第10卷 第1期 复合材料学报 Vol.10 No.1
1993年 3月 ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA March 1993

汽车轮胎的三维有限元结构分析

蒋文革 吴保国
刘文宁 杜星文 顾震隆

(南京航空学院，210016) (哈尔滨工业大学，150006)

摘 要 本文从轮胎内部材料微结构出发，建立三维分析模型，考虑轮胎大位移引起的几何非线性，轮胎各部位材料的物理非线性和拉压不同模量，考虑了轮胎与地面接触区域的可动性，通过一参数来提高预测接触区域的准确性，并用白光散斑干涉计量技术测定轮胎表面的大位移场，结果表明计算与实验结果是吻合的。

关键词 非线性，双模量，有限元，轮胎分析

1 前 言

五十年前，Perdy对充气斜交轮胎提出第一个结构分析解以来，轮胎的静态变形的理论解一直是轮胎工程技术人员所要解决的问题。几十年来的努力证明轮胎结构分析是非常复杂的。从七十年代以来，人们借助于计算机的帮助，取得了一些进展，二维单元被用于分析轮胎充气状态及受离心载荷轴对称问题[1, 2]，这些单元也可借助于Fourier变换的方法来分析接触状态的问题，但是，在接触区的位移分布需要从实验中测得。一些膜、壳单元也被用于轮胎的结构分析[3,4,5]，由于它们采用了有关沿厚度方向的变形分布假设，明显降低了计算费用，但是却不能预测轮胎内部各部位的局部力学行为，例如带束扭曲、层间剪切及帘线载荷等，而这些信息对轮胎设计却是非常重要的。近年来，也出现了关于三维分析的文献，但往往作了些简化的假设，如认为轮胎是均匀的[6]，以特殊单元代表帘线/橡胶复合材料等，并且三维分析往往要求大量的数据准备和大型的计算机等。

本文使用了三维单元如实地对轮胎内部各种材料的分布和它们的实际力学性能，考虑各种橡胶及帘线/橡胶复合材料是非线性弹性的。并且考虑到其具有拉压不同模量的特点（非线性双模量）。本文力求在超微机上实现轮胎分析这样庞大的计算，为此编制了一套有效的程序。为了检验计算结果，本文探索了一种测量三维大位移场的方法，使得白光散斑干涉计量法的测量范围达到了厘米量级。

2 有限元列式

对于大变形问题来说，几何关系已经不再是线性的，而必须考虑非线性影响：

本文1992年1月收到修改稿

$$E_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j}) \qquad (i,j=1,2\cdots6) \qquad (1)$$

其对应的虚功方程为

$$\int_{V_0}\sigma\cdot\delta E dV=\int_{V_0}P_0\cdot\delta u dV+\int_{A_{0t}}q_0\delta u dA \qquad (2)$$

其中：σ—克希霍夫应力；　　E—格林应变；

u—位移；　　P_0—初始构形时的体积力；

q_0—初始构形时的面积力；　　V_0—初始构形时的体积；

A_{0t}—初始构形时的力边界

由（1）式，利用位移矢量u的插值：

$$u=Na \qquad (3)$$

其中：N是形状函数矩阵，a是插值参数，这里取为单元节点位移。

可得到应变增量：$\delta E=B\cdot\delta N$ (4)

B可分为两部分之和：$B=B_0+B_L$

其中：$B_0=LN \qquad B_L=A\cdot G$

$$L=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial X_1}&0&0\\0&\frac{\partial}{\partial X_2}&0\\0&0&\frac{\partial}{\partial X_3}\\0&\frac{\partial}{\partial X_3}&\frac{\partial}{\partial X_2}\\\frac{\partial}{\partial X_3}&0&\frac{\partial}{\partial X_1}\\\frac{\partial}{\partial X_2}&\frac{\partial}{\partial X_1}&0\end{pmatrix} \qquad G=\begin{pmatrix}I&\frac{\partial}{\partial X_1}\\I&\frac{\partial}{\partial X_2}\\I&\frac{\partial}{\partial X_3}\end{pmatrix}N$$

