第8卷 第3期 复合材料学报 Vol.8 No.3
1991年 7月 ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA July 1991

# 反对称角铺设层合矩形板在不同边界条件下的后屈曲问题

刘 东 欧茂材

重庆建筑工程学院建工系，重庆(630045)

**摘要**：本文以板的无量纲最大挠度为摄动参数，应用摄动法研究了在几种支承情况下，反对称角铺设层合矩形板的后屈曲问题，并以梁的特征函数所构成的广义付里叶级数作为高阶摄动偏微分方程的近似解，本文方法简捷，计算收敛性好、数据可靠。

**关键词**：层合板，摄动法，后屈曲

## 一、引 言

复合材料层合板的后屈曲问题是近年来国内外研究工作者十分感兴趣的一个课题。文〔2〕曾应用广义付里叶级数法分析了四边简支和四边夹支反对称角铺设层合板的后屈曲问题，但由于问题的非线性，求解工作仍十分困难。文〔4〕用加权残值法分析了三边简支一边夹支板的类似问题。本文采用摄动法研究了由简支和夹支边界所组成的六种边界条件下反对称角铺设复合材料层合薄板的后屈曲，并针对不同材料，不同铺层数，不同铺设角和不同边长比对后屈曲性能的影响进行了更为广泛和更为详细的计算和讨论。

## 二、控制方程及边界条件

反对称角铺设层合矩形板后屈曲问题的微分方程可用无量纲挠度W和力函数F表示为：

$$W_{,\xi\xi\xi\xi}+2a_2\lambda^2W_{,\xi\xi\eta\eta}+a_4\lambda^4W_{,\eta\eta\eta\eta}+a_6\lambda F_{,\xi\xi\xi\eta}+a_8\lambda^3F_{,\xi\eta\eta\eta}$$
$$=\frac{\lambda^2}{D_{11}^*}(W_{,\xi\xi}F_{,\eta\eta}+W_{,\eta\eta}F_{,\xi\xi}-2W_{,\xi\eta}F_{,\xi\eta})$$
$$F_{,\xi\xi\xi\xi}+2b_2\lambda^2F_{,\xi\xi\eta\eta}+b_4\lambda^4F_{,\eta\eta\eta\eta}-b_6\lambda W_{,\xi\xi\xi\eta}-b_8\lambda^3W_{,\xi\eta\eta\eta}$$
$$=\frac{\lambda^2}{A_{22}^*}(W_{,\xi\eta}^2-W_{,\xi\xi}W_{,\eta\eta}) \qquad (1)$$

(1)式中的无量纲量定义如下：

本文1989年5月收到

$$\xi=\frac{x}{a},\quad \eta=\frac{y}{b},\quad \lambda=\frac{a}{b},\quad W=\frac{w}{h},\quad F=\frac{\psi}{A_{22}h^2}$$

$$a_2=(\bar{D}^*_{12}+2\bar{D}^*_{66})/\bar{D}^*_{11},\quad a_4=\bar{D}^*_{22}/\bar{D}^*_{11},\quad a_6=(2\bar{B}^*_{26}-\bar{B}^*_{61})/\bar{D}^*_{11}$$

$$a_8=(2\bar{B}^*_{16}-\bar{B}^*_{62})/\bar{D}^*_{11},\quad b_2=(2\bar{A}^*_{12}+\bar{A}^*_{66})/2\bar{A}^*_{22},\quad b_4=\bar{A}^*_{11}/\bar{A}^*_{22}$$

$$b_6=(2\bar{B}^*_{26}-\bar{B}^*_{61})/\bar{A}^*_{22},\quad b_8=(2\bar{B}^*_{16}-\bar{B}^*_{62})/\bar{A}^*_{22},\quad k=p_y/p_x$$

$$P=p_xb^2/A_{22}h^2,\quad \bar{A}^*_{ij}=A_{22}A^*_{ij},\quad \bar{B}^*_{ij}=B^*_{ij}/h$$

$$\bar{D}^*_{ij}=D^*_{ij}/A_{22}h^2\quad (i,j=1,2,6) \tag{2}$$

各内力素的无量纲表达式为：

$$(N_\xi,N_\eta,N_{\xi\eta})^T=(F_{,\eta\eta},F_{,\xi\xi}/\lambda^2,-F_{,\xi\eta}/\lambda)^T$$

$$M_\xi=\bar{B}^*_{61}F_{,\xi\eta}/\lambda-\bar{D}^*_{11}W_{,\xi\xi}/\lambda^2-\bar{D}^*_{12}W_{,\eta\eta}$$

$$M_\eta=\bar{B}^*_{62}F_{,\xi\eta}/\lambda-\bar{D}^*_{12}W_{,\xi\xi}/\lambda^2-\bar{D}^*_{22}W_{,\eta\eta}$$

$$M_{\xi\eta}=-\bar{B}^*_{26}F_{,\xi\xi}/\lambda^2-\bar{B}^*_{16}F_{,\eta\eta}-2\bar{D}^*_{66}W_{,\xi\eta}/\lambda \tag{3}$$

