第 11 卷　第 3 期　　复 合 材 料 学 报　　Vol. 11　No. 3
1994 年　　9 月　　ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA　　Sept.　1994

# 复合材料层板双悬臂梁试样应变能释放率的有限元分析

郭亚军
（北京航空材料研究所，100095）

**摘　要**　本文用四边形八节点等参有限元对用于测定复合材料层板 I 型层间断裂韧度的双悬臂梁试样(DCB)的层间应变能释放率进行了二维有限元分析，并与简单弯曲理论解及修正后的简单弯曲理论解进行了对比，探讨了裂纹长度、试样厚度以及试样厚度方向弹性模量对应变能释放率的简单弯曲理论解的计算精度的影响。

**关键词**　复合材料，层间断裂，应变能释放率，有限元分析

## 1　前　　言

树脂基复合材料层间的薄弱特性阻碍了其应用，导致了人们对其进行大量的研究工作，以测定其层间的断裂韧性[1~3]。I 型问题由于在技术上最重要，所以研究得更多，目前为测定复合材料层板层间 I 型断裂韧性而普遍采用的试样是双悬臂梁试样，如图 1 所示。由于双悬臂梁试样在结构模型上与悬臂梁比较相近，所以人们很自然地想到用悬臂梁的计算公式来计算双悬臂梁试样的应变能释放率。

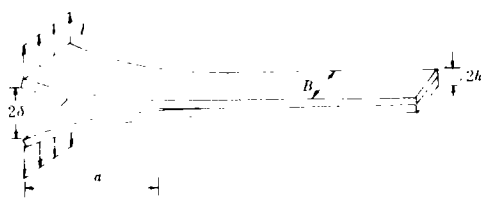


图 1　双悬臂梁的几何形状与加载

应变能释放率 $G_I$ 可用柔度确定，即

$$G_I = \frac{P^2}{2B} \cdot \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}a} \tag{1}$$

对于图 1 所示的 DCB 试样，忽略剪力的影响，根据悬臂梁的弯曲理论可得到试样悬臂端的半开口位移：

$$\delta_0 = \frac{4Pa^3}{E_{11}Bh^3} \tag{2}$$

由此可得试样柔度的简单弯曲理论解：

$$C_I = \frac{8a^3}{E_{11}Bh^3} \tag{3}$$

① 本文 1992 年 9 月 12 日收到

代入(1)式，有

$$G_I = \frac{12P^2a^2}{E_{11}B^2h^3} \tag{4}$$

如果考虑剪切，几何尺寸和厚度方向弹性模量的影响，可对(3)和(4)式作如下修正[4]：

$$C_I^+ = C_I[1 + 1.92f + 1.22f^2 + 0.39f^3] \tag{5}$$

$$G_I^+ = G_I[1 + 1.28f + 0.41f^2] \tag{6}$$

其中

$$f = \frac{h}{a} \cdot \left(\frac{E_{11}}{E_{33}}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{7}$$

由于在结构模型上双悬臂梁试样与悬臂梁试样有一定的差异，并且(3)式和(4)式是在各向同性材料假设的基础上得到的，所以(3)～(6)式只能是复合材料层板柔度与层间应变能释放率的近似解答。本文的目的就是要通过有限元分析探讨上述近似解答的计算精度，并研究几何尺寸、物理参数对计算结果的影响。

**主要符号表**

| | |
|---|---|
| $P$　集中载荷 | |
| $L$、$B$、$2h$、$a$　试样长度、宽度、厚度、裂纹长度 | $C$　试样柔度 |
| $E_{11}$　试样纤维方向的弹性模量 | $C_I$　简单弯曲理论解计算出的试样柔度 |
| $E_{33}$　试样垂直于纤维方向的弹性模量 | $C_I^+$　修正后的简单弯曲理论解计算出的试样柔度 |
| $G_{13}$　试样层间剪切模量 | $C_I^{FE}$　有限元法计算出的试样柔度 |
| $\nu_{13}$　主泊松比 | $G$　应变能释放率 |
| $2\delta$　加载点的开口位移 | $G_I$　简单弯曲理论解计算出的应变能释放率 |
| $\delta_0$　简单弯曲理论解计算出的试样加载点的半开口位移 | $G_I^+$　修正后的简单弯曲理论解计算出的应变能释放率 |
| $\delta^{FE}$　有限元法计算出的试样加载点的半开口位移 | $G_I^{FE}$　有限元法计算出的应变能释放率 |

