第7卷 第3期 复 合 材 料 学 报 Vol.7 No.3
1990年 9月 ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA September 1990

复合材料板壳结构的杂交/混合有限元分析

洪志泉 张国安

国防科技大学

摘要：本文建立了一个9节点Lagrange退化壳杂交/混合有限元模型，以用于复合材料板壳结构的有限元分析。该有限元模型基于修正的Hellinger—Reissner原理，位移和应力均采用分离法思想，使得这一单元不仅具有下列优点：1.位移和应力计算精度都比较高；2.消除了多余零能变形模式；3.具有厚薄通用性；4.具有几何不变性，并且较之一般杂交／混合单元计算工作量进一步降低。单元还考虑了横向剪切影响。计算实例表明，本单元关于复合材料浅壳和深壳的解都与参考解吻合很好，且收敛很快。

一、引 言

位移有限元方法中，Kirchhoff假定下的板壳元素只能适用于很薄的高模量迭层板壳和较薄的低模量板壳[1]。对其它迭层板壳，由于横向剪切影响较为显著，需要引入Mindlin假定。但是，Mindlin板壳元素应用于薄的复合材料结构将发生闭锁。Owen等[2]用退化积分、Reddy[3]用惩罚系数方法克服了Mindlin板壳元素的闭锁问题。但后者具有随机性，前者则会带来多余零能模式[4]。

Pian[6]的假定应力杂交有限元模型可以克服上述困难。比如，Spilker[8]构造了既不闭锁又没有多余零能模式的复合材料迭层板杂交元素。然而，这一有限元模型要求应力场严格满足平衡方程，难以推广应用于壳结构。

新的杂交/混合有限模型[7]放松了平衡方程，因而更为灵活和方便。业已构造了一些简单问题的杂交/混合有限元模型[8][9]和复合材料板的杂交/混合有限元模型[10]。但迄今为止，复合材料壳结构的杂交/混合有限元模型还不多见。

本文将构造一个9节点Lagrange退化壳杂交/混合元素，它可以应用于一定厚度范围的任意几何形状复合材料壳结构的有限元分析。

本文1988年11月收到，1989年3月收到修改稿

二、有限元列式

为避免元素刚度矩阵公式因复合材料板壳结构的耦合作用而变得过于复杂，本文采用Lee和Pian〔11〕引入的修正Hellinger—Reissner原理。

在壳的局部块标系中，假定应变

$$\underset{\sim}{\underset{\sim}{D}}\,U=\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{\varepsilon}+\zeta\underset{\sim}{K}\\ \underset{\sim}{\gamma}\end{Bmatrix} \tag{1}$$

其中，ζ是厚度方向的参数座标，下标（～）是矩阵记号，$\underset{\sim}{\varepsilon}$、$\underset{\sim}{K}$、$\underset{\sim}{\gamma}$、分别是面内、弯曲和横向剪切应变。

相应地，对应力

$$\underset{\sim}{\sigma}=\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{\sigma_P}+\zeta\underset{\sim}{\sigma_b}\\ \underset{\sim}{\sigma_S}\end{Bmatrix} \tag{2}$$

对于一个复合材料壳杂交/混合元素，修正的Hellinger-Reissner泛函

$$\Pi_{R_e}=U_e-W_0 \tag{3}$$

取驻值。其中W_0为外力功，而变形能

$$Ue=U_\alpha+U_K+U_C+U\gamma \tag{3a}$$

其中$U_\alpha=\int_{Ve}\left(\underset{\sim}{\sigma_P}^T\underset{\sim}{\varepsilon}-\frac{1}{2}\underset{\sim}{\sigma_P}^T\underset{\sim}{S_1}\underset{\sim}{\sigma_P}\right)dv$为面内变形能，$U_K=\frac{1}{2}\int_{Ve}\zeta^2\underset{\sim}{\kappa}^T\underset{\sim}{C_1}\underset{\sim}{\kappa}dv$为弯曲变形

