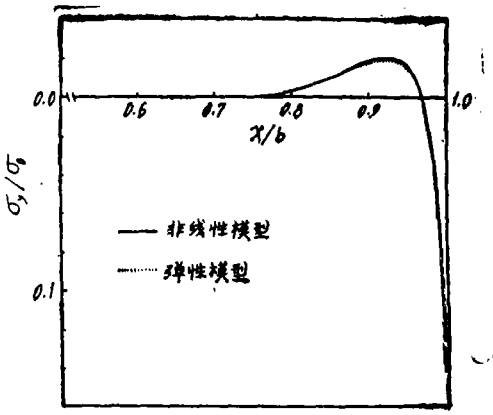

图5 [45/-45]$_s$层板中层间正应力σ_y沿层间界面($y=h$)的分布

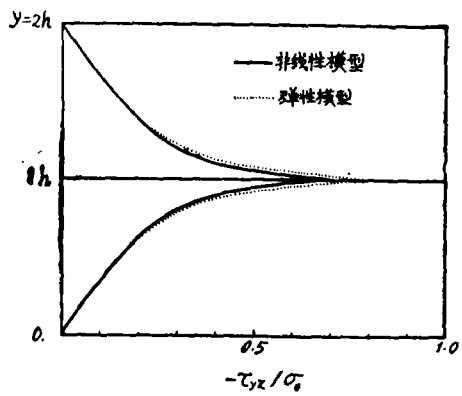

图6 [45/-45]$_s$层板中层间剪应力τ_{yz}在自由边附近($x/b=0.997$)沿厚度方向的分布

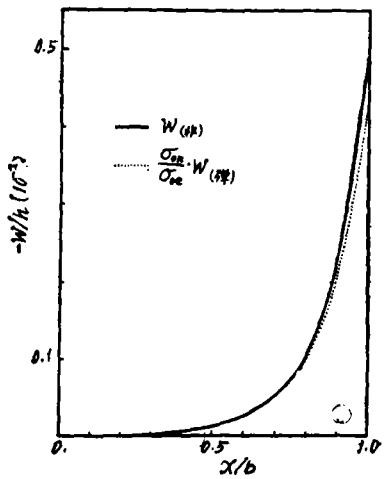

图7 [45/-45]$_s$层板横剖面上表面($y=2h$)纵向位移W的分布

2. 正交对称层板

对于[0/90]$_s$层板和[90/0]$_s$层板，非线性模型的平均应力与弹性模型的平均应力相差不明显。σ_{0n}/σ_{0e}都约为0.9986。这说明，对于正交对称层板，材料非线性对层板刚度的影响并不明显，可以按弹性模型进行计算。

图8是[0/90]$_s$和[90/0]$_s$层板中层间正应力σ_y沿层间界面($y=h^+$)的分布。对于[0/90]$_s$层板，在自由边附近，σ_y呈拉应力，并且其值上升的很快，应力集中十分严重。对于[90/0]$_s$层板，σ_y在紧靠自由边处呈拉应力，但很快变为压应力。图9是[0/90]$_s$和[90/0]$_s$层板中

层间正应力σ_y沿中面（$y=0$）的分布。对于$[0/90]_s$层板，在自由边附近σ_y呈拉应力，而对于$[90/0]_s$层板，σ_y呈压应力。但两个层板中的σ_y并不成映像关系。图10是$[0/90]_s$层板中σ_y在自由边附近（$x/b=0.997$）沿厚度方向的分布。最大σ_y并不发生在中面处，而在层间界面（$x=h$）的下方。其分布特点与弹性模型解有相同的特征。在以上三图中，考虑材料非线性以后，σ_y的分布值（绝对值比相应的弹性解略微偏小。但在作图精度中已无法区分差别。

图11是层间剪应力τ_{xz}沿层间界面（$x=h$）的分布。对于$[0/90]_s$层板，τ_{xy}呈负，而对于$[90/0]_s$层板，τ_{xy}呈正。从图中可以看到，考虑材料非线性以后，τ_{xy}的分布值比弹性模型解略小。