## 2　双悬臂梁(DCB)试样的有限元分析

对图 1 所示的 DCB 试样的应变能释放率进行有限元分析时，由于对称性，可取一半进行分析，为了模拟试验加载情况和防止试样的刚体位移在梁的悬臂端施加了水平方向的约束。采用四边形八节点等参有限元，单元划分时，将厚度方向四等分，除裂纹尖端附近外，单元划分得比较稀疏，单元长宽为 4:1，有限元模型如图 2 所示。

单元划分在裂纹尖端附近进行收缩，并在裂纹尖端引入奇异四边形单元，裂纹尖端单元长度为 $\Delta a = 0.0625$mm，裂纹尖端附近的有限元模型如图 2a 所示。这样，几何体就不必划分得太细，以节省内存与计算时间，便于在微机上运行。层板应变能释放率用 J 积分方法计算，其积分回路为环绕裂纹尖端单元的高斯点所组成的回路，计算时采用平面应力假定，用双精度计

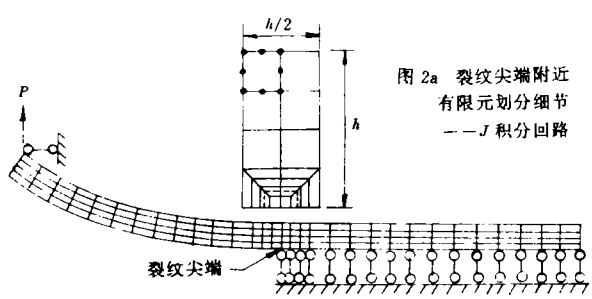


图 2a　裂纹尖端附近有限元划分细节
——J 积分回路

图 2　双悬臂梁试样的有限元模型

算，单元划分由计算机自动进行，对长 100mm，厚 4mm 的试样，当裂纹长度为 30mm 时共计 667 个节点，1266 个自由度。在 AST/286 上运行一次需要 40 分钟左右。

## 3 计算结果分析

我们采用图 2 所示的有限元模型，用 ASFCL 程序，对图 1 所示的 T300/914 单向板 DCB 试样在不同的裂纹长度下加载点的半开口位移、层板柔度和应变能释放率进行了计算。计算所用材料性能参数为 $E_{11}=130$Gpa，$E_{33}=9.5$Gpa，$G_{13}=5.3$Gpa，$\nu_{13}=0.3$，试样厚度 $2h=4$mm，单位宽度的载荷 $(P/B)$ 为 3.0N/mm。半开口位移、层板柔度和应变能释放率与裂纹长度的关系曲线如图 3～5 所示。