$Uc=\frac{1}{2}\int_{v_e}\zeta(\underset{\sim}{\kappa}^T\underset{\sim}{C_1}\underset{\sim}{\varepsilon}+\underset{\sim}{\varepsilon}^T\underset{\sim}{C_1}\underset{\sim}{\kappa})dv$为耦合变形能，$U\gamma=\int_{v_e}(\underset{\sim}{\sigma_S}^T\underset{\sim}{\gamma}-\frac{1}{2}\underset{\sim}{\sigma_S}^T\underset{\sim}{S_2}\underset{\sim}{\sigma_S})dv$ 为横向剪切变形能。ve代表元素体积，$\underset{\sim}{C_1}$、$\underset{\sim}{C_2}$分别为面内刚度矩阵和横向剪切刚度矩阵，它们分别与$\underset{\sim}{S_1}$、$\underset{\sim}{S_2}$互逆。

把应力场分为低阶与高阶部分

$$\underset{\sim}{\sigma_P}=\underset{\sim}{\sigma_{PL}}+\underset{\sim}{\sigma_{PH}} \tag{4}$$

$$\underset{\sim}{\sigma_S}=\underset{\sim}{\sigma_{SL}}+\underset{\sim}{\sigma_{SH}} \tag{5}$$

把（4）和（5）代入（3）得

$$\Pi_{R_e}=\int_{v_e}(\underset{\sim}{\sigma_{PL}}^T\underset{\sim}{\varepsilon}-\frac{1}{2}\underset{\sim}{\sigma_{PL}}^T\underset{\sim}{S_1}\underset{\sim}{\sigma_{PL}})dv-\int_{v_e}\underset{\sim}{\sigma_{PL}}^T\underset{\sim}{S_1}\underset{\sim}{\sigma_{PH}}dv+\int_{v_e}(\underset{\sim}{\sigma_{PH}}^T\underset{\sim}{\varepsilon}-\frac{1}{2}\underset{\sim}{\sigma_{PH}}^T\underset{\sim}{S_1}\underset{\sim}{\sigma_{PH}})dv$$

$$+\frac{1}{2}\int_{v_e}\zeta^2\underset{\sim}{K}^T\underset{\sim}{C_1}\underset{\sim}{K}dv+\frac{1}{2}\int_{v_e}\zeta(\underset{\sim}{K}^T\underset{\sim}{C_1}\underset{\sim}{\varepsilon}+\underset{\sim}{\varepsilon}^T\underset{\sim}{C_1}\underset{\sim}{K})dv+\int_{v_e}(\underset{\sim}{\sigma_{SL}}^T\underset{\sim}{\gamma}-\frac{1}{2}\underset{\sim}{\sigma_{SL}}^T\underset{\sim}{S_2}\underset{\sim}{\sigma_{SL}})dv-$$

$$\int_{v_e}\underset{\sim}{\sigma_{SL}}^T\underset{\sim}{S_2}\underset{\sim}{\sigma_{SH}}dv+\int_{v_e}(\underset{\sim}{\sigma_{SH}}^T\underset{\sim}{\gamma}-\frac{1}{2}\underset{\sim}{\sigma_{SH}}^T\underset{\sim}{S_2}\underset{\sim}{\sigma_{SH}})dv-W_0 \tag{6}$$

（6）式的诸积分项中，与$\underset{\sim}{\sigma_{PL}}$、$\underset{\sim}{\sigma_{SL}}$有关的各项用低阶Gauss积分，记为“$\int_L$”，其余项

用高阶Gauss积分，记为“$\int_H$”，于是(6)式变为

$$\Pi_{R_e}=\int_L(\sigma_{PL}^T\varepsilon-\frac{1}{2}\sigma_{PL}^TS_1\sigma_{PL})dv-\int_L\sigma_{PH}^TS_1\sigma_{PL}dv+\int_H(\sigma_{PH}^T\varepsilon-\frac{1}{2}\sigma_{PH}^TS_1\sigma_{PH})dv+\frac{1}{2}\int_L\zeta^2\bar{K}^TC_1\bar{K}dv+\frac{1}{2}\int_L\zeta(\bar{K}^TC_1\varepsilon+\varepsilon^TC_1\bar{K})dv+\int_L(\sigma_{SL}^T\gamma-\frac{1}{2}\sigma_{SL}^TS_2\sigma_{SL})dv-\int_L\sigma_{SHT}S_2\sigma_{SL}dv+\int_H(\sigma_{SH}^T\gamma-\frac{1}{2}\sigma_{SH}^TS_2\sigma_{SH})dv-\bar{W}_0 \tag{7}$$