$$A=\begin{pmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial X_1}&\frac{\partial u_2}{\partial X_1}&\frac{\partial u_3}{\partial X_1}&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&\frac{\partial u_1}{\partial X_2}&\frac{\partial u_2}{\partial X_2}&\frac{\partial u_3}{\partial X_2}&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\frac{\partial u_1}{\partial X_3}&\frac{\partial u_2}{\partial X_3}&\frac{\partial u_3}{\partial X_3}\\0&0&0&\frac{\partial u_1}{\partial X_3}&\frac{\partial u_2}{\partial X_3}&\frac{\partial u_3}{\partial X_3}&\frac{\partial u_1}{\partial X_2}&\frac{\partial u_2}{\partial X_2}&\frac{\partial u_3}{\partial X_2}\\\frac{\partial u_1}{\partial X_3}&\frac{\partial u_2}{\partial X_3}&\frac{\partial u_3}{\partial X_3}&0&0&0&\frac{\partial u_1}{\partial X_1}&\frac{\partial u_2}{\partial X_1}&\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\\\frac{\partial u_1}{\partial X_2}&\frac{\partial u_2}{\partial X_2}&\frac{\partial u_3}{\partial X_3}&\frac{\partial u_1}{\partial X_1}&\frac{\partial u_2}{\partial X_1}&\frac{\partial u_3}{\partial X_1}&0&0&0\end{pmatrix}$$

I—为三阶单位对角矩阵

代（4）到（2）中，即得：$\int_{V_0} B^T\sigma dV+R=0$　　（5）

其中：$R=-\int_{V_0} N^T p_0 dV-\int_{A_{0t}} N^T q_0 dA$ 是等效节点载荷。

由（5）式，对方程求导后，经推导，可得切线刚度矩阵：

$$K_T=K_0+K_L+K_\sigma$$

其中：$K_0=\int_{V_0} B_0^T D_T B_0 dV$

$$K_L=\int_{V_0}(B_0^T D_T B_L+B_L^T D_T B_0+B_L^T D_T B_L)dV$$

$$K_\sigma=\int_{V_0} G^T M G dV$$

$$M=\begin{pmatrix} I\sigma_{11} & I\sigma_{12} & I\sigma_{13} \\ & I\sigma_{22} & I\sigma_{23} \\ 对称 & & I\sigma_{33} \end{pmatrix}$$

上述方程中对任意的应力—应变关系：$\sigma=S(\varepsilon)$ 有：$D_T=\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$

对于非线性方程组：$K_T\cdot a+R=0$　　（6）

本文采用了增量法求解。增量法还可以提供加载过程中的中间信息供设计人员分析。但是应注意到增量法有时会带来解的“漂移”。因此，N—R方法被用来修正由增量法得到的结果。第m+1步增量和第n+1次N—R迭代的表示式可写作：

$$\triangle a_{m+1}^n=-(K_T(a_{m+1}^n))^{-1}[K_T(a_{m+1}^n)a_{m+1}^n+\lambda_{m+1}f_0]$$　　（7）

其中：f_0为给定载荷量，λ_{m+1}为第m+1增量步载荷步长。

3 材料模型

对于轮胎中的各种橡胶及帘线/橡胶复合材料和钢丝/橡胶复合材料来说，其物理性能是十分复杂的。

一般认为橡胶是不可压缩材料，在计算中，常将其泊松比取为0.48～0.49，以避免奇异。但是，对于在工业上实际使用的橡胶材料，其性能随化学硫化参数及橡胶中的碳黑等填加剂的比例等的变化而变化。并且，它的力学性能随温度的变化而有很大的变化。从实验中[7]可以看出，各种橡胶的泊松比相差较大，且很少接近0.5，这与以往的认识与假设是有距离的。

