第11卷 第2期 复合材料学报 Vol.11 No.2
1994年 6月 ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA June 1994

复合材料层合梁理论

息志臣 陈浩然

(大连理工大学工程力学研究所，116023)

摘 要 层合梁理论是分析复合材料层合梁和加筋层合结构力学响应的基础。本文基于Mindlin假定导出了横向层合梁、纵向层合梁和组合层合梁一阶剪切变形理论。给出的理论既能够精确计算各层合梁的刚度值，又能考虑各刚度之间的耦合效应。为不失一般性，三种层合梁的本构方程均考虑了热效应。

关键词 层合梁理论，加筋结构，弯曲

1 引 言

复合材料具有较高的比刚度和比强度，因此它在航空航天领域中的应用已相当广泛。除层合板以外，航空结构上也有层合梁和加筋层合元件。研究层合梁和加筋层合结构在外界因素（荷载、变温等）作用下发生的力学响应，离不开层合梁理论。

目前，工程上常用的层合梁有横向层合梁、纵向层合梁和由它们组成的组合层合梁。横向层合梁理论可以由层合板理论退化导出，因而发展较快。横向层合梁的弯曲、屈曲、振动和大变形等力学响应也得到了广泛研究[1—5]。然而，纵向层合梁理论和组合层合梁理论迄今仍没有公开的文献报道。一些学者在研究加筋层合结构力学响应时，或采用横向层合梁[6—8]，或用近似公式计算组合层合梁的刚度值[9]。

本文基于Mindlin假定导出了横向层合梁、纵向层合梁和组合层合梁一阶剪切变形理论。首先，根据梁的应力状态假定简化层合板铺层应力应变关系，导出了横向层合梁理论；其次，利用应力、应变转轴关系，由横向层合梁理论得到了纵向层合梁理论；最后，采用叠加原理推出了组合层合梁理论。推导过程中没有采用任何近似，所以导出的层合梁理论包含各刚度之间的耦合影响，给出的刚度定义式是精确的。为了不失一般性，三种层合梁理论均考虑了热效应。

2 层合梁理论

2.1 横向层合梁

由Mindlin假定，考虑轴向变形和扭转变形的层合梁位移分量可以表示为

本文1992年4月1日收到

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$u(x,z)=u_0(x)+z\theta_y(x)$$
$$v(x,z)=-z\theta_x(x) \qquad (1)$$
$$w(x,z)=w_0(x)$$

式中u_0、w_0分别为层合梁中性层沿x、z方向的位移分量；θ_x、θ_y分别为层合梁中性层法线变形后绕x、y的转角。这里u_0、w_0分别以沿x、z轴正向为正，而θ_x、θ_y则以按右手螺旋法则定出的矢量沿坐标轴正向为正，如图1所示。

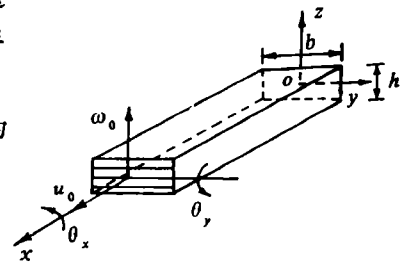

图1 横向层合梁坐标系和变量符号规定

遵守上述符号规定，横向层合梁的几何方程可以表示为

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}zk_x\\ zk_{xy}\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix} \qquad (2)$$

式中$\varepsilon_x^0=u_{0,x}$；$k_x=\theta_{y,x}$；$k_{xy}=-\theta_{x,x}$；$\gamma_{xy}^0=w_{0,x}+\theta_y$。这里逗号表示对下标变量求偏导数。

在层合板铺层的应力应变关系式中，令$\sigma_y=\tau_{yz}=0$，通过整理，于是可以导出横向层合梁的应力应变关系式

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \tau_{xy}\\ \tau_{xz}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{Q}_{11} & \tilde{Q}_{16} & 0\\ \tilde{Q}_{16} & \tilde{Q}_{66} & 0\\ 0 & 0 & \tilde{Q}_{55}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x-\alpha_x\Delta T\\ \gamma_{xy}-\alpha_{xy}\Delta T\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix} \qquad (3)$$