低阶应力场是这样给出的

$$\sigma_{PL}=C_1\sum_{i=1}^{n_L}N_i(\xi,\eta)\varepsilon_i,\ \sigma_{SL}=C_2\sum_{i=1}^{n_L}N_i(\xi,\eta)\gamma_i \tag{8}$$

其中，ξ、η是面内参数坐标，ε_i、γ_i是（1）式的应变在低阶Gauss和分点的值。n_L是低阶Gauss积分点数。插值函数$N_i(\xi,\eta)$在第i个低阶高斯积分点为1，在其它低阶高斯积分点为零。

高阶应力场用应力参数表示

$$\sigma_{PH}=P_e\alpha,\qquad \sigma_{SH}=P_S\cdot\beta \tag{9}$$

（1）的应变可以象位移有限元方法那样用节点自由度表示

$$\varepsilon=Be\ q,\qquad \bar{K}=B_Kq,\qquad \gamma=B_Sq \tag{10}$$

这样，（7）式变为

$$\Pi_{R_e}=\frac{1}{2}\int_L\varepsilon^TC_1\varepsilon dv-\int_L\sigma_{PH}^T\varepsilon dv+\int_H\sigma_{PH}^T\varepsilon-\frac{1}{2}\sigma_{PH})^TS_1\sigma_{PH}dv+\frac{1}{2}\int_L\zeta^2\bar{K}^TC_1\bar{K}dv+\frac{1}{2}\int_L\zeta(\bar{K}^TC_1\varepsilon+\varepsilon^TC_1\bar{K})dv+\frac{1}{2}\int_L\gamma^TC_2\gamma dv-\int_L\sigma_{SH}^T\gamma dv+\int_H(\sigma_{SH}^T\gamma-\sigma_{SH}^TS_2\sigma_{SH})dv-\bar{W}_0 \tag{11}$$

或 $$\Pi_{R_e}=\frac{1}{2}q^TK_Pq+\alpha^TGeq-\frac{1}{2}\alpha^THe\alpha+\frac{1}{2}q^TK_Bq+\frac{1}{2}q^TK_Sq+\frac{1}{2}q^T(D_C+D_C^T)q+\beta^TG\gamma q-\frac{1}{2}\beta^TH\gamma\beta-\bar{W}_0 \tag{12}$$

其中$K_P=\int_LB_e^TC_1Bedv$, $Ge=\int_HPe^TBedv-\int_LPe^TBedv$, $He=\int_HPe^TS_1Pedv$, $K_B=\int_L\zeta^2B_K^TC_1B_Kdv$, $D_C=\int_L\zeta B_K^TC_1Bedv$, $Ks=\int_LBs^TC_2Bsdv$, $G\gamma=\int_HPs^TBsdv\int_LPs^TBsdv$, $H\gamma=\int_HPs^TS_2Psdv$

泛函取驻值　$\delta\Pi_{R_e}=0$ (13)

(12)式对β、α求变分，可得

$$Geq-He\alpha=0,\ G\gamma q-H\gamma\beta=0 \tag{14}$$

是于 $$\alpha=He^{-1}Geq,\ \beta=H\gamma^{-1}G\gamma q \tag{15}$$

把（15）式代回（12）式，最后可得元素刚度矩阵

$$\underset{\sim}{k^*}=\underset{\sim}{Kp}+\underset{\sim}{K_B}+\underset{\sim}{K_S}+\underset{\sim}{Ge}^T\underset{\sim}{He}^{-1}\underset{\sim}{Ge}+\underset{\sim}{G\gamma}^T\underset{\sim}{H\gamma}^{-1}\underset{\sim}{G\gamma}+\underset{\sim}{Dc}+\underset{\sim}{Dc}^T \tag{16}$$