对于帘线增强橡胶来说，帘线和橡胶的刚度比很大，可达1000倍，而钢丝和橡胶的刚度则可达10000倍，并且，帘线和橡胶的力学性能均具有明显的非线性，采用复合材料层合理论已不能反映这种材料的物理非线性和温度敏感性。

通过大量的实验，在实验数据的基础上，本文采用了非线性应力—应变关系的拟合曲

线[7]： $\sigma=E(\varepsilon,T)\varepsilon$

这里： $$E(\varepsilon,T)=\sum_{i=0}^{3}A_i(T)\varepsilon^i \qquad (8)$$

T是温度，$A_i(T)$是T的函数。

不论是橡胶材料还是帘线/橡胶复合材料，都具有拉压不同模量（非线性双模量）的特点，尤其帘线/橡胶复合材料更为明显。

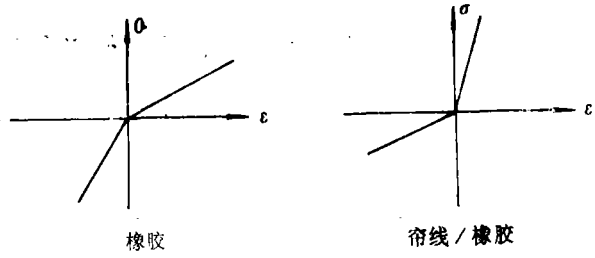


图1 应力应变示意图

如图1所示．橡胶材料在压缩时的模量要大于拉伸时的模量，而帘线/橡胶材料的压缩模量远小于它的拉伸模量。

对于拉压不同模量材料，其刚度可写为[8]：

$$C_{ij}=C^{+}_{ijk}\cdot Sg(f_k(\sigma))+C^{-}_{ijk}\cdot Sg(-f_k(\sigma)) \qquad (9)$$

其中：

$$Sg(f_k(\sigma))=\begin{cases}1 & \text{当} f_k(\sigma)>0\\ 0 & \text{当} f_k(\sigma)<0\end{cases}$$

对于纤维增强复合材料，取$f_k(\sigma)$为材料主方向的正应力，而对于橡胶材料来说，取$f_k(\sigma)$为主应力方向的应力。由应变势能的存在，取对称的材料性能矩阵。

$$C_{ij}=\frac{1}{2}(C^{m+}_{ijk}+C^{m-}_{ijk}) \qquad i\neq j \qquad (10)$$

4 接触问题的分析

对于轮胎接触问题来说，它的接触条件应是非穿透条件，即轮胎和路面是互不交叉的。一般的经典接触问题中，接触边界是给定的，也即是一个确定的边界条件（等式条件），而轮胎接触问题中的接触边界却是可动的，非确定的（不等式条件），这就使得轮胎接触问题复杂起来，接触区一般不能一下确定，而要经过：

i) 预测一可能的接触区。

ii) 根据分析结果进行修正。

在确定接触区时，可以根据实验测定在一定载荷下的接触区形状、大小及接触压力．把这些实验数据作为结构分析的初始数据，显然，这有明显的局限性，但也节省计算时间。

本文采用轮胎轴下沉位移量作为控制量，根据这个下沉控制量来预测接触区的形状，并确定接触区内各外表面点的约束位移，在迭代过程中，根据计算得到的各点的位移及接触压力判断接触区是否合理并进行修正，一直到得到正确的接触区为止。

如图2，是接触区示意图，H为轮轴到地面的距离（亦是轮胎的外半径），u_s为轴的下沉位移量，X，Y为轮胎上一点在变形前的坐标，u_x和u_y则为轮胎上各点变形时的位移量。