式中$\tilde{Q}=\bar{Q}_{11}-\bar{Q}_{12}^2/\bar{Q}_{22}$，$\tilde{Q}_{16}=\bar{Q}_{16}-\bar{Q}_{12}\bar{Q}_{26}/\bar{Q}_{22}$，$\tilde{Q}_{66}=\bar{Q}_{66}-\bar{Q}_{26}^2/\bar{Q}_{22}$，$\tilde{Q}_{55}=\bar{Q}_{55}-\bar{Q}_{45}^2/\bar{Q}_{44}$。这里$\bar{Q}_{ij}(i,j=1,2,6)$和$\bar{Q}_{kl}(k,l=4,5)$为层合板偏轴刚度系数。

按梁的轴力、弯矩、扭矩和横向剪力定义有

$$N_x=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_x b\,dz,\qquad M_y=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_x bz\,dz$$
$$M_{xy}=\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{xy}bz\,dz,\qquad Q_x=\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{xz}b\,dz \qquad (4)$$

式中h为横向层合梁高度，b为宽度。

将式（3）代入式（4），可得横向层合梁本构方程

$$\begin{Bmatrix}N_x\\ M_x\\ M_{xy}\\ Q_x\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & B_{11} & B_{16} & 0\\ B_{11} & D_{11} & D_{16} & 0\\ B_{16} & D_{16} & D_{66} & 0\\ 0 & 0 & 0 & H_{55}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^0\\ k_x\\ k_{xy}\\ \gamma_{xz}^0\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}N_x^T\\ M_x^T\\ M_{xy}^T\\ 0\end{Bmatrix} \qquad (5)$$

式中

$$A_{11}=b\int_{-h/2}^{h/2}\tilde{Q}_{11}dz=b\sum_{k=1}^{N}\tilde{Q}_{11}(Z_k-Z_{k-1})$$
$$(B_{11},B_{16})=b\int_{-h/2}^{h/2}(\tilde{Q}_{11},\tilde{Q}_{16})z\,dz=b/z\cdot\sum_{k=1}^{N}(\tilde{Q}_{11},\tilde{Q}_{16})(Z_k^2-Z_{k-1}^2)$$

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$(D_{11},D_{16},D_{66})=b\int_{-h/2}^{h/2}(\tilde{Q}_{11},\tilde{Q}_{16},\tilde{Q}_{66})z^2\mathrm{d}z$$

$$=b/3\cdot\sum_{k=1}^{N}(\tilde{Q}_{11},\tilde{Q}_{16},\tilde{Q}_{66})(Z_k^3-Z_{k-1}^3)$$

$$H_{55}=5b/4\cdot\int_{-h/2}^{h/2}\tilde{Q}_{55}(1-4z^2/h^2)\mathrm{d}z$$

$$=5b/4\cdot\sum_{k=1}^{N}\tilde{Q}_{55}[(Z_k-Z_{k-1})-4(Z_k^3-Z_{k-1}^3)/3h^2]$$

这里N为横向层合梁铺层总数。热轴力、热弯矩和热扭矩分别为

$$N_x^T=b\int_{-h/2}^{h/2}[\tilde{Q}_{11}\ \tilde{Q}_{16}][\alpha_x\Delta T\ \ \alpha_{xy}\Delta T]^T\mathrm{d}z,$$

$$\begin{Bmatrix}M_x^T\\M_{xy}^T\end{Bmatrix}=b\int_{-h/2}^{h/2}\begin{bmatrix}\tilde{Q}_{11}&\tilde{Q}_{16}\\\tilde{Q}_{16}&\tilde{Q}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha_x\Delta T\\\alpha_{xy}\Delta T\end{Bmatrix}z\mathrm{d}z$$