且有关系式：

$$(N_\xi,N_\eta,N_{\xi\eta})^T=(b^2/A_{22}h^2)(N_x,N_y,N_{xy})^T$$

$$(M_\xi,M_\eta,M_{\xi\eta})^T=(b^2/A_{22}h^3)(M_x,M_y,M_{xy})^T \tag{4}$$

荷载考虑为面内边界压力。因此，板的边界条件可表示为：

**(1) 面内边界条件：**

$$\xi=0,1;\quad F_{,\xi\eta}=0\quad F_{,\eta\eta}=-P$$

$$\eta=0,1;\quad F_{,\xi\eta}=0\quad F_{,\xi\xi}=-\lambda^2kP \tag{5}$$

**(2) 面外边界条件：**

简支边界：$W=0\quad W_{,nn}=0$

夹支边界：$W=0\quad W_{,n}=0$

（$n$为边界法线方向） (6)

式中P为荷载参数，k为荷载比，是一常数，取不同的k值，即可得不同的加载条件。

## 三、解 法

本文用正则摄动法，将非线性偏微分方程组化为一组线性偏微分方程组求解。摄动参数取为板的无量纲最大挠度$W_0$，$W_0=W\left(\frac{1}{2m},\frac{2}{2n}\right)$。将面内荷载参数P，力函数F，变形参数W都展成$W_0$的幂级数形式：

$$P=\sum_{i=0,1}^{\infty}P_iW_0^i=P_0+P_1W_0+P_2W_0^2+\cdots\cdots$$

$$F=\sum_{i=0,1}^{\infty}f_i(\xi,\eta)W_0^i=f_0(\xi,\eta)+f_1(\xi,\eta)W_0+f_2(\xi,\eta)W_0^2+\cdots\cdots$$

$$W=\sum_{i=1,2}^{\infty}w_i(\xi,\eta)W_0^i=w_1(\xi,\eta)W_0+w_2(\xi,\eta)W_0^2+\cdots\cdots \tag{7}$$

$w_i(\xi,\eta)$ 还应满足下列的虚边界条件：

$$w_1\left(\frac{1}{2m},\frac{1}{2n}\right)=1,\qquad w_i\left(\frac{1}{2m},\frac{1}{2n}\right)=0\ (i\neq 1) \tag{8}$$

将(7)代入控制微分方程组(1)和边界条件(5)，(6)中，令所得各式两端$W_0$同次幂的系数相等，即可得各级摄动方程组和相应的边界条件。

$f_0(\xi,\eta)$ 的定解问题是：

$$\begin{aligned}
&a_6\lambda f_{0,\xi\xi\xi\eta}+a_8\lambda^3 f_{0,\xi\eta\eta\eta}=0\\
&f_{0,\xi\xi\xi\xi}+2b_2\lambda^2 f_{0,\xi\xi\eta\eta}+b_4\lambda^4 f_{0,\eta\eta\eta\eta}=0\\
&\xi=0,\ 1;\qquad f_{0,\xi\eta}=0,\qquad f_{0,\eta\eta}=-P_0\\
&\eta=0,\ 1;\qquad f_{0,\xi\eta}=0,\qquad f_{0,\xi\xi}=-\lambda^2 kP_0
\end{aligned} \tag{9}$$