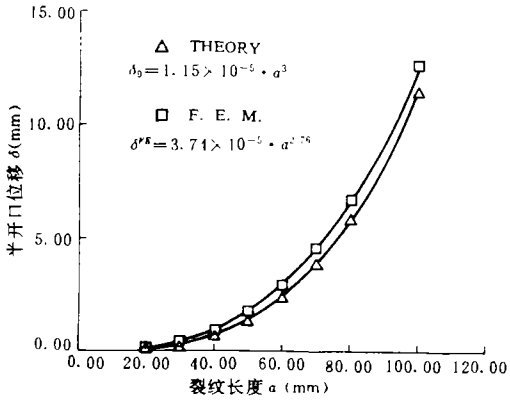


图 3 加载点的半开口位移与裂纹长度的关系

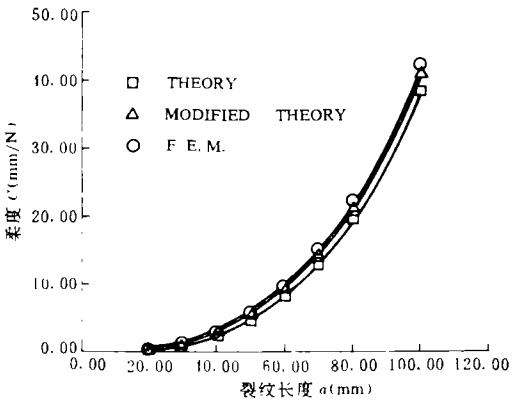


图 4 柔度与裂纹长度的关系

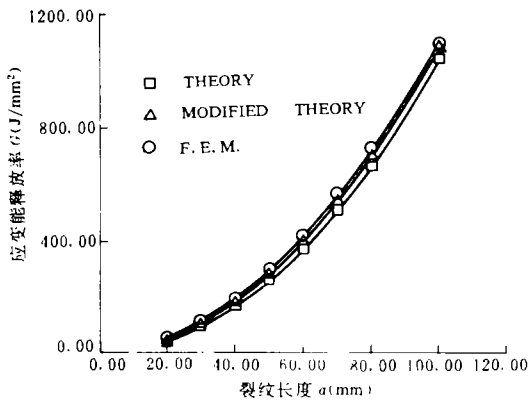


图 5 应变能释放率与裂纹长度的关系

从图中可见，有限元的计算结果与简单弯曲理论及修正后的简单弯曲理论解吻合较好，说明了计算结果的正确性。

### 3.1 开口位移与裂纹长度的关系

对双悬臂梁(DCB)试样，按梁的简单弯曲理论，加载点的半开口位移 $\delta_0$ 与裂纹长度 $a$ 的立方成正比，从图 3 可见，不同裂纹长度下用有限元与简单弯曲理论计算出的开口位移并不总是符合得很好，其原因是简单弯曲理论没有考虑剪切变形的影响，且双悬臂梁的端部属弹性铰链约束，而不是固定约束，当裂纹长度较小时，双悬臂梁属平面问题，因此双悬臂梁的开口位移实际上并不与裂纹长度的立方成正比，有限元的计算结果表明(图 3)，半开口位移与裂纹长度的 2.76 次方成正比。

### 3.2 裂纹长度对层板应变能释放率计算结果的影响

将应变能释放率的有限元计算结果对简单弯曲理论解和修正后的简单弯曲理论解的计算结果正则化，然后将正则化的层板应变能释放率与正则化的裂纹长度绘成曲线，如图 6 所示。从图中可见，当裂纹长度较小时，有限元的计算结果与简单弯曲理论的计算结果相差较大，当裂纹长度与试样半厚度之比$(a/h)$小于 50 时，相差都在 5%以上。有限元的计算结果与修正公式的计算结果相差不大，当裂纹长度与试样半厚度之比$(a/h)$大于 25 后，有限元的计算结果与