泛函为 $\Pi_{Re}=\frac{1}{2}\underset{\sim}{q}^T\underset{\sim}{k^*}\underset{\sim}{q}-\overline{W}_0$

三、元素构造

1.几何形状

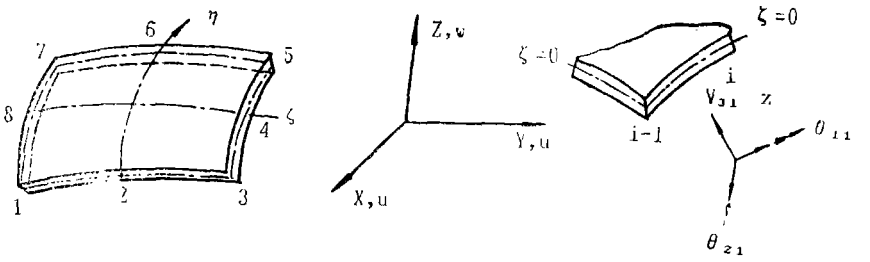


图1

如图(1a)，在总体坐标系中，元素几何

$$\begin{Bmatrix}X\\Y\\Z\end{Bmatrix}=\sum_{i=1}^{9}Ni(\xi,\eta)\left(\begin{Bmatrix}Xi\\Yi\\Zi\end{Bmatrix}+\frac{\xi ti}{2}\vec{V}_{3i}\right) \tag{17}$$

其中，Xi、Yi、Zi是节点i的总体坐标，ξ、η、ζ是与X、Y、Z对应的参数坐标，t_i是节点i处的壳厚，$\vec{V}_{3i}$是节点i处的壳中面单位法向矢量。Ni(ξ,η)是2维9节点Lagrange插值函数，且

$$Ni(\xi,\eta)=\begin{cases}\frac{1}{4}(\xi^2+\xi i\xi)(\eta^2+\eta_i\eta), & i=1,3,5,7\\ \frac{1}{2}(\xi^2+\xi i\xi)(1-\eta^2)\xi_i^2+\frac{1}{2}(\eta^2+\eta_i\eta)(1-\xi^2)\eta_i^2, & i=2,4,6,8\\ (1-\xi^2)(1-\eta^2), & i=9\end{cases}$$

元素节点序号见图(1a)。

2.位移场

如图(1b)，总体坐标系中位移

$$\begin{Bmatrix}U\\V\\W\end{Bmatrix}=\sum_{i=1}^{9}Ni(\xi,\eta)\left(\begin{Bmatrix}Ui\\Vi\\Wi\end{Bmatrix}+\frac{\xi t_i}{2}\left[\vec{V}_{1i}\ -\vec{V}_{2i}\right]\cdot\begin{Bmatrix}\theta_{1i}\\\theta_{2i}\end{Bmatrix}\right) \tag{18}$$

其中，Ui、Vi、Wi是节点i的总体位移，$\vec{V}_{1i}$、$\vec{V}_{2i}$是节点i的局部坐标系基矢量，θ_{1i}和θ_{2i}分别是变形后$\vec{V}_{3i}$关于$\vec{V}_{2i}$和$\vec{V}_{1i}$的转角。

根据(18)式，一个节点有5个自由度

$$\underset{\sim}{\delta i}=\{Ui\ Vi\ Wi\ \theta 1i\ \theta 2i\}^T \tag{19}$$

因此，一个9节点Lagrange退化壳元素有45个自由度

$$\underset{\sim}{q}=\{\underset{\sim}{\delta}_1\ \underset{\sim}{\delta}_2\cdots\cdots\underset{\sim}{\delta}_9\}^T \tag{20}$$

3.应变

在总体坐标系下　$\underset{\sim}{\bar{E}}^G=\{Ex\ Ey\ Ez\ Exy\ Eyz\ Ezx\}^T$　(21)

转换到局部坐标系中 $\underset{\sim}{\bar{E}}=T\varepsilon\cdot\underset{\sim}{\bar{E}}^G$　(22)

$$\text{或}\quad \underset{\sim}{\bar{E}}=\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{\varepsilon}\\ \underset{\sim}{\gamma}\end{Bmatrix}+\zeta\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{\bar{\kappa}}\\ 0\end{Bmatrix} \tag{23}$$