求解问题(9)可得：

$$f_0(\xi,\eta)=-P_0(\eta^2/2+k\lambda^2\xi^2/2) \tag{10}$$

高阶摄动偏微分方程组的定解问题，由下列线性偏微分方程组的边值问题描述：

$$\begin{aligned}
&w_{i,\xi\xi\xi\xi}+2a_2\lambda^2 w_{i,\xi\xi\eta\eta}+a_4\lambda^4 w_{i,\eta\eta\eta\eta}+a_6\lambda f_{i,\xi\xi\xi\eta}+a_8\lambda^3 f_{i,\xi\eta\eta\eta}\\
&=\frac{\lambda^2}{D_{11}^*}\sum_{s=1}^{i}(w_{s,\xi\xi}f_{i-s,\eta\eta}+w_{s,\eta\eta}f_{i-s,\xi\xi}-2w_{s,\xi\eta}f_{i-s,\xi\eta})\\
&f_{i,\xi\xi\xi\xi}+2b_2\lambda^2 f_{i,\xi\xi\eta\eta}+b_4\lambda^4 f_{i,\eta\eta\eta\eta}-b_6\lambda w_{i,\xi\xi\xi\eta}-b_8\lambda^3 w_{i,\xi\eta\eta\eta}\\
&=\frac{\lambda^2}{A_{22}^*}\sum_{s=1}^{i-1}(w_{s,\xi\eta}w_{i-s,\xi\eta}-w_{s,\xi\xi}w_{i-s,\eta\eta})\\
&\xi=0,1;\qquad f_{i,\xi\eta}(\xi,\eta)=0,\qquad f_{i,\eta\eta}(\xi,\eta)=P_i\\
&\eta=0,1;\qquad f_{i,\xi\eta}(\xi,\eta)=0,\qquad f_{i,\xi\xi}(\xi,\eta)=-k\lambda^2 P_i\\
&\text{简支边界：}\ w_i(\xi,\eta)=0\qquad w_{i,nn}(\xi,\eta)=0\\
&\text{夹支边界：}\ w_i(\xi,\eta)=0\qquad w_{i,n}(\xi,\eta)=0\\
&\qquad(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)
\end{aligned} \tag{11}$$

取满足定解问题(11)中的函数$w_i(\xi,\eta)$，$f_i(\xi,\eta)$为如下的广义双付氏级数形式：

$$\begin{aligned}
&w_i(\xi,\eta)=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}w_{pq}^{(i)}\phi_p(\xi)\psi_q(\eta)\\
&f_i(\xi,\eta)=-p_i(\eta^2/2+k\lambda^2\xi^2/2)+\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}F_{pq}^{(i)}X_p(\xi)Y_q(\eta)\\
&\qquad(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)
\end{aligned} \tag{12}$$

式中的$\phi_p(\xi)$，$\psi_q(\eta)$，$X_p(\xi)$，$Y_q(\eta)$均是梁的特征函数：

$$\begin{aligned}
&\phi_p(\xi)=A_p(ch\beta_p\xi-Cos\beta_p\xi)+B_p sh\beta_p\xi+\sin\beta_p\xi\\
&\psi_q(\eta)=C_q(ch\theta_q\eta-\cos\theta_q\eta)+D_q sh\theta_q\eta+\sin\theta_q\eta\\
&X_p(\xi)=ch\alpha_p\xi-\cos\alpha_p\xi-\gamma_p(sh\alpha_p\xi-\sin\alpha_p\xi)\\
&Y_q(\eta)=ch\alpha_q\eta-\cos\alpha_q\eta-\gamma_q(sh\alpha_q\eta-\sin\alpha_q\eta)
\end{aligned} \tag{13}$$

这些特征函数还具有下述正交性：

$$\int_0^1 \phi_p\phi_q d\xi=\begin{cases}0 & ,\ p\neq q\\ (2A_p^2-B_p^2+1)/2+A_p(B_p+1)/\beta_p & ,\ p=q\end{cases}$$

$$\int_0^1 \psi_p\psi_q d\eta=\begin{cases}0 & ,\ p\neq q\\ (2C_p^2-D_p^2+1)/2+C_p(1+D_p)/\theta_p & ,\ p=q\end{cases}$$

$$\int_0^1 X_pX_q d\xi=\begin{cases}0 & p\neq q\\ 1 & p=q\end{cases}\qquad \int_0^1 Y_pY_q d\eta=\begin{cases}0 & p\neq q\\ 1 & p=q\end{cases} \tag{14}$$

将（12）代入定解问题（11）的边界条件中，即可确定特征函数中的各常数值$A_p$、$B_p$、$\beta_p$、$C_q$、$D_q$、$\theta_q$、$\alpha_p$、$\gamma_p$。将（12）代入（11）的线性偏微分方程中，对第一个方程两端同乘$\phi_s(\xi)\psi_t(\eta)$，对第二个方程两端同乘$X_s(\xi)Y_t(\eta)$，并在所得的两个方程中分别对$\xi$和$\eta$从0到1积分，且考虑到正交条件（14）式，即得如下的线性代数方程组：

$$w_{st}^{(i)}(\beta_s^4+a_4\lambda^4\theta_t^4)+\sum_p\sum_q 2a_2\lambda^2K_1^{sp}L_1^{tq}\beta_p^2\theta_q^2w_{pq}^{(i)}+\sum_p\sum_q(a_6\lambda K_2^{sp}L_3^{tq}\alpha_p^3\alpha_q$$