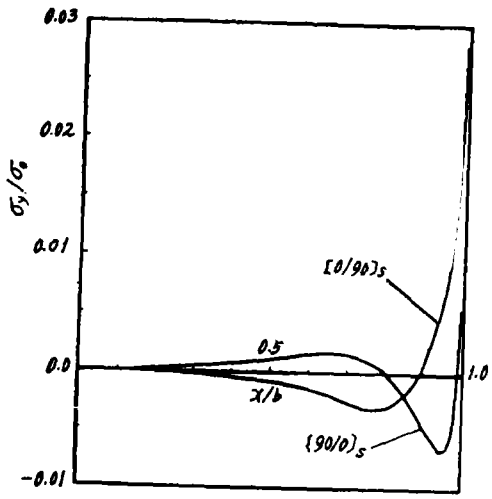

图8 正交对称层板中层间应力σ_y沿层间界面($y=h$)的分布

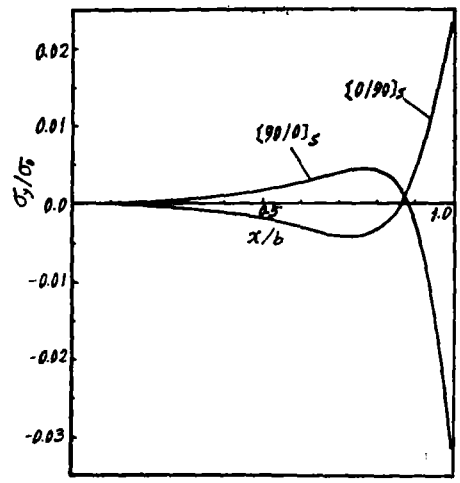

图9 正交对称层板中层间正应力σ_y沿中面（$y=0$）的分布

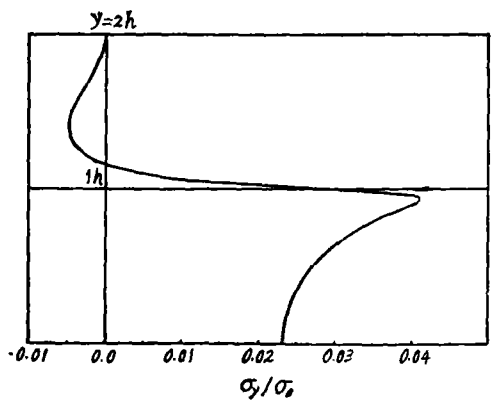

图10 $[0/90]_s$层板中层间正应力σ_y在自由边附近（$x/b=0.997$）沿厚度方向的分布

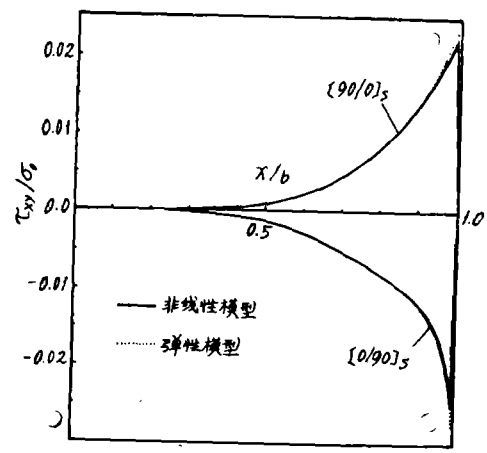

图11 正交对称层板中层间剪应力τ_{xy}沿层间界面（$y=h$）的分布

五、結　　論

本文采用准三维非线性有限元方法分析了角交[45/-45]$_s$和正交对称层板的自由边界效应问题。计算结果表明：材料非线性会使[45/-45]$_s$角交层板的结构刚度显著降低，但对正交对称层板的结构刚度影响并不明显。考虑材料非线性以后，层间应力的分布特点在许多方面与弹性模型解有相同的特征。在自由边附近的层间界面上，层间应力有显著的应力集中。与弹性模型解相比，材料非线性的存在在一定程度上会使层间剪应力的应力集中程度降低，但对层间正应力的影响并不十分明显。本文的分析结果有助于更好地理解复合材料层板的层间应力分布。

参 考 文 献

[1] A.S.D.Wang and F.W.Crossman, J.Composite Materials, Vol.11, pp. 92-106, 1977.