其中$\underset{\sim}{\varepsilon}=\{\varepsilon_X\ \varepsilon_Y\ \varepsilon_{XY}\}^T$, $\underset{\sim}{\bar{\kappa}}=\{\bar{\kappa}_X\ \bar{\kappa}_Y\ \bar{\kappa}_{XY}\}^T$, $\underset{\sim}{\gamma}=\{\gamma_{YZ}\ \gamma_{ZX}\}^T$均相对于图（1c）的局部坐标系。

4.应力场

应力均相对局部坐标系。

如前述，低阶应力场可由（23）式的应变在低阶Gauss积分点的插值求得，而高阶应力场为

$$\underset{\sim}{\sigma}_{PH}=\begin{bmatrix}\xi\eta^2 & 0\\ 0 & \xi^2\eta\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{Bmatrix} \tag{24}$$

$$\underset{\sim}{\sigma}_{BH}=\begin{bmatrix}\xi^2\eta & 0\\ 0 & \xi\eta^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{Bmatrix} \tag{25}$$

5.局部坐标系下的物理矩阵

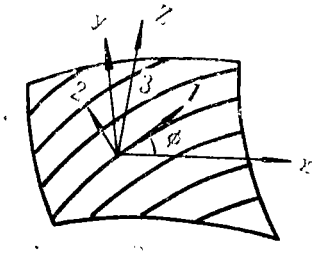


图 2

如图（2），纤维主向与局部坐标系并不一定重合。局部坐标系下

$$\underset{\sim}{C}_1=\begin{bmatrix}\bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13}\\ \bar{C}_{21} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23}\\ \bar{C}_{31} & \bar{C}_{32} & \bar{C}_{33}\end{bmatrix}$$

其中 $\bar{C}_{11}=C_{11}Cos^4\Phi+2(C_{12}+2C_{33})Sin^2\Phi+Cos^2\Phi+C_{22}Sin^4\Phi$,

$\bar{C}_{12}=C_{12}+(C_{11}+C_{22}-2C_{12}-4C_{33})Sin^2\Phi Cos^2\Phi$

$\bar{C}_{22}=C_{22}Cos^4\Phi+2(C_{12}+2C_{33})Sin^2\Phi Cos^2\Phi+C_{11}Sin^4\Phi$

$\bar{C}_{33}=C_{33}+(C_{11}+C_{22}-2C_{12}-2C_{33})Sin^2\Phi Cos^2\Phi$

$\bar{C}_{13}=(C_{11}-C_{12}-2C_{33})Sin\Phi Cos^3\Phi-(C_{22}-C_{12}-2C_{33})Sin^3\Phi Cos\Phi$

$\bar{C}_{23}=(C_{11}-C_{12}-2C_{33})Sin^3\Phi Cos\Phi-(C_{22}-C_{12}-2C_{33})Sin\Phi Cos^3\Phi$

$\bar{C}_{21}=\bar{C}_{12}$, $\bar{C}_{23}=\bar{C}_{32}$, $\bar{C}_{31}=\bar{C}_{13}$

而$C_{11}=E_1/(1-\upsilon_{12}\upsilon_{21})$, $C_{12}=\upsilon_{21}C_{11}$, $C_{22}=E_2/(1-\upsilon_{12}\upsilon_{21})$, $C_{33}=G_{12}$。此外

$$\underset{\sim}{C_2}=\begin{bmatrix} G_{23}\cos^2\Phi+G_{31}\sin^2\Phi & (G_{31}-G_{23})\sin\Phi\cos\Phi \\ (G_{31}-G_{23})\sin\Phi\cos\Phi & G_{23}\sin^2\Phi+G_{31}\cos^2\Phi \end{bmatrix} \tag{27}$$