修正公式的计算结果相差小于 5%。

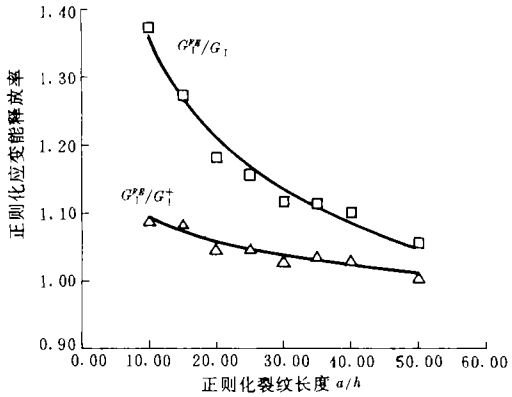


图 6　正则化应变能释放率与正则化裂纹长度的关系

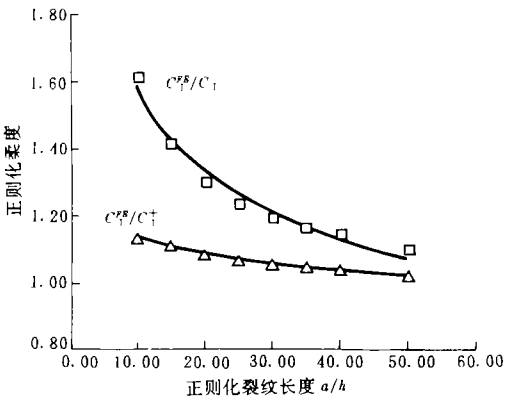


图 7　正则化柔度与正则化裂纹长度的关系

因此，如果采用(4)式计算层板的应变能释放率，则 $a/h$ 应大于 50，如果采用(6)式计算层板的应变能释放率，则 $a/h$ 应大于 25。

### 3.3　裂纹长度对层板柔度计算结果的影响

同应变能释放率一样，将正则化的柔度与正则化的裂纹长度绘成曲线如图 7 所示，从图 7 可得到与层板应变能释放率相似的结论。

### 3.4　厚度效应

将三种不同厚度($2h=3$mm，4mm，6mm)的 DCB 试样在不同裂纹长度下应变能释放率的有限元计算结果对简单弯曲理论的计算结果正则化，正则化应变能释放率($G_I^{FE}/G_I$)与裂纹长度的关系曲线如图 8 所示，从图中可见，裂纹较短时，有限元的计算结果与简单弯曲理论的计算结果相差较大，随着裂纹长度的增加，曲线趋于平稳，因此试验时，根据试样厚度与计算精度的要求，有必要给出一个初始裂纹长度。试样厚度越大，由简单弯曲理论解计算出的结果精度越低，所以在不发生大位移的前提下，尽量使用小厚度试样。本文建议试样厚度为 3～4mm。

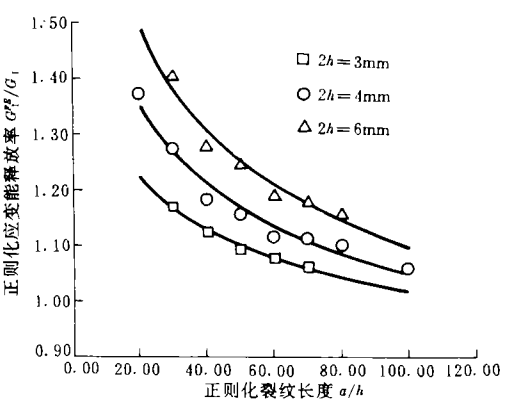


图 8　试样厚度对应变能释放率的影响

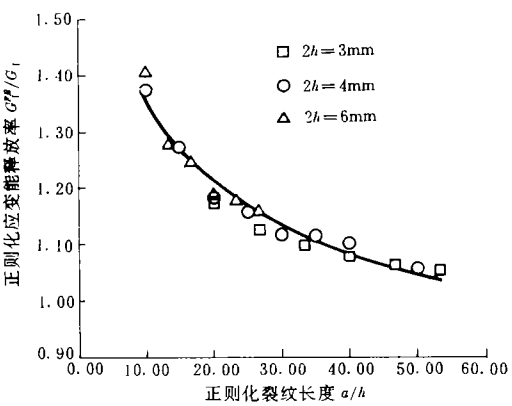


图 9　三种厚度试样正则化应变能释放率与正则化裂纹长度的关系

将上述三种不同厚度的 DCB 试样的裂纹长度对试样半厚度正则化后与正则化的应变能

释放率绘成曲线如图 9 所示，从图中可见，三种试样的数据点落到同一根拟合曲线上。因此可用裂纹长度与试样半厚度之比($a/h$)对简单弯曲理论解作裂纹长度与试样厚度的联合修正。