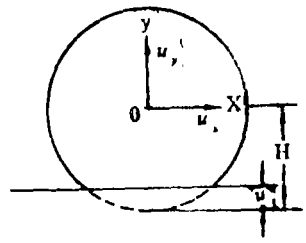


图2　轮胎与地面接触示意图

对于给定的下沉量u_s，预测接触区的条件是：

$$y \leqslant -H+u_s \tag{11}$$

而对于变形后的实际接触区条件则是：

$$y+u_y \leqslant -H+u_s \tag{12}$$

显然，由（11）式得到的初始预测接触区将大于(12) 式的实际接触区，由(12)式有：

$$y \leqslant -H+(u_s-u_y) \tag{13}$$

在（13）式中，如果以$(1-\alpha)\ u_s$代替u_s-u_y，来做预测接触区的判断条件，则得到的结果将更接近于实际接触区，这里的α实际代表了接触区以外的轮胎的变形能力。本文取$\alpha=0.5$，这样，就可以提高第一次预测的准确性，减少了迭代。

当轮胎接触地面时，接触区内各点上不仅有接触压力，而且也存在着摩擦力。一般地说这种摩擦并不满足众所周知的Coulomb定律，而与温度、湿度、路面粗糙度以及轮胎的充气压力密切相关，其关系非常复杂。在目前，有两种极端的处理方法被采用：i）认为无摩擦（自由滑动），ii）无滑动（摩擦力足够大）。本文采用了ii）的处理方法。

5　实验测量

在目前，轮胎变形位移场的测量一直没有较成熟可靠的方法。为了解决大位移测量问题。本文采用了白光散斑干涉技术。

当相干光束照射到物体表面后，在物体表面前的空间里形成散斑场，它与物体表面点是密切相关的。如果在物体表面形成人为散斑（如玻璃微珠等），则也可以认为这些散斑能够反映物体表面的变形特性。

对一个已制造了散斑场的物体，将物体变形前和变形后的散斑场同时记录到一张底片上，形成一个二次曝光散斑图，然后对这张二次曝光底片进行分析。分析方法既可使用逐点法，也可使用全场分析法。在本文中，实验的目的是为了检验计算结果，故此，使用了逐点法。

物体上任一散斑经二次曝光后，在同一底片上形成了一散斑对，因此，当一窄的光束照射到底片上时，这一“斑对”便会形成如同双孔衍射形成的扬氏条纹一样的平行条纹，条纹与“斑对”的联线垂直，条纹间距△为：

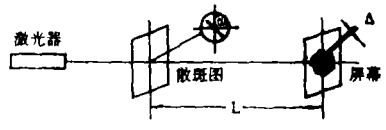


图3　逐点分析光路图

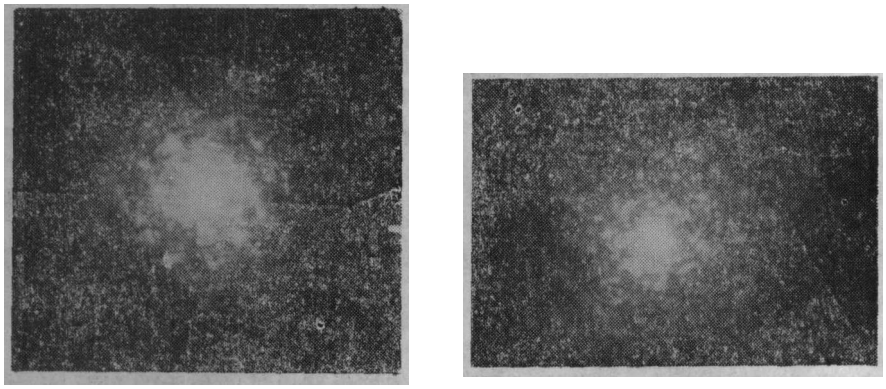
$$\triangle=\lambda L/d$$

其中d是斑对距离，λ为波长，L是底片至成像板距离。

设D为物体表面一点的位移，M为成像放大倍数，那么：$d=D\cdot M$

因而，位移D有 $D=\lambda L/\triangle M$

图4给出了轮胎变形的逐点分析条纹图。其分析结果于图13中与计算结果列于一处。



(a) (b)