[2] N.J.Pagano and S.R.Soni, Int. J.Solids and Stnctures, Vol.19, pP. 207-228, 1983.

[3] S.S.Wang and I.Choi, J.Appl.Mech., Vol.49. pp. 541-560, 1982.

[4] R.B.Pipes and N.J.Pagano, J.Composite Materials, Vol.4, pp.538-548, 1970.

[5] 夏源明、杨报昌、徐楨，单向纤维增强塑料板的非线性本构关系，黄山复合材料性能会议，1985.10.

[6] 白淑贞 宋丰收，基体对复合材料性能及破坏特征的影响，航空工程(航空学报增刊)，No.2 pp.45-49，1985.

[7] J.D.Whitcomb, I.S.Raju and J.G.Goree, Computers and Structures, Vol.15, pp. 23-37, 1982.

新书介绍：《复合材料力学及结构力学》

《复合材料力学及結构力学》是西安交通大学工程力学系蒋咏秋教授根据近年来在美、英、西德、日等国和香港地区从事教学、科研和参加国际学术会議的研究成果和經驗而編成的。

全书共十章。第一部分（第一章～第六章）偏重于基础理論的复合材料力学性能。主要包括：复合材料的本构方程、刚度及強度的預測和湿热效应。

第二部分（第七章～第十章）的內容偏重于实际应用，論述与結构設計密切相关的复合材料結构力学，具体章节如下：

第七章：层合板壳的弯曲、屈曲与振动及有限元分析。

第八章：层合結构的优化設計。

第九章：复合材料层合結构的損伤、疲劳和寿命估算。

第十章：复合材料薄膜結构分析。

本书各章的重要公式都作了詳細的推导，且附有习題、有关材料性能的各种附表及参考文献。书中內容反映了当前国外最新的科研成果及发展动向。因此，本书既可作为从事材料、建筑結构、化工、航空、航天等科技工作的有关人員参考用书，亦可供高等学院校机械、土建、化工、材料、力学、航空、宇航、造船、及能源等专业高年級及研究生选修課或必修課的教学参考书。

該书由成都科学技术大学出版社出版，約23万字。

NONLINEAR FINITE ELEMENT ANALYSIS OF INTERLAMINAR STESSES IN COMPOSITE LAMINATES

Ye Lin and Yang Bingxian

Department of Flight Vehicle Design and Applied Mechanics
Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics, Beijing, China

(Received April 1986)

ABSTRACT

In order to predict and suppress delamination in composite laminates, a comprehensive knowledge about the mechanism of interlaminar stresses in composite laminates is necessary. In the present paper, a nonlinear quasi-three-dimensional finite element procedure is presented, in which a modified Hahn-Tsai nonliner constitutive equation is used. The results for an angle-ply $[\pm 45]_s$ and symmetric cross-ply laminates are presented. The lamina properties in the laminates have obvious nonlinearity in shear deformation and a little in transverse tension. Emphasis is placed on assessing the stress behavior in the regions close to ply-interface and exposed free edge. Compared with elastic results, the solutions indicate that material nonlinearities can cause the decrease in interlaminar shear stresses to a certain degree, but they have little effect on the distributions of interlaminar normal stress.

PHYSICALLY NONLINEAR BUCKLING OF UNSYMMETRIC ANGLE-PLY RECTANGULAR PLATES UNDER VARIOUS SUPPORT CONDITIONS

Wu Daihua, Li Zhuoqiu and Shen Darong

Department of Mathematics and Mechanics
Wuhan University of Technology, Wuhan, China

(Received October 4, 1986)

ABSTRACT

Assuming an unsymmetric angle-ply rectangular plate subjected the inplane uniaxial compression, we can get the basic buckling equations as following

$$L_i(\delta u,\ \delta v,\ \delta w)=0 \qquad i=1,\ 2,\ 3 \tag{1}$$