四数值算例

为了检验前面建立的有限元模型，作者编制了一套FORTRAN程序，在VAX-11/780计算机上计算了一些算例。

1.固支圆柱壳受均匀内压

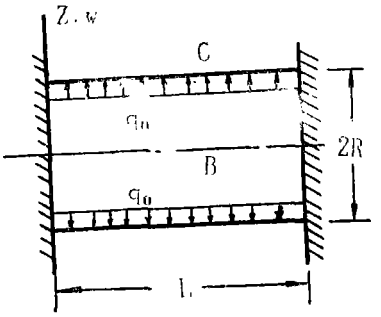


图 3

几何尺寸和材料常数如图(3)。Lee[12]计算了同一算例。由于结构对称，只须计算$\frac{1}{8}$结构。表(一)列出了本文计算的最大径向位移，与Lee[12]吻合较好。且可看出计算结果已收敛。

图(4)给出了沿中心截面CB的垂直位移。

表(1) 最大径向位移(mm)

网格 / 元素	4 × 4	6 × 6
本文	0.002078	0.002080
Lee[12]	0.002042	0.002044

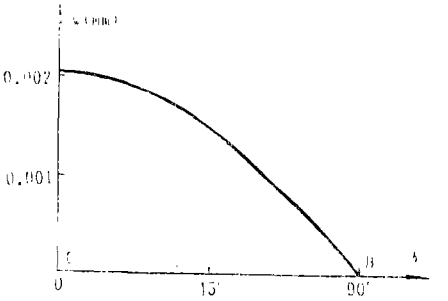
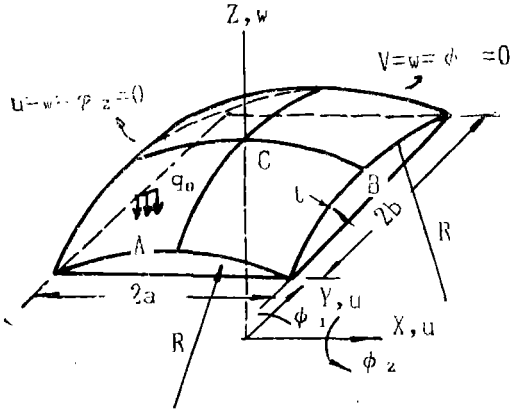


图 4

2.方基浅球壳受均布压力



图(5)方基浅球壳受均布压力

铺层:[0°/90°/0°90°/0°/90°/0°/90°/0°]

几何尺寸、材料常数和边界条件如图(5)，采用等厚的9层铺层。这是一个双曲壳的算例。

Reddy[13]和王毅[14]计算了这一问题的非线性解。当q_0为25kg/mm²时，表(二)给出了本文计算结果与王毅[14]的线性解的对比。从表中还可看出本文元素收敛很快。此外，王毅[14]的解是在2×2网格划分下用位移元按非线性程式迭代求得的

表2 C点横向位移的计算

元素类型	本文				王毅[14]
网格划分	2×2	4×4	6×6	8×8	2×2
WC(mm)	1.0076	0.9833	0.9864	0.9859	0.9253

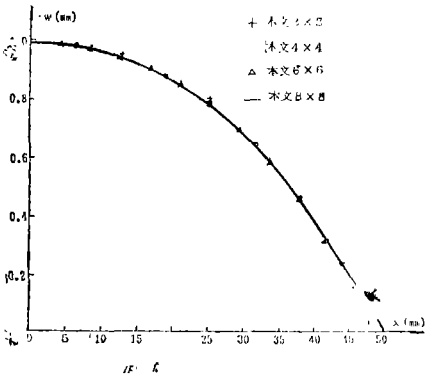


图6

一般比准解偏小。

图(6)给出了本文计算CB截面的横向位移的结果，可见4种网格下的计算结果非常相近。

另外，在材料常数变为$E_1=25\times10^6$ kg/mm²，$E_2=10^6$kg/mm²，$\upsilon_{13}=0.25$，$G_{12}=G_{13}=0.5\times10^6$kg/mm²，$G_{23}=0.2\times10^6$ kg/mm²，而其它条件不变的情况下，本文元素6×6网格下计算的收敛解Wc为1.541$_6$ mm，与Reddy[13]的线性解吻合很好。