图4 轮胎变形的逐点分析条纹图

6 算 例

本文对某橡胶公司提供的165—SR—15型轮胎进行了分析。这种型号的轮胎中包括八种橡胶，一种尼龙/橡胶复合材料，一种钢丝/橡胶复合材料及钢丝圈，其材料分布如图5所示。

由于材料分布的复杂性及轮胎几何形状的复杂，本文采用了六面八节点及五面六节点等参数单元。考虑到静载时轮胎结构及载荷的对称性，取1/4轮胎进行计算。一个横截面上的有限元网格如图6所示。沿圆周方向采用10×18°划分。充气压力为0.2MPa。

在计算中，位移增量为10mm，共计算二步，总下沉量为20mm。

图7～图9给出了轮胎在0°，90°及180°三个截面上变形前后的及充气引起的变形后的轮胎轮廓线，可以看到，下沉量对0°及90°两截面的影响是相近的，并且胎冠处的位移很小，

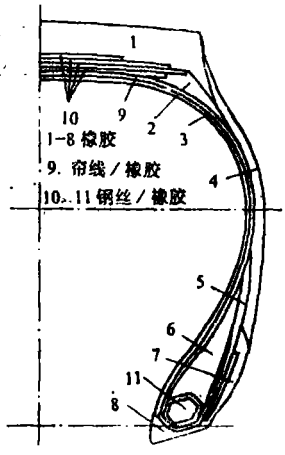


图5 轮胎内部材料分布

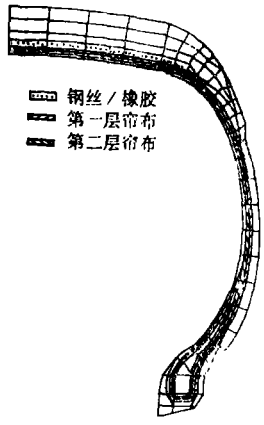


图6 FEM网格

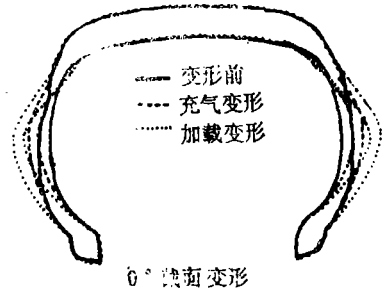


图 7

加载引起的胎侧横向位移大约是180°截面胎侧横向位移的1/2。图10～图12给出了各截面内二个帘线层和一个缓冲层上沿增强材料方向的正应力。可以看出，下沉量对远离接触区的各截面的影响是相近的，并且，下沉量对缓冲层的影响显然大于对帘布层的影响。帘布层内应力峰值的位置并不受下沉量大小的影响。

为了比较计算与实验的结果，图13给出了0°，90°及180°三个截面上外表面处点的竖向位移。可以看到：竖向位移的变化并不是单调的。图中▲代表实验（白光散斑干涉技术）的测量结果。表明，计算与实验是较吻合的。