由式（5）不难看出，横向层合梁含有拉弯耦合效应和弯扭耦合效应。对于对称铺设的横向层合梁将仅存在弯扭耦合效应。

2.2 纵向层合梁

由于位移场和几何方程与材料无关，所以纵向层合梁的应变位移关系式与横向层合梁的相同。

纵向层合梁的应力应变关系式，可利用应力应变转轴公式，由横向层合梁的应力应变关系式导出。如果纵向层合梁坐标系取自图2所示形式，则纵向层合梁的应力分量与横向层合梁应力分量之间具有如下转换关系

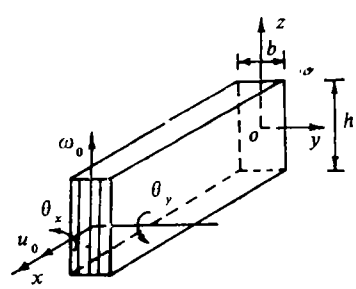

图2　纵向层合梁坐标系和变量符号规定

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\\tau_{xy}\\\tau_{xz}\end{Bmatrix}_{\text{纵}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\\tau_{xy}\\\tau_{xz}\end{Bmatrix}_{\text{横}}\tag{6}$$

或简记为

$$\{\sigma\}_{\text{纵}}=[T]_\sigma\{\sigma\}_{\text{横}}\tag{7}$$

同理，纵向层合梁与横向层合梁应变分量之间具有如下转换关系

$$\{\varepsilon\}_{\text{纵}}=[T]_\varepsilon\{\varepsilon\}_{\text{横}}\tag{8}$$

且可证明

$$[T]_\varepsilon^{-1}=[T]_\sigma^T\tag{9}$$

将式（3）代入式（7），并利用式（8）和式（9），于是有

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\{\sigma\}_{纵}=[T]_\sigma[\bar{Q}][T]_\sigma^T\{\varepsilon\}_{纵} \tag{10}$$

纵向层合梁和横向层合梁热膨胀系数之间的转换关系与式（8）相同，即

$$\{\alpha\}_{纵}=[T]_\varepsilon\{\alpha\}_{横} \tag{11}$$

所以，略去式（10）的下标，纵向层合梁考虑热效应的应力应变关系为

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \tau_{xy}\\ \tau_{xz}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{Q}_{11} & 0 & \bar{Q}_{16}\\ 0 & \bar{Q}_{55} & 0\\ \bar{Q}_{16} & 0 & \bar{Q}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x-\alpha_x\Delta T\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{xy}-\alpha_{xz}\Delta T\end{Bmatrix} \tag{12}$$

纵向层合梁的轴力、弯矩、扭矩和横向剪力可按下式定义

$$\begin{aligned}N_x&=\sum_{k=1}^{N}\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_x t_k\mathrm{d}z, & M_x&=\sum_{k=1}^{N}\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_x t_k z\mathrm{d}z,\\ M_{xy}&=\sum_{k=1}^{N}\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{xy}t_k z\mathrm{d}z, & Q_x&=\sum_{k=1}^{N}\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{xz}t_k\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{13}$$

将式（12）代入式（13），并且按工程实际情况，可设铺层厚度相等，即$t_k=t_0$，于是得纵向层合梁本构方程

$$\begin{Bmatrix}N_x\\ M_x\\ M_{xy}\\ Q_x\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11} & 0 & 0 & H_{16}\\ 0 & D_{11} & 0 & 0\\ 0 & 0 & D_{66} & 0\\ H_{16} & 0 & 0 & H_{66}\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^0\\ k_x\\ k_{xy}\\ \gamma_{xz}^0\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}N_x^T\\ M_x^T\\ 0\\ Q_x^T\end{Bmatrix} \tag{14}$$