五 结　论

经过前面的推导及关于复合材料单曲、双曲壳的数值算例，可以表明：

（1）本文的9节点Lagrange退化壳杂交/混合元素构造简单，计算工作量因高低阶应力场的分离而大大减少。

（2）本文元素关于复合材料浅壳和深壳的解都与参考解吻合很好。

（3）本文元素不依据具体的壳体理论，因而更客观地反映了实际情况。

（4）本文元素精度高、收敛快，属于性能最好的那类元素。

参 考 文 献

〔1〕洪志泉，“复合材料迭层板壳有限元现状分析”，复合材料学报，1985 Vol2，PP80-88

〔2〕D、R、T、Owen & J、A Figneiras，“Anistropic Elastoplactic Finite Element Analysis of Thick and Thin plates and Shells.” Int.J.Num.Metg.Engng，1983 Vol.19，PP541-565

〔3〕J.N、Reddy，A Penalty plate-bending Element for the Analysis of Laminated Anistropic Composite Plates.” Int.J.Num.Meth.Engng.，1980 Vol15，PP1187-1209

〔4〕T、J、R、Hughes，R.L、Taylor and W.Kanoknulchai，“A Simple and Ffficient Element for Plate Bending” Int.J.Num Meth.Engng.，1977 Vol11，PP1529-1543

〔5〕T.H.H.Pian “Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distributions.” AIAA.J.，1964 Vol2，PP133-1336

〔6〕R.L.Spilker，S.C.Chou and O.Orringer，“Alternate Hybrid-Stress Elements for Analysis of Multilayer Composite plates.” J.CompZMater.，1977 Vol11，PP51-70

〔7〕T.H.H Pian, D.P.Chen and D.Kang, "A New Formulation of hybrid/mixed Fitnie Element." Comput.& Struct., 1983 Vol16, PP81-87

〔8〕T.H.H.Pian & K.Sumihara, "Rational Approach for Assumed Stress Finite Element.", Int.J.Num.Meth.Engng., (1983) Vol20, PP1685-1695

〔9〕Z.Tian & T.H.H.Pian, "Axisymmetric Solid Elements by a Rational Hybrid Stress Method Comput.& Struct., (1985) Vol20, PP141-149

〔10〕刘寒冰，许焕然，"基于Hellinger-Reissner变分原理的四边形杂交／混合迭层板单元"，吉林工业大学学报1985年第一期，

〔11〕S.W.Lee & T.H.H.Pian, "Improvement of Plate and shell Finite Elements by mixed Formulations." AIAA.J., (1978) Vol16, PP29-34

〔12〕D.J.Haas & S.W.Lee, "A Nine-node Assumed-strain Finite Element for Composite Plates and Shells." Comput.& Struct., (1987) Vol26, PP445-452

〔13〕J.N.Reddy & K.Chandrashekhara, "Nonlinear Analysis of Laminated Shells Including Shear Strain." AIAA.J., (1985) Vol23, PP440-441

〔14〕王毅，"迭层复合材料板壳大挠度有限元分析和非对称铺层复合材料板的室温形状研究"，硕士学位论文，国防科大研究生院，1985年11月。

A HYBRID/MIXED FINITE ELEMENT ANALYSIS FOR COMPOSITE PLATES AND SHELLS

Hong Zhiquan and Zhang Guoan

National University of Defence Technology

ABSTRACT

In this paper,a new finite element-Lagrange degenerated shell hybrid/mixed element with 9 nodes is developed for the structural analysis of composite platesand shells. The element is based upon a modified Hellinger-Reissner principle, which has following advantages:high accuracy for evaluation of stresses and displacemens,elimination of redundant zero-energy deformation modes, apparently weakened locking effect and invariance with reference coordinates. Using this kind of element the efficiency in computation is improved as compared with other hybrid/mixed finite element and the transverse shear effect is taken into account. Several numerical examples are presented. Numerical studies revea that the accurate and convergent solutions for fider-reinforced composi shallow and deep shells are obtined in comparison with that in re-ferences.

Key words: Hybrid/mixed finite element, Modified:Hellinger-Reissner principle.