$$+a_8\lambda^3K_3^{sp}L_2^{tq}\alpha_p\alpha_q^3)F_{pq}^{(i)}=\frac{\lambda^2}{\bar{D}_{11}^*}\sum_{ss=1}^{i-1}\Bigg\{\sum_p\sum_q\sum_m\sum_n(K_4^{spm}L_5^{tqn}\beta_p^2\alpha_n^2+$$

$$K_5^{spm}L_4^{tqn}\alpha_m^2\theta_q^2-2K_6^{spm}L_6^{tqn}\beta_p\theta_q\alpha_m\alpha_n)w_{pq}^{(ss)}F_{mn}^{(i-ss)}\}-$$

$$\frac{\lambda^2}{\bar{D}_{11}^*}\sum_{ss=1}^{i}\left(\sum_pK_1^{sp}\beta_p^2w_{pt}^{(ss)}+k\lambda^2\sum_qL_1^{tq}\theta_q^2w_{sq}^{(ss)}\right)p_{(i-ss)}$$

$$F_{st}^{(i)}(\alpha_s^4+b_4\lambda^4\alpha_t^4)+\sum_p\sum_q 2b_2\lambda^2K_7^{sp}L_7^{tq}\alpha_p^2\alpha_q^2F_{pq}^{(i)}-\sum_p\sum_q(b_6\lambda K_8^{sp}\cdot$$

$$L_9^{tq}\beta_p^3\theta_q+b_8\lambda^3K_9^{sp}L_8^{tq}\beta_p\theta_q^3)w_{pq}^{(i)}=\frac{\lambda^2}{\bar{A}_{22}^*}\sum_{ss=1}^{i-1}\Bigg\{\sum_p\sum_q\sum_m\sum_n(K_{10}^{spm}L_{10}^{tqn}$$

$$\beta_p\theta_q\theta_n\beta_m-K_{11}^{spm}L_{11}^{tnq}\beta_p^2\theta_q^2)w_{pq}^{(ss)}w_{mn}^{(i-ss)}\}$$

$$(s,\ t,\ p,\ q,\ i,\ m,\ n=1,\ 2,\ \cdots) \tag{15}$$

式中的$K_1^{sp}$，$K_1^{spm}L_1^{tq}$，$L_1^{tqn}$均是积分常数。

$$K_1^{sp}=\int_0^1\phi_s\phi_p^{(2)}d\xi/\beta_p^2H_s \qquad K_2^{sp}=\int_0^1\phi_sX_p^{(3)}d\xi/\alpha_p^3H_s$$

$$K_3^{sp}=\int_0^1\phi_sX_p^{(1)}d\xi/\alpha_pH_s \qquad K_4^{spm}=\int_0^1\phi_s\phi_p^{(2)}X_md\xi/\beta_p^2H_s$$

$$K_5^{spm}=\int\phi_s\phi_pX_m^{(2)}d\xi/\alpha_m^2H_s \qquad K_6^{spm}=\int_0^1\phi_s\phi_p^{(1)}X_m^{(1)}d\xi/\beta_p\alpha_mH_s$$

$$K_7^{sp}=\int_0^1X_sX_p^{(2)}d\xi/\alpha_p^2 \qquad K_8^{sp}=\int_0^1X_s\phi_p^{(3)}d\xi/\beta_p^3$$

$$K_9^{sp}=\int_0^1X_s\phi_p^{(1)}d\xi/\beta_p \qquad K_{10}^{spm}=\int X_s\phi_p^{(1)}\phi_m^{(1)}d\xi/\beta_p\beta_m$$

$$K_{11}^{spm}=\int_0^1\phi_m\phi_p^{(2)}X_sd\xi/\beta_p^2 \tag{16}$$

上式中将s、p、β、α、H、ϕ、X、m分别用t、q、θ、α、H'、ψ、Y和n代替，即可获得相应的$L_1^{tq}$、$L_1^{tqn}$。H和H'是常数，由下式确定。

$$H_p=(2A_p^2-B_p^2+1)/2+A_p(B_p+1)/\beta_p$$
$$H_p'=(2C_p^2-D_p^2+1)/2+C_p(D_p+1)/\theta_p \qquad (17)$$

在方程组（15）中取i=1可得一线性齐次代数方程组，其矩阵形式为：

$$AW+BF=p_0CW$$
$$DW-EF=0 \qquad (18)$$

式中A、B、C、D、E是常系数矩阵。$W=[w_{11}^{(1)}, w_{12}^{(1)}\cdots]^T$，$F=[F_{11}^{(1)}, F_{12}^{(1)}\cdots]^T$。将（18）中的第二式代入第一式，得：

$$(A+BE^{-1}D)W=p_0CW \qquad (19)$$

这是一个一次特征值问题，最小特征值就是$p_0$的解。再利用（8）中第一式，即可确定$w_{ij}^{(1)}$的值，并进而求出$F_{ij}^{(1)}$的值。