式中

$$A_{11}=t_0\sum_{k=1}^{N}\int_{-h/2}^{h/2}\bar{Q}_{11}\mathrm{d}z=ht_0\sum_{k=1}^{N}\bar{Q}_{11}$$

$$(D_{11},D_{66})=t_0\sum_{k=1}^{N}\int_{-h/2}^{h/2}(\bar{Q}_{11},\bar{Q}_{55})z^2\mathrm{d}z=h^3t_0/12\cdot\sum_{k=1}^{N}(\bar{Q}_{11},\bar{Q}_{55})$$

$$(H_{16},H_{66})=5t_0/6\cdot\sum_{k=1}^{N}\int_{-h/2}^{h/2}(\bar{Q}_{16},\bar{Q}_{66})\mathrm{d}z=5ht_0/6\cdot\sum_{k=1}^{N}(\bar{Q}_{16},\bar{Q}_{66})$$

这里N为纵向层合梁铺层总数，h为纵向层合梁高度。热轴力、热弯矩、热扭矩和热横向剪力分别为

$$N_x^T=t_0\sum_{k=1}^{N}\int_{-h/2}^{h/2}[\bar{Q}_{11}\ \bar{Q}_{16}][\alpha_x\Delta T\ \alpha_{xz}\Delta T]^T\mathrm{d}z$$

$$M_x^T=t_0\sum_{k=1}^{N}\int_{-h/2}^{h/2}[\bar{Q}_{11}\ \bar{Q}_{16}][\alpha_x\Delta T\ \alpha_{xz}\Delta T]^T z\mathrm{d}z$$

$$Q_x^T=t_0\sum_{k=1}^{N}\int_{-h/2}^{h/2}[\bar{Q}_{16}\ \bar{Q}_{66}][\alpha_x\Delta T\ \alpha_{xz}\Delta T]^T\mathrm{d}z$$

分析式（14）可知，纵向层合梁不含有横向层合梁所包括的拉弯耦合效应和弯扭耦合效应，但却有拉伸横向剪切耦合效应，而这种耦合效应又是横向层合梁所没有的。值得指出

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

的是，对各向同性材料，可以证明，式(11)和式（12）是完全一样的。

2.3 组合层合梁

忽略拐角效应，工程中常用的复合材料梁一般可简化为图3所示的组合层合梁，它的本构方程可以由横向层合梁和纵向层合梁的本构方程叠加导出，其形式为

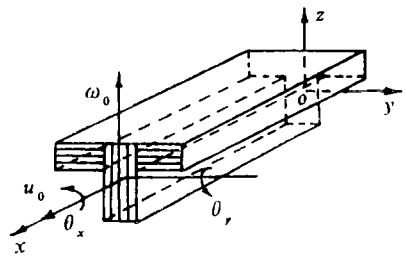

图3　组合层合梁坐标系和变量符号规定

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \\ M_{xy} \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & B_{16} & H_{16} \\ B_{11} & D_{11} & D_{16} & 0 \\ B_{16} & D_{16} & D_{66} & 0 \\ H_{16} & 0 & 0 & H_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ k_x \\ k_{xy} \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_x^T \\ M_x^T \\ M_{xy}^T \\ Q_x^T \end{Bmatrix} \tag{15}$$

式中各刚度系数和热载荷均是由横向层合梁和纵向层合梁相应刚度系数和热载荷叠加得到的。需要特别注意，这些叠加计算必须在组合层合梁横截面形心坐标系中进行。

横向层合梁刚度和载荷移轴公式与层合板的相同。纵向层合梁刚度和载荷的移轴公式分别为

$$A'_{11} = A_{11}$$

$$[D'_{11}, D'_{66}]^T = [D_{11}, D_{66}]^T + 2\Delta[B_{11}, B_{66}]^T + \Delta^2[A_{11}, A_{66}]^T$$