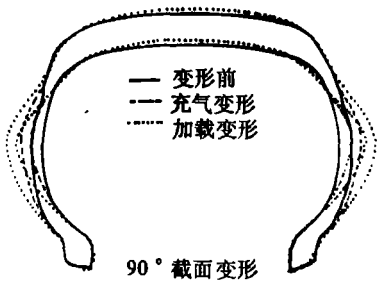


图 8

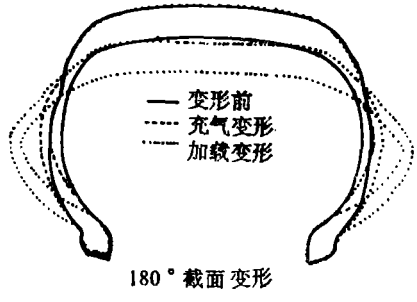


图 9

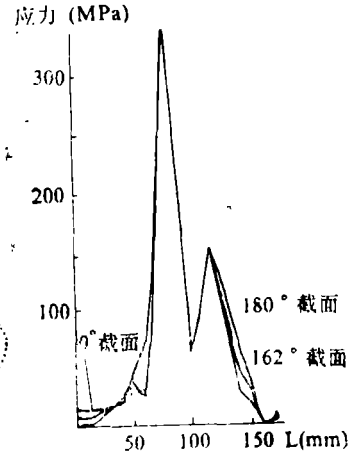


图10　第一帘布层内应力沿增强材料方向的变化

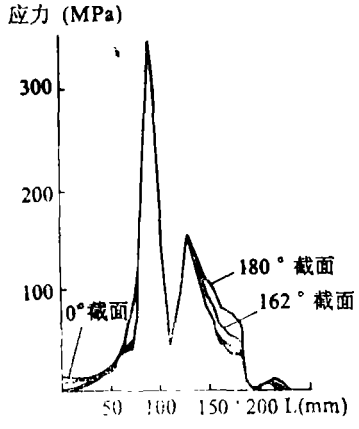


图11　第二层帘布内应力沿增强材料方向的变化

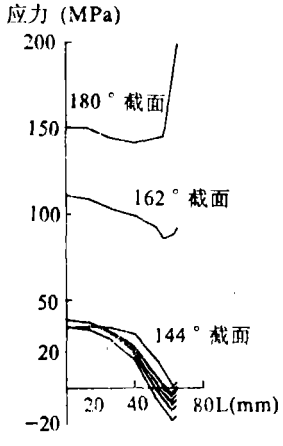


图12　缓冲层内子午线方向应力沿子午向的变化

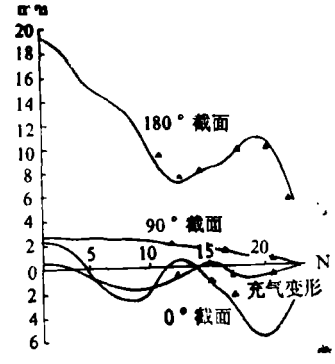


图13　计算与实验结果比较
（横坐标：外表面由胎冠到轮轴节点
纵坐标：各点铅垂方向位移）

7 结 论

通过上述理论与实验结果的比较，可以看出，本文基于轮胎内部材料结构建立的三维分析模型是成功的。将各部分材料的力学性能与轮胎的宏观性能联系起来，这为进一步改进轮胎设计，提供了理论基础。

参 考 文 献

1 Kennedy R H, Patal H P, McMinn M S. Rubber Chemical Technology. 1981, 54:751.
2 Satyamurchy K, Hirschelt L R. Tire Science Technology. 1987, 15(2):97
3 Patal H P, Zorowrki C F. Tire Science Technology. 1978, 6(4):233
4 Jozef DeEskinazi, Yang T Y, Werner Sodel. Tire Science Technology. 1978, 6(1):48
5 Car M Anderson. NASA Contractor Report 3483.1981
6 Radha R A, Satyamurthy K, Hirschfelt L R. Tire Science Technology. 1985, 13(2):91
7 Du X W, Jiang J Y. Ninth Annual Meeting of Tire Society. America. 1990
8 Gu Z L, Meng L J. Composite Materials. 1989, 23: 988-996

3D FINITE ELEMENT ANALYSIS OF RADIAL TIRE

Liu Wenning

(Nanjing Aeronautical Institute, China)

Jiang Wenge Du Xingwen Wu Baoguo Gu Zhenlong

(Harbin Institute of Technology, China)

Abstract Based on the micro-structure of materials in a tire, a 3D analysis model is presented in this paper. Geometrically nonlinear behavior resulted from large displacement, physically nonlinear behavior and bi-modulus of materials of various parts of the tire are considered. For changeable contact field with road, a parameter is used to improve the accuracy of hypothetical contact field. The incandescent Light Spectra Technique is used to measuer the surface displacement field of the tire, a comparison of theoretical and experimental results show a good agreement.

Key words nonlinear behaviour, bi-modulus, finite element method, tire analysis