在（15）式和（8）中第二式里依次取i=2、3、4…逐次求解所得的代数方数组，即可获得各系数值$\{w_{ij}^{(2)}\}$，$\{F_{ij}^{(2)}\}$，$p_1$，$\{w_{ij}^{(3)}\}$ $\{F_{ij}^{(3)}\}$，$p_2$…。求得系数值后，可由（3）式求出各指定点的内力值，对后屈曲行为进行分析。

## 四、算例与分析

**表1. 弹性模量值**

| | $E_L/E_T$ | $G_{LT}/E_T$ | $\gamma_{LT}$ |
|---|---|---|---|
| 玻璃—环氧 | 3.0 | 0.5 | 0.25 |
| 硼—环氧 | 10.0 | 1/3 | 0.22 |
| 石墨—环氧 | 40.0 | 0.5 | 0.25 |

根据前面的分析，本文对玻璃—环氧（GL），硼—环氧（BO），石墨—环氧（GR）等三种典型复合材料的反对称角铺设层合矩形板进行了数值计算。弹性常数见表1。边长比取为1.0，1.5，2.0。数值计算时，$w_i$，$f_i$的级数均取前6项，并做了6次摄动。

**表2. 屈曲荷载参数$(p_x)_{cr}b^2/E_Th^3$**

| | | λ=1 k=0 | | | λ=1.5 k=0 | λ=2 k=0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | GR | BO | GL | GR | GR |
| ssss | 承载边简支 | 56.0862 | 15.8964 | 6.3997 | 58.6124 | 56.0849 |
| sscs | 承载边简支 | 72.2996 | 20.7751 | 8.8338 | 69.5268 | 70.6471 |
| sscc | 承载边简支 | 87.7561 | 25.5537 | 11.4383 | 84.2924 | 82.9651 |
| ccss | 承载边夹支 | 76.7511 | 22.3220 | 9.9994 | 66.4155 | 62.4654 |
| ccsc | 承载边夹支 | 89.3698 | 26.1240 | 11.8717 | 80.6583 | 75.5580 |
| cccc | 承载边夹支 | 110.3348 | 31.3019 | 14.5922 | 93.1839 | 89.5968 |
| scsc | | 75.5412 | 21.8104 | 9.4511 | 72.7410 | 71.3746 |

表2给出了4铺层45°角铺设，单向均压矩形板对不同材料，不同支承条件的屈曲荷载参数值。表中所列四边简支（ssss）板的屈曲荷载与文献〔2〕相当吻合。

表3给出了4铺层，45°角铺设，单向均压正方板在四边简支时的各后屈曲部份系数值。表中数据表明；随i，p，q的增大，$p_i$，$w_{pq}^{(i)}$，$F_{pq}^{(i)}$均迅速减小。

**表3. $p_i$，$w_{pq}^{(i)}$，$F_{pq}^{(i)}$的值（GR）**

| i | $p_i$ | $w_{11}^{(i)}$ | $w_{16}^{(i)}$ | $w_{21}^{(i)}$ | $w_{31}^{(i)}$ | $w_{41}^{(i)}$ | $w_{51}^{(i)}$ | $w_{61}^{(i)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 2 | $1.98^{-1}$ | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 3 | 0.0 | $9.9^{-3}$ | $3.4^{-3}$ | 0.0 | $6.6^{-3}$ | 0.0 | $4.0^{-5}$ | 0.0 |
| 4 | $-6.8^{-3}$ | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 5 | 0.0 | $1.1^{-4}$ | $-9.9^{-5}$ | $-1.1^{-6}$ | $2.8^{-4}$ | 0.0 | $2.3^{-5}$ | 0.0 |
| 6 | $2.0^{-4}$ | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |

| i | $F_{11}^{(i)}$ | $F_{16}^{(i)}$ | $F_{21}^{(i)}$ | $F_{31}^{(i)}$ | $F_{41}^{(i)}$ | $F_{51}^{(i)}$ | $F_{61}^{(i)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 2 | $-7.5^{-3}$ | $-7.5^{-3}$ | 0.0 | $2.3^{-4}$ | $2.3^{-4}$ | 0.0 | 0.0 |
| 3 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 4 | $7.0^{-5}$ | $7.0^{-5}$ | 0.0 | $-3.0^{-5}$ | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 5 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 6 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |

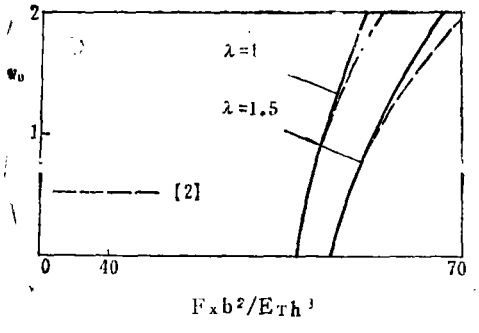



图1 四边简支

图1是上述问题的后屈曲荷载—挠度曲线，并与文〔2〕的结果进行了比较，两者相当吻合。

因此，本文解收敛迅速，精度好，完全能满足工程应用的需要。下面给出部份计算结果和相应的分析。

表4给出了单向均压正方板在不同边界条件下的后屈曲解。四边简支时的结果与文献〔4〕相当吻合。

图2、图3给出了4铺层，45°角铺设矩形板的后屈曲荷载—挠度曲线。表4和图2，图3表明；材料的各向异性程度越高，板的屈后强度越大。支承越强，屈后强度亦越大。双向均压比单向均压的后屈曲荷载显著降低。边长比的变化对屈后强度也有影响。

**表4. 后屈曲解（4—ply，45 deg）**

| 支承 \ $W_0$ / $P/P^{cr}$ | | 0.0 | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 材料 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ssss | 承载边简支 | 1.0 | 1.01 | 1.037 | 1.08 | 1.15 | GR |
| ssss | | 1.0 | 1.02 | 1.072 | 1.151 | 1.32 | BO |
| ssss | | 1.0 | 1.04 | 1.149 | 1.305 | 1.562 | GL |
| sscs | | 1.0 | 1.011 | 1.051 | 1.095 | 1.176 | GR |
| sscc | | 1.0 | 1.013 | 1.052 | 1.117 | 1.21 | GR |
| ccsc | 承载边夹支 | 1.0 | 1.012 | 1.045 | 1.108 | 1.186 | GR |
| cccc | | 1.0 | 1.013 | 1.049 | 1.104 | 1.199 | GR |
| scsc | | 1.0 | 1.012 | 1.048 | 1.110 | 1.191 | GR |

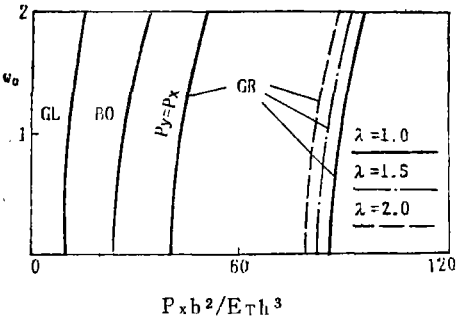



图 2　承载边简支另对边夹支

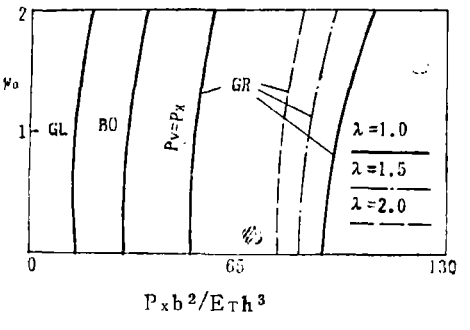
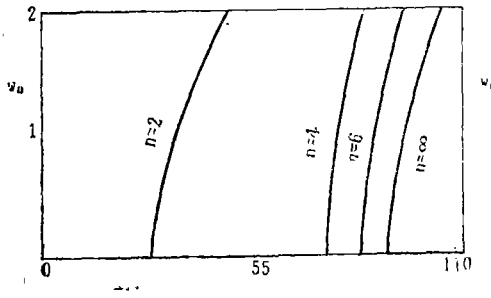



图 3　承载边夹支，另对边简支—夹支

本文计算了在不同铺层数下，45°角铺设，单向均压正方板在六种支承条件下的后屈曲问题。图 4 给出了GR正方板在不同铺层数下的后屈曲荷载—挠度曲线。计算结果表明，不同的支承条件所产生的边界效应，并不改变耦合效应的作用性质。当铺层数为 2 时，耦合效应均使板的屈后强度大幅度降低。而增加铺层数即可大大减小耦合效应的影响。铺层数为 6 的曲线已经很接近对于无耦合效应的情况了。