### 3.5 试样厚度方向弹性模量的影响

严格地说，双悬臂梁属平面问题，对双悬臂梁作梁的假定只有在一定的条件下，即臂长(裂纹长度)与试样厚度的比足够大，才近似成立。当裂纹长度与试样厚度的比较小时，对于各向异性材料，厚度方向的弹性模量势必对计算结果有影响。本文对其进行了计算分析，计算时假设其它条件不变(试样厚度 4mm，裂纹长度为 80mm)而只有厚度方向的弹性模量变化，正则化应变能释放率($G_I^{FE}/G_I$)随厚度方向与纤维方向弹性模量的比值而变化的关系曲线如图 10 所示。从图中可见，层板厚度方向弹性模量对计算结果有较大影响，量级在 7～20%之间，基本上呈直线变化，各向异性越强，影响越大，因此计算时须考虑试样厚度方向弹性模量的影响对简单弯曲理论解作修正。

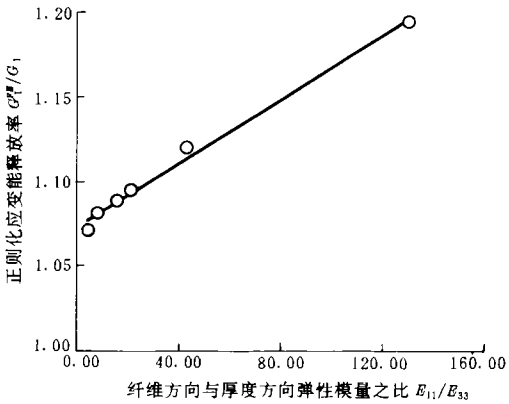


图 10 试样厚度方向弹性模量对应变能释放率的影响

## 4 结 论

本文对复合材料层板层间纯 I 型问题双悬臂梁试样(DCB)的柔度与应变能释放率进行了计算，并与简单弯曲理论解及其修正后的简单弯曲理论解的计算结果进行了对比分析，结果表明，有限元的计算结果与简单弯曲理论的计算结果相差较大，与修正后的计算结果相差不大，当裂纹长度与试样半厚度之比($a/h$)较小时，相差要大一些，随着 $a/h$ 的增加曲线趋于平稳，因此试验时，有必要根据试样厚度和所要求的计算精度给出一个初始裂纹长度。

DCB 试样存在厚度效应，试样厚度越大，简单弯曲理论解的计算结果与有限元的计算结果相差越大。对不同厚度的试样，正则化的应变能释放率与正则化的裂纹长度数据点落在同一条曲线上，所以可用裂纹长度与试样半厚度之比($a/h$)对简单弯曲理论解作联合修正。

DCB 试样厚度方向的弹性模量对应变能释放率的计算结果有较大影响，各向异性越强，简单弯曲理论的计算结果与有限元的计算结果相差越大。所以计算时需要考虑厚度方向弹性模量的影响对简单弯曲理论解作修正。

## 参 考 文 献

1 Whitney J M, etc. The double cantilever beam test for characterization mode I delemination of composite materials. Journal of Reinforced Plastics and Composites, 1982;1:297

2 Smiley A J, Pipes R B. Rate Effects on Mode I interlaminar fracture of composite materials. Journal of Composite Materials, 1987;21:670

3 Hashemi S, etc. Effects of geometry, rate and temperature on the mode I, mode Ⅱ and mixed-mode I / Ⅱ interlaminar fracture of carbon-fibre/poly (ether-ether ketone) composites, Journal of Com posite Materials, 1990;24: 918-956

4 Friedrich K. Application of fracture mechanics to composite materials. Amsterdam: Elsevier, 1989;85-88

## FINITE ELEMENT ANALYSIS OF STRAIN-ENERGY-RELEASE RATE FOR DOUBLE-CANTILEVER BEAM SPECIMEN

Guo Yajun

(The Institute of Aeronautical Materials, Beijing 100095)

**Abstract** Two-dimensional finite element analysis of the double-cantilever beam specimen was performed using 8-node isoparametric, quadrilateral elements to evaluate compliance and strain-energy-release rate $G_I$. The $G_I$ values were computed using J-integral method. The effects of the carck length, the thickness of specimen and the modular in thickness direction on the evaluation of $G_I$ according to simple-beam-theory were investigated.

**Key words** composites, finite element analysis, strain-energy-release rate