$$[H_{16}, H'_{66}]^T = [H_{16}, H_{66}]^T$$

$$N'_x = N_x,\ Q_x = Q_x$$

$$[M'_x,\ M_{xy}]^T = [M_x,\ M_{xy}]^T + \Delta[N_x,\ N_{xy}]^T$$

式中Δ为纵向层合梁中性层到组合层合梁中性层的距离。

式（15）表明，组合层合梁含有拉-弯耦合效应、弯-扭耦合效应和拉-横向剪切耦合效应。

3 结 束 语

本文以Mindlin假定导出了横向层合梁、纵向层合梁和组合层合梁一阶剪切变形理论。这种理论综合考虑了各变量之间的耦合影响，不仅为准确了解复合材料加筋结构力学响应提供了保证，而且为进一步研究纵向层合梁和组合层合梁的弯曲、屈曲、振动及大变形问题奠定了基础。此外，采用本文的推导方法，可以方便地导出层合梁的其它各种理论。

参 考 文 献

1 Hu M Z, Kolsky H, Pipkin A C. Bending theory for fiber reinforced beams. Journal of Composite Materials, 1985; 19:235-249

2 Chen A T, Yang T Y. Static and dynamic formulation of a symmetrically laminated beam finite element for a microcomputer. Journal of Compsite Materials, 1985; 19:459-475

3 Teoh L S, Huang C C. The vibration of beams of fibre reinforced material. Journal of

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

Sound Vibration, 1977; 51:467-473
4 Thambiratanam D P. Transient response of beam under initial stress. Journal of Engineering Mechnics Division, ASCE, 1984; 110:1544-1556
5 Sathyamoorthy M. Nonlinear analysis of beams,part I: A survey of recent advances. Shock Vibration Design, 1982; 14:19-25; Part Ⅱ:Finite element methods. Shock Vibration Design, 1982; 14:7-9
6 息志臣，陈浩然. 复合材料加筋板热变形和热应力分析. 复合材料学报，1992; 9(4):17-22
7 郭兆璞，马俊青. 复合材料加筋板的动力分析. 复合材料学报，1990; 7(3):75-80
8 Madhujit, Abhuit. Finite element buckling analysis of stiffened plates. Composites and Structures, 1990; 34:795-803
9 余字旗. 复合材料加筋板的稳定性及破坏研究. 大连理工大学硕士论文，1991

THE THEORY FOR COMPOSITE LAMINATED BEAMS

Xi Zhichen Chen Haoran
(Institute of Engineering Mechanics
Dalian University of Technology, Dalian 116023)

Abstract Laminated beam theory is the basis of mechanical behavior analyses of composite laminated beams and stiffened laminated structures. The first-order shear deformation theories of a transversely laminated beam, a longitudinally laminated beam and a combined beam are developed based on the Mindlin hypothesis. The coupled effects between variables are included in the present theories. The exact stiffness can be obtained by using the stiffness expressions developed. For generality, thermal behavior is considered in the formulation.

Key words laminated beam theory, stiffened structure, bending

（上接第61页）

研讨会1994年3月4日在东京举行。每人会议费（含讲义费、联谊费和税，不包括午餐费）分三种（当日汇率1万日元=840元）：(1) 一般人员：2万7千日元；(2) 官厅、学校人员：1万5千日元；(3) 学生：1万日元。

研讨会上有7个讲演：

1. 压缩天然气用轻质压力容器的设计与解析 东京都都立大学 教授 川原正言
2. 天然气汽车的动向 （社）日本瓦斯协会天然气汽车规划部科长 鸣岛 正
3. 拉挤成型和最近的应用 旭硝子M(株) 主任技师 马场健司
4. 用SMC成型法的与用水有关的制品 INAX(株) 第二生产研究所所长 小柳卓治
5. 航空宇航产业的现状和复合材料的新进展 三菱重工（株）研究部主查 山口泰弘
6. 薄壁CFRP 神户制钢（株）高分子材料部次长 杉野宁彦
7. FRP在铁道车辆中的适用性（CFRP构件开发）
（财）铁道综合技术研究所主任研究员 铃木康文

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net