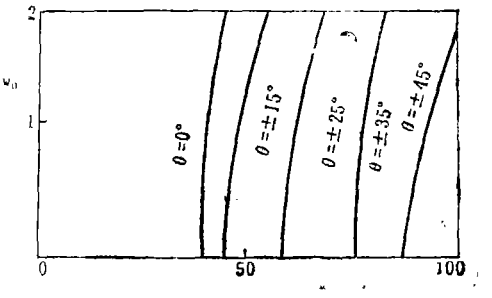
本文计算了铺设角在0°～45°范围内变化时，4铺层正方板在六种边界条件下，承受单向均压时的后屈曲问题，图5～图7是三种边界条件下的后屈曲荷载—挠度曲线。图形表明：铺设角的变化将极大地影响板的屈后强度，但其影响性质要由边界条件确定。对承载边简支，另对边夹支板，屈后强度随铺设角的增大而逐渐增大，45°为最佳铺设角。对承载边夹支，另对边简支—夹支板，其屈后强度随铺设角的增大而逐渐减小，0°为最佳铺设角。而对两邻边简支，两邻边夹支板，铺设角从0°到45°增大时，屈后强度先逐渐减小，然后又逐渐增

大，45°为最佳铺设角。



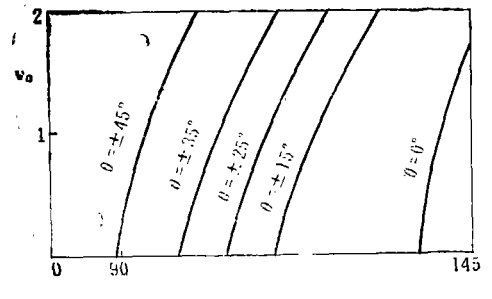

$P_xb^2/E_Th^3$

图4 两邻边简支，两邻边夹支



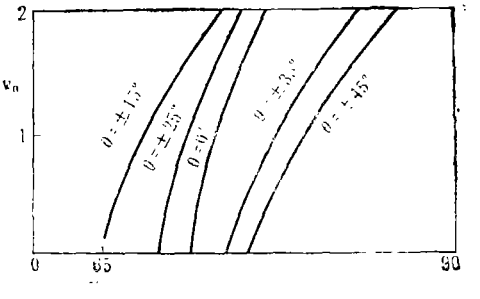

$P_xb^2/E_Th^3$

图5 承载边简支，另对边夹支




$P_xb^2/E_Th^3$

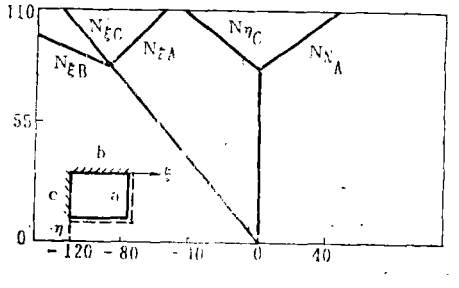
图6 承载边夹支，另对边简支一夹支




$P_xb^2/E_Th^3$

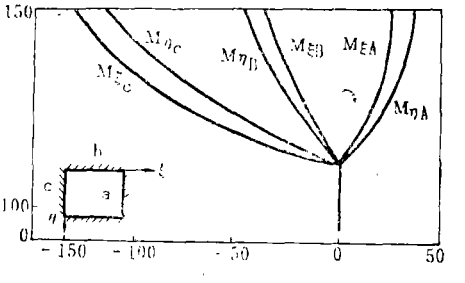
图7 两邻边简支，两邻边夹支

图8描绘了两邻边简支，两邻边夹支，4铺层，45°角铺设，GR正方板在单向均压下的后屈曲荷载—薄膜力关系。图形表明：板屈曲后，$N_{\xi B}$迅速增大，同时$N_{\xi A}$越来越小。这表明，与未承载边邻近的材料抵抗着屈后范围内荷载增加的大部份。伴随着板的失稳，板的中点出现为拉力$N_{\eta\alpha}$，该拉力的出现是正方板具有屈后强度的重要原因。图9给出了四边夹支，4铺层，45°角铺设，GR正方板在单向均压下的后屈曲荷载—弯矩曲线。板的最大弯矩发生在承载边中点。在指定点处，两个方向上的弯矩值很接近。




$P_xb^2/E_Th^3$

图8 两邻边简支，两邻边夹支




$P_xb^2/E_Th^3$

图9 四边夹支

## 五、结　论

1．材料的各向异性程度越高，其屈曲荷载越大，屈后强度越高。加强板的支承条件能有效地提高板的屈曲荷载和屈后强度。双向均压时的屈后强度显著低于单向均压时的屈后强度。

2．拉弯耦合效应在各种边界条件下均使板的屈后强度降低。增加铺层数可迅速减小拉弯耦合效应的影响。

3．铺设角的变化将极大地影响板的屈后强度。但其影响性质随边界条件的变化而变化。

4．单向受压正方板的最大薄膜力发生在未承载边中点。板中点在未承载边方向上出现的拉力是正方板具有屈后强度的重要原因。

## 参考文献


〔1〕C.Y.Chia, Nonlinear analysis of plate, Megram—hill.Inc., 1980

〔2〕C.Y.Chia and M.K.Prahakra, Postbuckling behavior of unsymmetrically layered anisotropic rectangular plates, J.Appl.Mech., March 1974

〔3〕Henry W.Haslach, Postbuckling stability of orthotropic linear elastic rectangular plates under biaxial loads, Int.J.Mech.Sci., Vol28., No.11., 1986

〔4〕Li Zhao Qiu, Postbuckling of Unsymmetric Angle-ply Rectangular Plates Variously Supported, J.of Wu Han University of Technology, Vol.70, No.1, 1988

〔5〕W.Leissa, A review of lamination composite plate buckling, Appl.Mech.Rev., Vol. 40, No.5, 1987

〔6〕C.Y.Chia, Large deflection of unsymmetric laminations with mixed boundary conditions, Int.J.Nonlinear Mech., Vol.20, No.4, 1985


（上接96页）

**4．先进复合材料的诞生**

1945年，Bell Telephone公司的电话线经常发生故障，在检查故障的原因中发现，在镀锡电容器极板表面上有金属须产生，因此而造成了短路。长几mm而直径仅1μm左右的微细须强度很高而且弹性模量很大，一次受弯曲而去掉所加的力后就会像弹簧一样弹回。锡是很软的金属，一加力就发出“哭泣”之声，很容易弯曲，虽然同样是锡，但却显出明显不同的性质。人们为这种须起名为“晶须”（Whisker），是不含位错的微小细长的单晶体，并逐渐发现各种金属或化合物都可能形成晶须。由于不含位错，也就是没有缺陷，故可得到与理论强度极限相接近的强度，以铁的晶须为例，得到了19600MPa的抗拉强度，是钢丝（钢琴丝）强度3920MPa的5倍。1960年，General Electric公司开发出氧化铝晶须并开始小规模生产。抗拉强度高达20000MPa，但当时存有疑问：这种充其量仅有几mm长度的短纤维究竟能不能成为增强材料。D.McDaniels、A.Kelly和W.Tyson等认为，虽说是短纤维，只要长度与直径之比超过某一值，就可以得到与连续纤维同等的增强效果，明确了这一点，晶

（下转86页）

# POSTBUCKLING BEHAVIOR OF ANTISYMMETRICALLY LAMINATED ANGLE-PLY RECTANGULAR PLATES WITH VARIOUS BOUNDARY CONDITIONS

**Liu Dong** **Ou Maocai**

(Department of Civil Engineering, Chong Qing Institute of Architectural and Engineering, China)

## ABSTRACT

An analysis for the postbuckling behavior of antisymmetrically laminated angle-ply rectangular plates with various boundary conditions is presented by making use of the perturbation technique. The nondimensional maximum deflection is selected as the perturbation parameter. A solution of perturbation differential equation of higher-order approximation is assumed in the form of double Fourier series consisting of the beam function. This method is very efficient and the numerical results show good convergence and reliability of the present solution.

**Keywords**: laminated plate, perturbation method, postbuckling

(上接85页)

须作为一种增强纤维就引人注目起来。几乎同时，Union Carbide公司和R.Bacon确认，在3600℃的高压碳弧中用物理蒸镀法得到的石墨晶须具有非常高的性能：拉伸弹性模量745 GPa，抗拉强度20000MPa。这一事实表明碳纤维有高弹性模量和高强度化的可能，Union Carbide公司在开发人造丝系高性能碳纤维的意图上具有重要意义。

为获得晶须长纤维，有一种想法：使硼在连续支持载体上进行气相蒸镀从而产生硼纤维，Texaco Experiment公司的C.Tally采用这种方法进行制作，并发表了树脂基复合材料显示高刚度的研究报告。1960年，Hamilton Standard公司开始了采用钨丝芯的硼纤维的小规模生产。硼纤维是直径100μm有金属光泽的线丝，抗拉强度3500MPa，拉伸模量400 GPa。硼纤维增强树脂基复合材料（BFRP）的拉伸模量为220GPa，比GFRP的40GPa大得多，比飞机广泛采用的铝合金的70GPa也要大。着眼于这一点的U.S.Airforce Materials Laboratory（AFML）给BFRP起名为先进复合材料（Advanced Composite Materials：ACM），与以往的GFRP划线为界，开始了用于飞机机体结构材料的应用研究。

·申摘自松井著《碳纤维的展开和评价方法》·